This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Prof. Rinker.

QA
37
S365

Kurzer Lehrbegriff

der

höhern Mathematik,

oder Lehrbuch

der

höhern Analysis und höhern Geometrie,

auf

dem Grunde der niedern Mathematik

und

zum Behufe

öffentlicher Vorlesungen und des Selbstunterrichtes

bearbeitet

von

Johann Schön,

der Philosophie Doctor, öffentl. und ordentl. Professor der Mathematik an der Julius-Maximilians-Universität in Würzburg, korrespondirendem Mitgliede der k. k. mährisch-schlesischen Gesellschaft zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde — und des königl. würtembergischen landwirthschaftlichen Vereines.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Sulzbach,

in der J. E. v. Seidel'schen Buchhandlung.

1833.

Den Durchlauchtigen

Prinzen von Thurn und Taxis:

Karl Theodor,

königl. bayerischen General-Major und Brigadier, Inhaber des II. Chevauxlegers-Regiments, Kommandeur des königl. bayer. St. Georgen-Ordens;

Friedrich Hannibal,

k. k. österreichischen Oberstlieutenant, kaiserlichen Kammerherrn und Kommandeur des kaiserlich Brasilianischen Christus-Ordens,

und

Wilhelm Karl,

k. k. österreichischen Major, kaiserlichen Kammerherrn, Kommandeur des Großherzoglich-Badischen Zähringen Löwen-Ordens und Ritter des königl. sicilianischen militärischen St. Georgen-Ordens,

widmet

dieses Lehrbuch der höhern Mathematik

zum Zeichen inniger Verehrung und unvergänglicher Freundschaft, durch das glückliche Verhältniß eines Lehrers frühe schon gegründet,

der Verfasser.

Hist. of Sci.
Gibbs
9-24-30
22354

Vorrede.

Durch die Herausgabe dieses kurzen Lehrbegriffes der höhern Mathematik beabsichtigte ich, einem, nicht selten von Lehrern und Lernenden gefühlten, Bedürfnisse zu begegnen.

2-28-39 MCM.

So mancher zu Vorträgen über diese Wissenschaft an einem vollständig geordneten polytechnischen Institute und Lyceum, oder auch an einer Hochschule verpflichtete Professor mag sich in Verlegenheit gesetzt fühlen durch die Fragen: wo auf dem unermeßlichen Gebiete zu beginnen? wo zu enden sey? Zwar weiß er, daß er auf den sogenannten Elementen, als Fundamente, weiter bauen müsse. Wenn er aber dieses Fundament entweder nicht selbst legte, oder nun für das Studium der höhern Mathematik den Kreis seiner früheren Zuhörer durch den Hinzutritt anderer erweitert sieht, die an verschiedenen gelehrten Anstalten sich ihre mathematischen Vorkenntnisse erworben haben; so wird für ihn, wegen gar nicht scharfer Abgrenzung sowohl, als auch wegen höchst-mannigfacher Bearbeitung eben jener Elemente, das nur im Allgemeinen ausgesprochene Fundament in dem Grade schwankend, daß er, um mit sicherem Er-

folge fortzuschreiten zum Höhern, nicht umhin kann, mehrere jener Elementarlehren zu wiederholen, neu zu erklären oder unter andern Gesichtspunkten zu entwickeln. Dadurch wird denn die goldene Zeit zersplittert, und das sauere Abmühen bei Fortführung des neuen Baues tritt der Erreichung des Zieles hemmend entgegen.

Zur möglichsten Beseitigung dieser, besonders für die freieren und gewöhnlich auf kürzere Zeit beschränkten Vorträge über höhere Mathematik an Universitäten, höchst nachtheiligen Umstände bleibt das einzige Mittel übrig, eben diesen Vorträgen ein oder zwei das Gebiet der niedern Mathematik gründlich und vollständig umfassende Lehrbücher zu Grund zu legen, auf die der Lehrer oder Schriftsteller beständig hinweisen, und aus welchen der Zuhörer oder der sich selbst Unterrichtende mit Zeit- und Kosten-Ersparnisse sich immer Raths erholen könne.

Solche Basis des vorliegenden Lehrbegriffes der höhern Mathematik bilden meine zwei Lehrbücher der allgemeinen Größenlehre und Geometrie. Beide, noch innerhalb der Schranken der niedern Mathematik sich haltend, sind durchaus mit Rücksicht auf das, was bei dem Studium des Höhern Noth thut, entworfen. Weßwegen sie denn auch mit meinem gegenwärtigen Lehrbegriffe ein Ganzes ausmachen.

Mittelst des sicher und fest gelegten Fundamentes bestimmen sich gleichsam von selbst die Gegenstände des höheren Studiums. Diese sind im Allgemeinen *erstens* hinsichtlich der Geometrie: die, wegen ihres großen Einflusses auf fast alle

Zweige des mathematischen Wissens, klar und vollständig durchzuführende ebene und sphärische Trigonometrie, mit Goniometrie, Cyklometrie und Polygonometrie nur eine, zum Gebiete des Niedern nicht gehörende, Wissenschaft konstituirend; dann die Curven höherer Ordnung überhaupt; — zweitens hinsichtlich der allgemeinen Größenlehre: die höheren Gleichungen, Reihen, combinatorischen Formen und die fast gleichzeitig von Newton und Leibniz erfundene, von den vortrefflichsten Mathematikern aller Nationen vielseitig kultivirte, Infinitesimalrechnung (Differenzial- und Integralcalcul), zugleich mit Anwendung derselben auf die vorhin genannten Gegenstände, damit auf diese Weise auch dieser kurz gefaßte Lehrbegriff der höhern Mathematik, so weit es möglich ist, die Gestalt eines in sich geschlossenen Ganzen gewinne.

Der geneigte Leser erblickt in dem Gesagten einen schwachen Umriß meines Werkes, dessen Umfang durch das beigegebene Inhalts-Verzeichniß näher bestimmt wird.

Wichtiger noch, aber auch schwieriger erscheint die Beantwortung der zweiten Frage: wo soll oder darf der Lehrer — als solcher oder zugleich als Schriftsteller auftretend — seine Vorträge über höhere Mathematik enden? Bei ernstem Versuche, diese Frage zu beantworten, wird sich ihm die bestimmtere und, wie es scheint, nicht leicht zu lösende Aufgabe kund geben, ein seinen Wünschen, wie den wahren Bedürfnissen seiner Zuhörer oder Leser entsprechendes Lehrbuch entweder selbst zu bearbeiten, oder auch nur unter den vorhandenen Lehrbüchern auszuwählen. In der That wird seinem forschenden Auge sich ein weithin aus-

gebreitetes Feld anſthun mit einem bereits errungenen, großen Schatze der herrlichſten Erfindungen und Wahrheiten, welchen er in einer Menge Schriften der erſten Mathematiker niedergelegt findet; — leicht wird er ſich überzeugen, daß auf dieſem Gebiete, beſonders mit Hülfe der ſelbſt immer mehr ausgebildeten Infinitesimalrechnung, die Nachforſchungen des Mathematikers, ſowohl hinſichtlich des Theoretiſchen, als Praktiſchen, wahrhaft in's Unendliche fortgeführt werden können.

Wenn es daher dem Lehrer von Seite des Gegenſtandes klar wird, daß es ein ſchlechterdings fruchtloſes Unternehmen ſey, Alles, was ſich ihm auf dieſem Gebiete auch nur mit Rückſicht auf die Theorie offenbart, ſeinen Zuhörern in wenigen Semeſtern vorzutragen; wenn er andererſeits erwägt, daß den Letztern auch nicht mit beliebig dargebotenen Fragmenten gedient ſeyn könne; ſo wird er das ihn hier leitende Prinzip vorzüglich darin ſuchen müſſen, was er in Beziehung auf die ächtwiſſenſchaftliche Bildung ſeiner Zuhörer leiſten ſoll und auch zu leiſten im Stande iſt.

Die durch dieſes Prinzip bedingten Anforderungen beziehen ſich nicht ſowohl auf die Menge des Stoffes, als vielmehr auf die Art ſeiner Bearbeitung. Wenn es nämlich im Betreffe des Stoffes genügt, daß dieſer zunächſt über die Elemente der niedern Mathematik ſich erhebend, ein ſolches Ganze bildet, das ſelbſt wieder als Grundlage ſowohl zu höheren Forſchungen, als auch zum Studium der ſo nützlichen angewandten mathematiſchen Wiſſenſchaften dient; ſo verlangt die Förderung ächt wiſſenſchaft-

lichter Bildung, daß der Lehrer, durchdrungen von der geistigen Weihe der göttlichen Matheſis, Gründlichkeit und Deutlichkeit vereine mit beiden zuſagender Kürze — nach Euklid's Weiſe, und daß er ſeine Zuhörer bekannt mache mit den vorzüglichſten Methoden, die, wenn ſie gleich alle zu demſelben Reſultate führen, doch bald ſicherer und allgemeiner, bald leichter und bequemer das gewünſchte Ziel erreichen laſſen. Hieher ſind auch die mannigfachen Kunſtgriffe zu rechnen, welche, vom Scharfſinne erzeugt, auch wieder geeignet ſind, die Urtheils- und Erfindungskraft zu üben und zu ſchärfen. Eben ſo iſt es nicht nur der Klarheit durch Beiſpiele wegen nützlich, ſondern auch nothwendig, auf die richtige und möglichſt leichte Handhabung der zur Gewinnung numeriſcher Reſultate anzuſtellenden Rechnungen aufmerkſam zu machen.

Während demnach der gelehrte Mathematiker in ſeinen oft bändereichen Schriften hauptſächlich die Vervollkommnung und Erweiterung der Wiſſenſchaft ſelbſt im Auge hat; iſt es das verdienſtlichſte Bemühen des öffentlichen Lehrers, den dargebotenen, durch Nacherfindung ſich zugeeigneten, ſo wie durch eigene Erfindungen vermehrten Reichthum mit ſcharfer Umſicht und weiſer Sparſamkeit zur Förderung jener ächt wiſſenſchaftlichen Bildung zu benützen. Gerade hierin beſteht die eigentlichſte, dem übrigens mit Talent für das mathematiſche Studium begabten Jünglinge durch unſere Vorträge zu leiſtende und ſich für ihn ohne Aufhören wirkſam beweiſende Beihülfe, daß er ſich ſelbſt zum Mathematiker mache.

Von diesem nach meiner vollen Ueberzeugung entwickelten und offen dargelegten Standpunkte aus wünsche ich das gegenwärtige Lehrbuch beurtheilt. Da ich dasselbe zunächst zum Behufe öffentlicher Vorlesungen an höheren Bildungsanstalten ausarbeitete; so sollte es meiner Absicht gemäß allen jenen Anforderungen entsprechen, welche von mir in dem Vorausgehenden in Beziehung auf die Vorträge über die höhere Mathematik aufgestellt wurden. Und in eben dem Maße, in welchem nach dem Urtheile des gelehrten Kritikers jenen Anforderungen, sowohl hinsichtlich des Stoffes als der Form, durch dieses Lehrbuch Genüge geschehen ist, wird man mir die Erreichung des im Eingange dieser Vorrede bezeichneten Zweckes gerne zuerkennen. Eine unparteiische Anerkennung dieser Art wird denn auch für mich, als vieljährigen öffentlichen Lehrer, den Ruhm- oder Gewinnsucht nie zur Thätigkeit spornte, der schönste Lohn seyn.

Würzburg, den 1sten Januar, 1833.

Der Verfasser.

Inhalts-

Inhalts-Verzeichniß.

I.

	Seite	§.
Trigonometrie	1—126	1—55.

A.

Allgemeine Einleitung.

a. Erklärung und Eintheilung der Trigonometrie	3—4	1. 2.
b. Goniometrie	4—50	3—25.
1. Von den trigonometrischen Linien und ihren ursprünglichen Formeln.	4—21	3—8.
Erklärung der trigonometrischen und logarithmisch-trigonometrischen Funktion; der Goniometrie und Cyklometrie .	5. 6.	3.
Vom Sinus und Cosinus; dem Wachsen und Abnehmen derselben und von ihren Zeichen	6—15	4. 5.
Vom Quersinus und Quercosinus; ihren Größeänderungen und Zeichen . . .	15	6.
Von der Tangente und Sekante; Cotangente und Cosekante	16—18	7.
Formeln des Sinus oder Cosinus der Summe oder Differenz zweier Bögen . . .	19	8.
Natürliche und künstliche trigonom. Funktionen; Gebrauch der verschiedenen Tafeln .	20. 21	8. Anm.
2. Zusammenstellung der vorzüglichsten goniometrischen Formeln. .	22—50	9—25.
Erstens. Formeln der Funktionen ganzer Winkel oder Bogen.	22—25	9—13.
Zweitens. Formeln der Funktionen des halben Winkels oder Bogens . . .	25—28	15—17.
Drittens. Formeln der Funktionen von Summen oder Differenzen . . .	28—30	18—19.
Viertens. Formeln der Summen oder Differenzen trigonometr. Funktionen . .	30—35	20—21.

	Seite	§.
Fünftens. Formeln der trigonom. Funktionen vielfacher Bogen; dann der Potenzen jener Funktionen von einfachen Bogen mittelst der vielfachen . . .	35—46	22—24.
Alle verschiedenen Sinusse des nten Theiles der zu einem Sinus gehörigen Bogen zu finden	46—50	25.
B.		
Ebene Trigonometrie . .	51—81	26—36.
a. Gesetze der Resolution rechtwinkeliger und gleichschenkeliger Dreiecke . .	51—57	26.
b. Gesetze der Resolution schiefwinkel. Dreiecke	57—75	27—34.
1) Aus 2 gegebenen Winkeln und einer Seite;		
2) aus 2 gegebenen Seiten und 1 Winkel, welcher einer dieser Seiten gegenübersteht, die übrigen Stücke zu finden	57	27.
3) Aus 2 mit dem eingeschlossenen Winkel gegebenen Seiten		
erstens das Dreieck zu resolviren . .	58—62	28.
zweitens die dritte Seite unmittelbar zu finden	62—65	29.
4) Aus 3 gegebenen Seiten erstens einen Winkel; zweitens den Flächenraum T des Dreieckes zu finden	66—69	30. 31.
	69—70	32.
T auch aus andern Stücken zu finden .	70—72	Zusatz 3. 5.
Den Flächenraum eines Trapezs, einer Trapezoide, eines regulären Polygons, eines Kreisabschnittes zu finden .	70. 71	Z. 2. 3. 4.
5) Für besondere Fälle abgeleitete trigonometrische Formeln	72—75	33. 34.
c. Anwendung auf Polygonometrie, oder Hauptgleichungen derselben mit Folgerungen	76—81	35. 36.
Der Ptolomäische Satz . . .	81	36. (10)
C.		
Sphärische Trigonometrie . .	82—126	37—55.
a. Eigenschaften der sphärischen Dreiecke .	82—90	37—43.
b. Gesetze der Resolution rechtwinkel. sphär. Dreiecke	90—97	44. 45.
Tafel hiezu	96. 97.	nach §. 4.

	Seite	§.
c. Gesetze der Resolution schiefw. Kugeldrei.	93—126	46—55.
Den Abstand zweier Erdorte von einander aus ihrer bekannten Länge und Breite zu finden.	100	46. Anm.
Die Neper'schen Analogien . . .	105—107	50.
Die Delambre'schen oder Gauß'schen Gleichungen	107. 108.	51.
Zusammenstellung der Gleichungen zur Resolution der schiefwinkel. Kugeldreiecke in 12 Fällen mit Berechnung	108—121	52—54.
Tafel zur Resolution der sphär. gleichschenkel. Dreiecke	120	54 Z.
Den Flächeninhalt des Kugeldreieckes zu finden.	121—126	55.

II.

Höhere Algebra . . | 127—186 | 56—66.

A.

Von den höheren Gleichungen überhaupt. | 129—154. | 56 (1—19).

Die erste Seite einer auf o gebrachten Gleichung kann als ein Produkt aus Binomialfaktoren dargestellt werden, auch wenn ihre Wurzeln imaginär sind	129	56. 1.
Die imaginären Wurzeln sind nur paarweise vorhanden	129	—. 2.
Jede unmögliche Größe wird durch $P \pm Q\sqrt{-1}$ ausgedrückt	130—132	—. 3.
Die Summe von je 2 unmöglichen Wurzeln ist eine mögliche, ihre Differenz eine unmögliche Größe	132	—. 4.
Jede geordnete Gleichung, deren erstes Glied $= x^n$, ist in n Binomialfaktoren zerlegbar und hat n Wurzeln;	133—194	—. 5—7.
und unter diesen so viel + Wurzeln, als Zeichenwechsel, und so viel — Wurzeln, als Wiederholungen desselben Zeichens Statt finden	134—136	—. 8.
Das Vorhandenseyn 1) imaginärer Wurzeln .	137	—. 9.
" " " 2) einer möglichen + oder — Wurzel zu erkennen	137	—. 10.
Bedeutung der Coefficienten der Glieder der Gleichung	137—138	—. 11.

	Seite	§.
Das Ordnen der Gleichung	138—139	—. 12.
Die Wurzeln einer Gleichung, die lauter ganze Zahlen zu Coefficienten hat, sind durch keine Art von Brüchen genau ausdrückbar .	139	—. 13.
Methode, die gleichen Wurzeln der Gleichung zu erkennen	140—143	— 14.
Das zweite Glied aus einer Gleichung wegzuschaffen, oder es, wenn es fehlt, in die Gleichung zu bringen	143—144	—. 15
Prüfung, welcher Faktor des letzten Gliedes eine rationale Wurzel der Gleichung sey . .	144—147	—16. 17.
Von den Wurzelgrenzen	147—149	— 18.
Methoden, die Wurzel einer Gleichung durch Näherung zu finden	149—154	— 19.
B.		
Besondere Methoden, höhere Gleichungen aufzulösen	155—175	57—61.
a. Auflösung kubischer Gleichungen.		
Cardan's Regel	155—157	57.
Der irreducible Fall	158—161	— Z. 2.
b. Auflösung biquadratischer Gleichungen.		
1. Ferrari's oder Bombelli's Methode. .	162. 163	58.
2. Descarte's Methode	163—167	59.
3. Euler's Methode	168—170	60.
c. Auflösung noch höherer Gleichungen nach Cagnoli	170—174	61.
C.		
Eliminations-Methoden	175—186	62—66.
1. Methode durch Substitution	175	62.
2. " " durch Einhüllung einer Unbekannten .	176	63.
3. Newton's Regeln	178	64.
4. Bezout's Methode	180	65.
5. Lagrange's Methode	182	66.
Die reciproken Gleichungen . . .	184	— Bem.

	Seite	§.
III. Höhere Reihen	187—232	67—80.
A.		
Arithmetische Reihen höherer Ordnung.	189—198	67—69.
Hauptsätze in Beziehung auf die Differenzreihen; das allgemeine und summatorische Glied	190—193	68. 69.
Anwendung auf die Quadrat-, Würfel-, Polygonal- und Pyramidalzahlen	193	—. Zus. 2.
Die Bernoulli'schen Zahlen	196	—. Anm. 1.
Reciproke Reihen	198	—. Anm. 3.
B.		
Wiederkehrende Reihen	198—223	70—79.
Erklärung und Genesis dieser Reihen	198—200	70. 71.
Die Beziehungsskale der Coefficienten; diese selbst unmittelbar und das allgemeine Glied zu finden	200—207	72. 73.
Die rücklaufende Reihe zu summiren	207	74.
C.		
Anwendung der wiederkehrenden Reihe auf die Gleichungen	209—214	75.
Die kleinste und die grösste Wurzel einer Gleichung durch Näherung zu finden	209	75.
Lagrange's Vorschrift	213	— Z. 2.
D.		
Anwendung der arithm. und wiederkehr. Reihen auf Interpolation	215—225	76—78.
Die zu interpolirende Grösse zu finden	216—220	77. 78.
Lagrange's Formel	222	— Anm.
E.		
Kennzeichen der Con- und Divergenz unendlicher Reihen	223—232	79. 80.

IV.

Höhere Combinationslehre.

	Seite	§.
Involutorische Formeln mit einigen Anwendungen . . .	233—250	81—87.
Die Combinationsformen nach k mit bestimmter Lokalsumme wohlgeordnet darzustellen . .	236	82.
Die combinat. Formen jeder Klasse darzustellen .	237	83.
Diese Formen nach den Lokalsummen abzutheilen und zu ordnen	241	84.
Anwendung auf die Entwickelung der Potenzen.	243	85.
Anwendung auf die Gleichungen. . . .	245	86. 87.

V.

Theorie der Curven der zweiten Ordnung . . . 251—310 88—130.

A.

Linien der ersten und zweiten Ordnung.

Algebraische Ausdrücke der geraden Linie . .	253	88.
Allgemeine Ausdrücke der Coordinatentransformation	256	89.
Gleichungen der Kegelschnitte	285	90.
Algebraische Ausdrücke der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale einer Curve der zweiten Ordnung	266	91. 92.

B.

Besondere Betrachtung der Kegelschnitte.

a) Parabel.

Polargleichung der Parabel	268	93.
Die Parabel, auf die Directrix bezogen . .	269	94.
Die Tangente für einen Punkt der Parabel zu ziehen	ebend.	95.
Die Werthe der Tangente, Normale, ꝛc. der Parabel zu finden	270	96.
Die Parabel, auf die Durchmesser bezogen .	272	97—99.
Auflösung des Delischen Problems . . .	274	—. Anm.

b) Ellipse.

	Seite	§.
b) Ellipse . . .	274—286	100—111.
Haupteigenschaften der Ellipse, diese auf die Axen bezogen	274	100.
Excentricität der Ellipse	276	101.
Die Summe der Radienvektoren gleicht der grossen Axe	ebend	102.
Polargleichung der Ellipse	278	103.
Die Tangente für einen Punkt der Ellipse zu ziehen .	279	104.
Werth der Tangente, Normale, ꝛc. . . .	ebend.	105.
Von der Ellipse, diese auf die Durchmesser bezogen	281—286	106—111.
c) Hyperbel. . .	286—305	112—128.
Eigenschaften derselben in Beziehung auf die Axen	286	112.
Excentricität der Hyperbel	288	113.
Werthe der Radienvektoren und ihres Unterschiedes	289	114.
Polargleichung der Hyperbel	290	115.
Die Hyperbel geometrisch zu beschreiben .	290. 305	116. 128. Z. 2.
Für einen Punkt derselben die Tangente zu ziehen	291	117.
Die algebr. Werthe der Tangente, Normale ꝛc. .	292	118.
Von der Hyperbel, diese auf die Durchmesser bezogen	295—300	119—124.
Von derselben, bezogen auf die Asymptoten .	300—305	125—128.
Allgemeine Gleichung der Kegelschnitte . . .	305	—. Anm. 1.
Nähere Eintheilung der Curven	306	—. Anm. 2.
C.		
Die Kegelschnitte auf den Krümmungskreis bezogen	307	129.
Vier Ausdrücke des Krümmungshalbmessers. .	308—310	130.
VI.		
Die Differenz- u. Differenzialrechnung.	311—385	131—149.
A.		
Einleitung.		
Erklärungen und Eintheilung der Differenzenrechnung	313—319	131. 132.
B.		
Erste Grundsätze der Differenz- und Differenzialrechnung	319—324	133—136.

	Seite	§.
C. **Anwendung jener ersten Grundsätze.**		
1. Entwickelung allgemeiner Differenzenformeln für die trigonometrischen und Kreisfunktionen.		
a. Differenzformeln des Sinus, Cosinus, ꝛc	325	137.
b. Differenzialformeln derselben Funktionen	326	138.
c. Differenzialausdrücke der Aenderung eines Winkels oder Bogens	327	—. Zus. 1.
d. Differenz- und Differenzialformeln des Quadrats einer trigonom. Funktion	ebend.	—. Zus. 2
e. Differenziale des Bogens, dessen Sinus, Cosinus . . . y ist	328	—. Zus. 3.
2. Entwicklung logarithmischer Differenzialformeln der trigonometrischen Funktionen.		
Das Differenzial des Logarithmus einer Größe	329	139.
— — — — — — des Sinus, Cosinus ꝛc.	330	—. Zus. 2.
3. Entwickelung einfacher Differenzialformeln für die Dreiecke.		
α) für geradlinige ebene Dreiecke	332	140.
β) für sphärische Dreiecke	335	141.
4. Gebrauch der in den §§. 137—141 aufgestellten Formeln bei trigonometr. Rechnungen, durch Beispiele erörtert	340—346	142—144.
D. **Zusammenstellung der Differenzialformeln.**		
1. Differenziale algebraischer Funktionen	346	145.
2. — — transcendenter Funktionen		
a. logarithmischer und Exponentialfunktionen	349	146.
b. trigonometrischer Funktionen.	352	147.
c. logarithmisch-trigonometrischer Funktionen	ebend.	148.
3. Höhere Differenziale	355	149.
Der Taylor'sche Lehrsatz	385	—. Zusatz.
VII. **Die Integralrechnung.**	361—446	150—170.
A. **Vorerinnerungen**	363	150.

	Seite	§.
B.		
Entwickelung und Zuſammenſtellung der Integralformeln.		
a. Integrale in Beziehung auf algebraiſche Funktionen	365	151.
b. Integrale in Beziehung auf logarithmiſche Exponential- und ſolche Funktionen, welche irrationale Faktoren haben .	366—411	152—159.
c. Integrale in Beziehung auf trigonometr. Funktionen	411	160—165.
Löſung der Hauptaufgabe der Cyklometrie .		160. Zuſ. 1. 2.
Methode, den Werth eines Integrals innerhalb Grenzen zu ſuchen	427	165. Anm.
d. Integrale in Beziehung auf Differenzialgleichungen von der Form $Pdx + Qdy = 0$ . . .	428	166—170.
Darſtellung der Grundlage der Differenzial- und Integralrechnung nach Lagrange und Lacroix . . .	437—446	170. Anm.
VIII.		
Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung	499—500	171—201.
A.		
Anwendung auf die Auffindung der Maxima und Minima	449	171—174.
B.		
Anwendung auf die höheren Gleichungen.		
1. Merkmale der aufzufindenden Wurzelgrenzen .	459	175.
2. Die gleichen irrationalen Wurzeln zu entdecken	461	176.
3. Die Wurzeln zwiſchen bekannten Grenzen zu finden	464	177.
C.		
Anwendung auf die Curven.		
a. Allgemeine Ausdrücke der Tangente, Normale, ꝛc. und des Krümmungshalbmeſſers	465—473	178—180.

	Seite	§.
1. Berührung der ersten, zweiten, ... Ordnung	465	178.
2. Die Gleichung einer Geraden zu finden, die mit einer gegebenen Curve eine Berührung erster Ordnung hat	467	179.
3. Die Lage der Tangenten zu bestimmen	468	—. Z. 2.
4. Den Kreis zu finden, welcher mit einer gegebenen Curve eine Berührung zweiter Ordnung hat	469	180.
5. Die Gleichung der Evolute zu finden	472	—. Z. 3.
b. Rectification der Curven	472	181.
Allgemeine Formel	ebend.	182.
Rectifikation α) eines paraboliſchen Bogens	475	183.
— — β) — elliptiſchen —	476	184.
— — γ) — hyperboliſchen —	478	185.
c. Quadratur	479	186.
Allgemeine Formel	480	187.
Quadratur α) einer paraboliſchen Fläche	481	188.
— — β) — elliptiſchen —	483	189.
— — γ) — hyperboliſchen —	484	190.
Erklärung der Benennung „hyperbol. Logarithmus"	487	— Z. 4.
d. Kubatur	487	191.
Allgemeine Formel	488	192.
Inhalt der Kugel	489	192. Z. 2.
Inhalt eines paraboliſchen Konoids	489	193.
— — hyperboliſchen —	490	194.
— — Cylindroids	491	—. Z.
Gleichung für die Oberfläche des Sphäroids	491	195.
Inhalt des Sphäroids, ſo wie des abgeplatteten und länglichen Sphäroids	494	196. mit Zuſ.
e. Complanation	495	197.
Allgemeine Formel	ebend.	198.
Beſtimmung der Oberfläche der Kugel	496	—. Z.
— — — — — eines Sphäroids	ebend.	199.
— — — — — — parabol. Konoids	498	200.
— — — — — — hyperbol. —	499	201.

I.

Trigonometrie.

A.

Allgemeine Einleitung.

a. Erklärung und Eintheilung der Trigonometrie.

§. 1. **Erklärung.** Trigonometrie ist die Wissenschaft, aus 3 gegebenen Stücken eines Dreieckes die übrigen (den Flächenraum — area — mit eingeschlossen), in wiefern diese durch jene bestimmt werden, durch Rechnung zu finden; oder kurz: die Wissenschaft der Resolution der Dreiecke.

Der Ausdruck, welcher das Gesetz dieser Resolution für jeden bestimmten Fall darstellt, heißt trigonometrische Formel.

§. 2. **Eintheilung.** Nach der Haupteintheilung der Dreiecke selbst in ebene und sphärische, ist auch die Trigonometrie entweder die ebene oder sphärische.

Jede hat im Allgemeinen 20, oder, wenn man die Bestimmung des Flächenraums des Dreieckes (des ebenen z. B. aus seinen 3 Seiten, und des sphärischen aus seinen 3 Winkeln) mit begreift, 21 Aufgaben, als eben so viele verschiedene Fälle, zu lösen.*) Allein unter diesen Fällen ist der: „ein Dreieck aus den 3 gegebenen Winkeln zu resolviren," — zwar nicht für die sphärische, doch für die ebene Trigonometrie (Geom. §. 116.) ein unmöglicher, so wie der: „aus 2 gegebenen Seiten a, b und dem der kleineren Seite a opponirten Winkel

*) Vergl. mein Lehrbuch der niedern, reinen allgemeinen Größenlehre (Würzb. bei Stahel 1825) S. 378. Beisp. 3. Dieses Lehrbuch werde ich künftig nur durch „allgem. Größenl.", so wie mein Lehrbuch der reinen niedern Geometrie in Verbindung mit der Anleitung zur Feldmeßkunst (2te Auflage, Nürnberg bei Felsecker 1824) nur durch „Geom." citiren.

A den der andern Seite b gegenüberliegenden Winkel B zu finden" (Geom. §. 51. mit Anm.) ein zweifelhafter Fall. Auf diese Fälle bezieht sich das „In wiefern" im §. 1.

Die Art, die trigonometrischen Formeln (§. 1.) zu finden, ist entweder die synthetische (durch Konstruktion), wie in der niedern Geometrie (nach Euklid's Methode), oder die analytische (hauptsächlich mit Hülfe der goniometrischen Formeln — vergl. §. 3.) Daher 2. die Unterabtheilung der Trigonometrie in die synthetische und analytische. Beide werden in diesem Lehrbuche mit einander verbunden.

b. Goniometrie.

1. Von den trigonometrischen Linien und ihren ursprünglichen Formeln.

§. 3. Erklärung. Gewisse, gerade Linien, welche bei Resolution der Dreiecke die Stelle der Winkel vertreten, heißen trigonometrische Linien oder trigonometrische Funktionen (der Winkel).

Ohne ihre Erfindung keine Trigonometrie! Denn wie sollte es möglich seyn, entweder aus gegebenen ungleichartigen Stücken z. B. 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines ebenen geradlinigen Dreieckes die dritte Seite, oder aus gegebenen gleichartigen Stücken z. B. den 3 Seiten Ungleichartiges, nämlich einen Winkel zu finden, wenn wir nicht im ersten Falle statt des gegebenen Winkels eine Linie substituiren, und im zweiten Falle nicht unmittelbar den gesuchten Winkel, sondern wieder nur eine Linie, die das Gesuchte erkennen läßt, finden könnten? (Man vergl. hiebei das in der Anmerk. 2. zu §. 4. unten Gesagte).

Hieraus ist klar, daß, um in beiden Fällen an der Stelle der Winkel stehen zu können, diese Linien, als Funktionen der Winkel, von diesen und umgekehrt diese von jenen überhaupt abhängig seyn müssen, daß es folglich von der höchsten Wichtigkeit ist, diese wechselseitige Abhängigkeit und die Natur oder das Wesen der trigonometrischen Linien genau zu kennen.

Wir nennen die Wissenschaft, deren Gegenstand zunächst ist „die Erforschung des Wesens der trigonometrischen

Linien und das Fixiren des Erforschten durch (ursprüngliche und abgeleitete) Formeln" — Goniometrie (im weiteren Sinne — im engeren „Winkelmessung"). Diese muß daher als nächstes Fundament der Trigonometrie überhaupt, insbesondere aber der analytischen Trigonometrie (§. 2.) betrachtet werden.

Zusatz 1. Nach §. 1. kann die Trigonometrie ihren Zweck nur durch Rechnen erreichen. Es müssen daher die trigonometrischen Linien, in wiefern sie in der Rechnung die Stelle der Winkel vertreten sollen, in Zahlen bekannt, d. i. wie z. B. die Seiten des ebenen Dreieckes selbst, berechnet seyn.

Es erhalten aber Zahlen ihre wahre Bedeutung nur durch die Kenntniß der Einheit, auf die sie bezogen werden. Stellt man sich daher vor, daß die trigonometrischen Funktionen der Winkel oder Kreisbogen, die jener Maß sind, um berechnet zu werden, auf den Kreisdurchmesser oder Halbmesser als auf ihre Einheit bezogen werden; so erhellt, daß die so gefundenen Zahlen, in der Rechnung die Stelle der trigonometrischen Linien vertretend, beständige Zahlen eben so wohl seyen, als die für die rectificirte Peripherie stehende Zahl 3,1415 ... für alle Kreise dieselbe ist, wenn man den Durchmesser = 1 setzt (vergl. Geom. §. 121. Zus. mit §. 140.).

Nimmt man weiter an, daß, nach Erfindung der Logarithmen, zum Behufe der Erleichterung der Rechnung mit diesen konstanten Zahlen auch ihre Logarithmen eigens berechnet und nun als logarithmisch-trigonometrische Funktionen in Tafeln zusammengestellt seyen; so hat man eine richtige Vorstellung nicht nur theils von der Nothwendigkeit, theils von der allmähligen Verwandlung der trigonometrischen Linien, als solcher, in logarithmisch-trigonometrische Funktionen der Winkel oder Kreisbogen, sondern auch von der Leichtigkeit, mit Hülfe derselben die trigonometrischen Rechnungen zu vollenden, sobald man nur noch nebst dem Wesen jener Funktionen die Gesetze kennt, welchen gemäß in jedem bestimmten Falle die Rechnung anzustellen ist.

Zusatz 2. Die Wissenschaft, welche auf Goniometrie beruhend, die Formeln aufstellt, welche die trigonometrischen Li-

nien in den Winkeln oder Bogen, von welchen sie die Funktionen sind, oder umgekehrt diese Bogen oder Winkel in ihren Funktionen ausgedrückt enthalten, heißt Cyklometrie (im weiteren Sinne — im engeren Kreismessung). Die nächste Anwendung dieser Wissenschaft (als Cyklotechnie) ist die Berechnung jener beständigen Zahlen oder auch der logarithmisch-trigonometrischen Funktionen, von welchen wir im vorigen Zusatze sprachen. Ein Beispiel hiezu ist die von den alten Geometern (z. B. von Archimed) versuchte Rectification der Kreislinie. Da die Cyklometrie in ihrer vollständigen und leichtesten Entwickelung nur durch den Differenzial- und Integral-Kalkul möglich wird; so können wir erst nach Darstellung dieser Rechnung das Wichtigste, was zu jener Wissenschaft gehört, anführen.

a) Vom Sinus und Cosinus.

§. 4. **Lehrsatz. Die Seiten eines jeden ebenen geradlinigen Dreieckes verhalten sich wie die in demselben Kreise beliebigen Halbmessers gezogenen Sehnen der doppelten Bogen, welche die den Seiten gegenüberstehenden Dreieckswinkel messen.**

Beweis. Man beschreibe um das Dreieck ABD (Fig. 1.) einen Kreis (Geom. §. 85. Zus.) und einen zweiten, jenem concentrischen, mit beliebigem Halbmesser. Zieht man nun aus C nach den Ecken A, B, D gerade Linien, so werden die die Durchschnittspunkte verbindenden Linien ab, bd, ad Sehnen, deren jede, wie ab, der entsprechenden Seite oder Sehne, wie AB, parallel ist, weil (da Ca = Cb und CA = CB, folglich auch Ca : CA = Cb : CB ist) CA und CB proportional geschnitten sind (Geom. §. 112. II.). Demnach ist das Perpendikel Co verlängert auch senkrecht auf AB (Geom. §. 55. Zusatz 2.), und wie die Sehne ab in o und der zugehörige Bogen in g halbirt ist, eben so ist die Sehne AB in O und der zugehörige Bogen in G halbirt (Geom. §. 84. II.). Dasselbe gilt von den andern sich entsprechenden Sehnen und Bogen.

Es ist ferner der W. adb = ½ aCb = α' = ½ ACB = α = W. ADB (Geom. §. 87. mit Zus. 1.), und auf gleiche Weise ist W. dab = W. DAB, folglich △ abd ∽ △ ABD, daher sind die

homologen Seiten proportional (Geom. §. 116. I.); es ist nämlich, wenn Ch. eine Sehne bezeichnet,

AB: BD: DA = ab: bd: da, d. i. = Ch. 2α: ch. 2β: ch. 2γ.

Zusatz 1. Also auch (nach allgem. Größenl. §. 112. Zusatz 3.)

AB: BD: DA = ½ ch. 2α: ½ ch. 2β: ½ ch. 2γ.

Man nennt aber die halbe Sehne des doppelten Bogens α, der das Maß des Winkels ½ aCb oder des W. ADB ist, den Sinus des Bogens α oder des Centriwinkels aCg oder des W. ADB selbst, folglich ist, wenn man den Sinus durch Sin und die Dreieckswinkel durch A, B, D kurz bezeichnet,

AB: BD: DA = Sin D: Sin A: Sin B, d. i. es gilt auch der Satz: „die Seiten eines jeden ebenen geradlinigen Dreieckes verhalten sich wie die Sinusse der jenen Seiten gegenüberstehenden Dreieckswinkel."

Zusatz 2. Wie W. aCg = W. ACG = α' = α (= W. d = W. D), also weder an eine absolute Länge der Schenkel des Winkels, noch an eine absolute Bogenlänge zu denken ist (Geom. §. 26. Zusätze 2, 3. mit §. 29. Zus. 3.); eben so kommt bei der trigonometrischen Linie, die unter dem Namen Sinus Funktion eines Winkels oder Bogens ist, nicht deren absolute Länge, sondern ihr Verhältniß zu dem generirenden Halbmesser des Kreises, in welchem sie sich befindet, in Betrachtung. Es ist nämlich Ca: ao = CA: AO, oder wenn man Ca durch r', CA durch r (beide als generirende Halbmesser betrachtet) und den Centriwinkel aCg = ACG durch φ bezeichnet;

$$r' : \operatorname{Sin}\varphi = r : \operatorname{Sin}\varphi, \text{ oder } \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{r'} = \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{r}, \text{ oder } \frac{ao}{r'} = \frac{AO}{r};$$

d. i. wenn sich ao zu r' verhält, wie z. B. ½ : 1 oder wie 1:2, oder wie 10:20; so verhält sich auch eben so AO zum Halbmesser r, oder das Verhältniß des Sinus eines Bogens oder Winkels zu dem Halbmesser des Kreises, in welchem sich jener Sinus befindet, ist in allen Kreisen einerlei, d. i. ein konstantes Verhältniß.

Zusatz 3. Berechnet man daher die Sinusse der Bogen oder Winkel von 0° bis Q oder R (wo Q den Quadranten

und R den rechten Winkel bezeichnet) nach einem zum Grund gelegten Halbmesser Ca oder CA, indem man nämlich diesen $= 1$, oder $= 20$ oder $= 100000$ oder $= 10000000 \ldots$ gleichen Theilen setzt; so sagt jede solche berechnete Zahl, der **wievielste** Theil der Sinus eines Bogens vom Halbmesser $= 1$ sey, oder **wieviele** gleiche Theile aus dem Halbmesser $= 100000$ dl. auf den Sinus kommen. Diese Zahlen sind demnach **konstante** Zahlen, und vertreten nun als solche die Stelle der linearen Sinusse oder halben Sehnen in der trigonometrischen Rechnung (§. 3. Zus. 2.).

Daß aber die Berechnung der Sinusse der Bogen oder Winkel nur von 0° bis Q oder R nothwendig sey, erhellt leicht: Der den Kreis halbirende Durchmesser ist die größte Sekante oder **größte** Sehne $=$ ch. $2Q =$ ch. $2R$, oder auch, wenn man ihn $= 1$ setzt, die **ganze** Sehne, daher auch der Halbmesser die **größte** halbe Sehne $=$ Sin Q $=$ Sin R, oder der **ganze** Sinus (sinus totus) $= 1$. Wie ferner z. B. die Sehne AB $=$ ch. AGB $=$ ch. AIDFB ist, eben so gehört jede Sehne eines Bogens, der $< 2Q$ ist, zugleich auch zu einem Bogen, der den vorigen zu $4Q$ oder zu 2π (der ganzen Peripherie) ergänzt. Es ist also auch jede halbe Sehne, wie AO, oder der Sinus eines Bogens α, der $< Q$ ist, zugleich auch der Sinus eines Bogens, welcher den vorigen α zu $2Q$ ergänzt, was man denn durch die Formel Sin $\alpha =$ Sin $(2Q - \alpha) =$ Sin $(2R - \alpha) =$ Sin $(\pi - \alpha)$ ausdrückt. Weil endlich nach dem Vorigen, wenn $\varphi > 2Q > 2R$ (oder ein erhabener Winkel) ist, doch Sin $\varphi <$ Sin Q $<$ Sin. tot. ist, so muß auch Sin φ einem der für Bogen oder Winkel von 0° bis R berechneten Sinusse, von den Zeichen abgesehen, gleich seyn.

Es liegt hierin zugleich der Grund, warum der Sinus und eben so jede andere trigonometrische Linie **zunächst** auf Bogen $< Q$ oder auf **spitze** Winkel bezogen wird.

Zusatz 4. Da jede halbe Sehne, wie z. B. ao $=$ Sin α oder (Fig. 2.) ID $=$ Sin $\alpha =$ Sin ICA, senkrecht ist auf den die ganze Sehne, wie den zugehörigen Bogen, halbirenden Halb- oder Durchmesser; so erklärt man auch den Sinus eines Bogens **als das Perpendikel, welches von dem einen Endpunkte dieses Bogens auf den durch dessen an-**

dern Endpunkt gehenden Halb- oder Durchmesser gefällt ist.

Zusatz 5. Es ist daher auch das Perpendikel IE auf CB oder BQ der Sinus des Bogens IB, der den Bogen α zum Quadranten ergänzt, oder der Sinus des Centriwinkels BCI, der das Complement von ICA ist; d. i. das Perpendikel IE ist der Sinus des Complements von α oder des Complements von ICA, oder (durch Contraktion) der Cosinus des Bogens α oder des W. ICA, kurz bezeichnet durch $\cos\alpha$. So wieder ursprünglich und auf Bogen $<Q$ bezogen!

Weil aber auch $IE = DC$, demnach auch $DC = \cos\alpha$ ist; so gilt auch die Erklärung: Cosinus eines Bogens ist derjenige Theil des Halbmessers, welcher zwischen dem Mittelpunkte des Kreises und dem Sinus eben jenes Bogens liegt.

Zusatz 6. Es ist also

1. $\sin\alpha = \cos(Q-\alpha)$ oder $= \cos(R-\alpha)$ und
   $\cos\alpha = \sin(Q-\alpha)$ oder $= \sin(R-\alpha)$.

So ist z. B., wenn nach der gewöhnlichen Eintheilung der Kreislinie Q oder R oder $\frac{1}{4}\pi = 90^\circ$ gesetzt wird, $\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$ und $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$; ferner $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$, was auch aus der Figur erhellt, in welcher $CD = DI$ ist, wenn der Winkel ACI oder der Bogen $\alpha = 45^\circ$ ist.

2. ist $ID^2 + DC^2 = CI^2$, d. i. $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = r^2 = 1$ (wenn man den Halbmesser $= 1$ setzt), d. i. die Summe der Quadrate des Sinus und Cosinus desselben Bogens oder Winkels α ist gleich dem Quadrate des Halbmessers oder des Sinus totus. — Daraus abgeleitete Formeln sind:

3. $\sin\alpha = \sqrt{(r^2 - \cos\alpha^2)} = \sqrt{(1-\cos\alpha^2)}$ und
   $\cos\alpha = \sqrt{(r^2 - \sin\alpha^2)} = \sqrt{(1-\sin\alpha^2)}$ *)

Für $\alpha = 45^\circ$ ist $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071068\ldots$

*) Wir bemerken hiebei ein für allemal, daß durch den in $\mathrm{Sin}\,\alpha^m$ gesetzten Exponenten die mte Potenz der trigonometrischen Funktion selbst, nicht des Bogens oder Winkels α, bezeichnet werde, daß demnach die von anderen Mathematikern gewählte Bezeichnung $\mathrm{Sin}^m\alpha$, oder $(\mathrm{Sin}\,\alpha)^m$ mit $\mathrm{Sin}\,\alpha^m$ identisch sey.

Anmerkung. Obgleich die Anwendung der ganzen Sehnen die Verdoppelung des gegebenen Dreieckswinkels und die Halbirung des zunächst gefundenen Winkels nothwendig machte; so waren doch die Sehnen und die berechneten Sehnentafeln, wie eine solche im Almageſt des Ptolomäus enthalten iſt, das erſte Hülfsmittel, deſſen ſich die älteſten Mathematiker zur Reſolution der Dreiecke bedienten. So leicht nun auch der Uebergang zu den halben Sehnen oder den Sinuſſen der Bogen oder Winkel ſelbſt — an und für ſich war; ſo haben wir doch, wie es ſcheint, ihre Einführung erſt den arabiſchen Mathematikern zu verdanken. Dieſe nannten die halbe Sehne Dſcheib (sectio); da dieſes arabiſche Wort auch die Bedeutung „sinus vestis“ hat, die den abendländiſchen Ueberſetzern der arabiſchen Schriften allein geläufig war, ſo kam das Wort Sinus in die Mathematik.

§. 5. Das Wachſen und Abnehmen des Sinus und Coſinus mit den zugehörigen Zeichen, und zwar

1) im I. Quadranten. — Man nehme den Punkt A oder 0° als Anfangspunkt der Kreislinie, ſo daß folglich $\sin A = \sin 0^\circ = 0$ iſt; ferner AB als I., BH als II., HQ als III. und QA als IV. Quadranten: ſo heißen I. und II. die oberen und III. und IV. die unteren Quadranten.

Stellt man ſich nun in I. ein Perpendikel, wie ID, über AB von A gegen C mit beſtändigem Parallelismus ſo bewegt vor, daß ſeine obere Grenze immer ein Punkt der Kreislinie iſt; ſo iſt klar, daß beim Wachſen des Bogens α oder zugehörigen Centriwinkels von 0° an bis zu Q oder R auch das Perpendikel wachſe, bis es für $\alpha = Q$ mit dem Halbmeſſer BC ſelbſt zuſammenfalle; d. i. daß im I. Quadranten mit dem Wachſen der Bogen auch die Sinuſſe zunehmen, und zwar daß $\sin Q$ oder $\sin R = r = \text{sin. tot.} = 1$, d. i. ein Maximum werde (§. 4. Zuſ. 3.). — Weil aber die Zunahme der Sinuſſe in I. nicht im genauen Verhältniſſe zur Zunahme der Bogen oder Winkel ſteht, indem die Sinuſſe nicht dieſen, ſondern den Seiten des Dreiecks proportional ſind (§. 4. Zuſ. 1.); ſo darf man nicht ſchließen, daß z. B. $\sin 40^\circ$ noch einmal ſo groß ſey, als $\sin 20^\circ$. Eben ſo wenig iſt darum, weil $\sin R = r = 1$ iſt, $\sin \frac{1}{2} R$ oder $\sin 45^\circ$ (wenn $R = 90^\circ$ geſetzt wird) $= \frac{1}{2} r = \frac{1}{2}$. Vielmehr weiß

man, daß $\sin 30° = \frac{1}{2} r$ sey, weil (nach Geom. §. 94. Zuſ. 2.) die Sehne des Bogens von 60° = dem Halbmeſſer r iſt.

Es erhellt ferner, daß beim Wachſen des Sinus in I. der Coſinus abnimmt, indem der Theil CD immer kleiner wird, je größer ID wird, oder je mehr ſich das Perpendikel ID dem Halbmeſſer BC nähert. Man kann auch ſagen: je größer der Bogen AI wird, deſto kleiner wird deſſen Complement IB, folglich auch der Sinus IE dieſes Complementbogens, d. i. der Coſinus von AI. Demnach für $\alpha = Q = R$ verſchwindet der Coſinus oder wird ein Minimum. Wie daher $\cos Q = o$, ſo iſt $\cos o° = r = 1$, weil nach §. 4. Zuſ. 6. $\cos \alpha = \sin (Q - \alpha)$, demnach wenn $\alpha = o°$ geſetzt wird, $\cos o° = \sin Q$ iſt.

2) im II. Quadranten. — Durch die Verlängerung des Perpendikels IE wird der Bogen $IA = FH = \alpha$ (Geom. §. 87. Zuſ. 5.) und das Perpendikel FK (vermöge der Erklär. §. 4. Zuſ. 4.) der Sinus des Bogens ABF, demnach KC der Cosinus deſſelben Bogens. Da nun $FK < BC < \sin Q$, aber $KC > \cos Q$ iſt, ſo erhellt, daß die Sinuſſe von Bogen $> Q$ aber $< 2Q$, d. i. von Bogen, die in den II. Quadranten reichen (wie ABF), wieder abnehmen, daß aber die Coſinuſſe derſelben Bogen wieder zunehmen; jene von ihrem Maximum $= r$ an, dieſe von ihrem Minimum $= o$ an. Eben ſo iſt klar, daß, wenn der Bogen ABF bis zur halben Peripherie wächst, der zugehörige Sinus mit dem Punkte H zuſammenfalle oder verſchwinde, d. i. daß $\sin \pi$ oder $\sin 2Q$ oder $\sin 2R = o$ ſey; daß hingegen in eben dieſem Falle der Coſinus (vermöge ſeiner Zunahme) $= CH = r = \text{sin. tot.}$ werde, d. i. $\cos 2Q$ oder $\cos \pi$ ein Maximum erreiche, wie $\sin Q$.

Da aber jeder Coſinus im II. Quadranten, d. i. von Bogen $> Q$ als Größe betrachtet werden muß, die für $\alpha = Q$ durch den Nullpunkt durchging und nun in II. eine entgegengeſetzte Lage (wie CK in Beziehung auf CD, oder wie CH in Beziehung auf CA) erhielt; ſo muß jeder Coſinus in II., um dieſe Entgegenſetzung auszudrücken, das Zeichen — bekommen, indem die Betrachtung der Coſinuſſe in I. keinen Grund darbot, denſelben ein arithmetiſches Zeichen vorzuſetzen, oder (was daſſelbe iſt) die Coſinuſſe in I. mit dem Zeichen + geſetzt gedacht werden können (vergl. allgem. Größenl. S. 22. §. 10.).

Letzteres gilt, wie für die Cosinusse, so auch für die Sinusse sowohl in I. als II., und für jede trigonometrische Funktion überhaupt, in wiefern man sie im I. Quadranten als eine erst entsprungene Größe betrachtet; d. i. jeder Sinus in den oberen Quadranten und jede trigonometrische Funktion im I. Quadranten ist ohne Zeichen, oder wird mit dem Zeichen + (wegen ihrer Beziehung auf dieselben Funktionen in den übrigen Quadranten) gesetzt.

Da demnach DC (= + cos α) = — CK (= — cos ABF = + cos (2Q - FH) = — cos (π - α)) ist; so hat man den allgemeinen Ausdruck:

+ cos α = — cos (π - α) oder = — cos (2R - α). Aber
+ DC auch = + IE = + sin (R - α), daher ist auch
+ cos α = — cos (π - α) = + sin (R - α).

Endlich ist cos 2Q oder cos 2R = — r = — 1.

5) im III. und IV. Quadranten. — Da die bei H durch Null durchgegangenen Sinusse von Bogen, die von A aus in den III. Quadranten fallen, wieder wachsen und eine entgegengesetzte Lage hinsichtlich der Sinusse in II. erhalten; so gilt von ihnen, was von den Cosinussen im II. Quadranten galt, daß nämlich die Sinusse im III., d. i. für Bogen oder Winkel > 2Q oder > 2R das Zeichen — bekommen. So ist — LK (= + KF) der Sinus von ABHL (von 2Q + HL) oder von LH (welcher Bogen = GA = α ist); d. i. man hat rückwärts + sin α = — sin (2Q + α) = + sin (2Q - α).

Bei dem Wachsen der Sinusse in III. fällt der Sinus des Bogens ABHQ (= 3Q = 3R) wieder mit dem Halbmesser CQ, wie in I. mit CB, zusammen, ist also wieder ein Maximum, aber jetzt = — r = — 1. Ueber dieses Maximum hinaus nehmen die Sinusse in IV. wie vorhin in II. wieder ab, behalten aber, als nicht wiederholt durch Null durchgegangene Größen, ihr voriges Zeichen —. So ist — GD (= + DI) der Sinus des Bogens ABHQG (= 4Q - α), d. i. auch + sin α = — sin (4Q - α) und sin 4Q oder sin 2π = o.

Da der dem Sinus (LK) des Bogens 2Q + α entsprechende Cosinus KC nun wieder < CH, d. i. kleiner, als das in II.

erreichte Maximum (= — r) ist; so sieht man, daß die Cosinusse im III. Quadranten wieder abnehmen, aber ihr voriges Zeichen — beibehalten, indem sie noch nicht wieder durch den Nullpunkt durchgegangen sind. Es ist also

$$-CK = -\cos(2Q+\alpha) = -\cos(2Q-\alpha) = +CD = +\cos\alpha.$$

Da auch CK = EF, aber EF = sin (FH + HQ) = sin (Q + α), wie EC = — cos (Q + α) ist; so hat man auch

$$+\cos\alpha = -\cos(2Q+\alpha) = -\cos(2Q-\alpha) = +\sin(Q+\alpha),$$

und weil KL = KF = EC, so ist auch

$$+\sin\alpha = -\sin(2Q+\alpha) = +\sin(2Q-\alpha) = -\cos(Q+\alpha).$$

Bei der beständigen Abnahme des Cosinus in III. verschwindet derselbe endlich in C, d. i. cos 3Q = o wird wieder ein Minimum, wenn sin 3Q sein Maximum = — r erreicht. Es erhalten daher die nun in IV. wieder wachsenden, aber durch Null durchgegangenen Cosinusse, wie CD, von Bogen, die in den IV. Quadranten reichen, das ihrem vorigen Zeichen — in III. entgegengesetzte Zeichen +. So ist + CD = + cos (4Q − α) = + cos α und cos 4Q oder cos 2π = + r.

Es haben also die Sinusse, die in I. und III. zu- und in II. und IV. abnehmen, in den oberen Quadranten das Zeichen + und in den unteren das Zeichen —. Allein die Cosinusse, die sich in ihrem Wachsen und Abnehmen umgekehrt verhalten, wie die Sinusse, sind in I. und IV. +, in II. und III. —.

Zusatz 1. Stellt man sich die Peripherie verdoppelt, verdreifacht, ... vernfacht vor, so daß der vorher I. Quadrant nun der V.; der vorher II. nun der VI. .... wird; so erhellt, daß die bei A oder für 4Q durch Null gegangenen Sinusse in V. nun wieder das Zeichen + bekommen, die Cosinusse aber, die für 4Q nur das Maximum = + r erreichten, ihr voriges Zeichen + in V. beibehalten, daß demnach dieselbe Zeichenfolge für diese in V., VI.... sich wiederholenden trigonometrischen Funktionen Statt findet, wie in den 4 ersten Quadranten, was man so darstellt:

1) Die Sinusse haben das Zeichen im Quadranten

+	1 . 2	5 . 6	9 . 10	13 . 14	....
—	3 . 4	7 . 8	11 . 12	15 . 16	....

2) Die Cosinusse haben das Zeichen im Quadranten

+	1 . 4	5 . 8	9 . 12	13 . 16	....
—	2 . 3	6 . 7	10 . 11	14 . 15	....

Hieraus sind folgende Schemate verständlich. Wenn nämlich x, wie vorhin α, einen Bogen oder Winkel $< Q$ oder $< R$ und π die halbe Peripherie ($= 2Q = 2R$) bezeichnet; so gehören

3) zu den Bogen oder Winkeln

$+\sin x$	x	$2\pi+x$	$4\pi+x$	$\ldots 2n\pi+x\ldots$
$-\sin x$	$\pi+x$	$3\pi+x$	$5\pi+x$	$\ldots (2n+1)\pi+x\ldots$
$+\sin x$	$\pi-x$	$3\pi-x$	$5\pi-x$	$\ldots (2n+1)\pi-x\ldots$
$-\sin x$	$2\pi-x$	$4\pi-x$	$6\pi-x$	$\ldots 2n\pi-x\ldots$

4) zu den Bogen oder Winkeln

$+\cos x$	x	$2\pi+x$	$4\pi+x$	$\ldots 2n\pi+x\ldots$
$-\cos x$	$\pi-x$	$3\pi-x$	$5\pi-x$	$\ldots (2n+1)\pi-x\ldots$
$+\cos x$	$2\pi-x$	$4\pi-x$	$6\pi-x$	$\ldots 2n\pi-x\ldots$
$-\cos x$	$\pi+x$	$3\pi+x$	$5\pi+x$	$\ldots (2n+1)\pi+x\ldots$

Derselbe + oder — Sinus, + oder — Cosinus gehört also zu unzählig vielen Bogen oder Winkeln, und zwar sind

a) die Sinusse aller Bogen, deren Unterschied ein gerades Vielfache von π, oder deren Summe ein ungerades Vielfache von π ist, gleich und haben dasselbe Zeichen; aber im entgegengesetzten Falle sind die Sinusse zwar dieselben, haben aber verschiedene Zeichen.

b) die Cosinusse aller Bogen, deren Unterschied oder Summe ein gerades Vielfache von π ist, sind gleich und haben einerlei Zeichen; ist aber der Unterschied ein ungerades Vielfache von π, so sind die Cosinusse zwar gleich, haben aber verschiedene Zeichen.

Zusatz 2. Da diese Funktionen, in wiefern sie Bogen $< 4Q$ angehören, zur häufigsten Anwendung kommen, so ist noch folgendes Schema, deren Inhalt bereits erklärt ist, merkwürdig:

$$\begin{aligned}\sin x &= +\sin(\pi-x) = +\cos(Q-x)\\ &= -\sin(\pi+x) = -\cos(Q+x)\\ &= -\sin(2\pi-x) = -\cos(3Q-x)\\ &= +\cos(3Q+x).\end{aligned}$$

$$\cos x = -\cos(\pi - x) = +\sin(Q - x)$$
$$= -\cos(\pi + x) = +\sin(Q + x)$$
$$= +\cos(2\pi - x) = -\sin(3Q - x)$$
$$= -\sin(3Q + x).$$

β) Vom Querſinus und Quercoſinus ihren Größeänderungen und Zeichen.

§. 6. 1. Erklärungen. Querſinus (sagitta der Alten, sinus versus, bezeichnet durch sin. v.) iſt der zwiſchen dem Anfangspunkte eines Bogens α und dem Sinus deſſelben Bogens liegende Theil des Halb- oder Durchmeſſers. Der Querſinus des Complements von α heißt Quercoſinus von α (cosinus versus, durch cos. v. bezeichnet).

So iſt, zunächſt wieder auf Bogen $< Q$, wie $AI = \alpha$, bezogen, AD der Querſinus von α oder vom Winkel ACI, und BE der Quercoſinus von α, indem IE der Sinus von IB, daher BE der Querſinus des Complements von α iſt.

Da $AD = AC - DC$ und $BE = BC - EC = BC - ID$ iſt, ſo hat man

1) $\text{sin. v.}\,\alpha = r - \cos\alpha$ oder $= 1 - \cos\alpha$ und

2) $\text{cos. v.}\,\alpha = r - \sin\alpha$ oder $= 1 - \sin\alpha$.

Aus dieſen urſprünglichen Formeln folgt

2. die Kenntniß ihrer Größeänderungen in den verſchiedenen Quadranten. Setzt man nämlich nach und nach $\alpha = 0^\circ; = Q; = 2Q; \ldots$ ſo hat man durch Subſtitution in 1) und 2) und vermöge §. 5. $\text{sin. v.}\,0^\circ = 0$; sin. v. $Q = 1$; sin. v. $2Q = 2; \ldots$. Ferner $\text{cos. v.}\,0^\circ = 1$; cos. v. $Q = 0$; cos. v. $2Q = 1; \ldots$ d. i. der Querſinus wächst von 0 an bis zum Maximum = dem doppelten Halbmeſſer, und der Quercoſinus verändert ſich, wie der Coſinus, behält aber

3) das Zeichen +, wie der Querſinus, weil die Differenz $1 - \sin\alpha$, wie $1 - \cos\alpha$ nicht — werden kann.

γ) Von der Tangente und Secante; Cotangente und Coſecante, ihren Größeänderungen und Zeichen.

§. 7. 1. Erklärungen. Tangente eines Bogens α iſt das auf dem durch den Anfangspunkt A dieſes

Bogens gehenden Halb- oder Durchmesser in eben diesem Punkte A errichtete Perpendikel, welches von dem durch den andern Endpunkt des Bogens α fortgezogenen Halbmesser begrenzt wird. Dieser verlängerte Halbmesser heißt Secante desselben Bogens α. So ist vom Bogen AI oder dem Centriwinkel ACI das Perpendikel AT die Tangente (durch tang α bezeichnet) und der verlängerte Halbmesser CT die Secante (durch sec α bezeichnet).

Die Tangente BM des Complementbogens BI heißt die Cotangente von AI (cot α), so wie ihre Secante CM die Cosecante von AI (cosec α).

Die ursprünglichen Formeln dieser 4 trigonometrischen Funktionen werden leicht auf folgende Art gefunden: Wegen $\triangle$ ATC $\sim$ $\triangle$ DIC ist

$$AT : DI = AC : DC, \text{ und } CT : CI = CA : CD,$$

d. i. $\text{tang}\,\alpha : \sin\alpha = r : \cos\alpha$, und $\sec\alpha : r = r : \cos\alpha$,

daher $\text{tang}\,\alpha = \frac{r \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (für $r = 1$),

und $\sec\alpha = \frac{r^2}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$ (für $r = 1$).

Ferner wegen $\triangle$ BMC $\sim$ $\triangle$ TAC ist

$$BM : CA = BC : TA, \text{ d. i. } \cot\alpha : r = r : \text{tang}\,a,$$

daher $\cot\alpha = \frac{r^2}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{1}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{r \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Und wegen $\triangle$ BMC $\sim$ $\triangle$ CDI ist

$$CM : CI = BC : ID, \text{ d. i. } \text{cosec}\,\alpha : r = r : \sin\alpha,$$

also $\text{cosec}\,\alpha = \frac{r^2}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$.

2. Durch diese Formeln sind die genannten Funktionen als Quotienten dargestellt, ihre Zeichen folgen demnach den bekannten Gesetzen der Quotienzeichen überhaupt. Demnach hat in allen Quadranten die Secante das für jeden Fall aus §. 5. bekannte Zeichen des Cosinus und die Cosecante das des Sinus, indem der generirende Halbmesser r oder 1, oder dessen Quadrat immer das Zeichen + hat. Eben so folgt die Cotangente hinsichtlich ihres Zeichens in allen Quadranten dem

Zeichen

Zeichen der Tangente, die Zeichen aber der Tangente selbst richten sich nach den Zeichen des Sinus und Cosinus desselben Bogens oder Winkels. Daher ist für Bogen, fallend in den I. Quadr. $\frac{+\sin}{+\cos} = +\text{tang}$; in den II. $\frac{+\sin}{-\cos} = -\text{tang}$; in den III. $\frac{-\sin}{-\cos} = +\text{tang}$ und in den IV. $\frac{-\sin}{+\cos} = -\text{tang}$, u. s. w.

5. In Absicht auf das Wachsen und Abnehmen dieser betrachteten Funktionen, als Quotienten, kommen hier folgende 2 Gesetze in Anwendung: a) bei konstantem Dividende wird der Quotient **größer**, wenn der Divisor abnimmt, dagegen **kleiner** beim Wachsen des Divisors; folglich **wächst** die Secante, wenn der Cosinus **abnimmt** und **umgekehrt**, und die Cosecante **nimmt ab**, wenn der Sinus **wächst** und **umgekehrt**. b) Wenn aber Dividend und Divisor im entgegengesetzten Sinne veränderlich sind, so wird der Quotient um so größer, je mehr der Dividend zu- und der Divisor abnimmt, und **umgekehrt**. Bezeichnet man das Wachsen der Funktion durch $>$ und ihre Abnahme durch $<$, so hat man in I. $\frac{+\sin >}{+\cos <} = +\text{tang} >$ und für $\alpha = Q$ ist $\frac{\sin Q}{\cos Q} = \frac{1}{0} = \infty$. In II. ist $\frac{+\sin <}{-\cos >} = -\text{tang} <$, und für $\alpha = \pi$ hat man $\text{tang}\,\pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{1} = 0$; u. s. w.

Zusatz 1. Setzt man im $\triangle$ AC'Γ den Centriwinkel oder Bogen $\alpha = 45^\circ$, so ist, weil $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ (§. 4. Zus. 6. 1.), 1. $\text{tang}\,45^\circ = \cot 45^\circ$; 2. $\text{tang}\,45^\circ$ (= AC) $= r = 1$; 3. $(\sec 45^\circ)^2$ (= $AT'^2 + AC^2$) $= 2r^2 = 2$ (für $r = 1$), oder $\sec 45^\circ = r\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Zusatz 2. Die angeführten, ursprünglichen Formeln der 4 betrachteten trigonometrischen Funktionen zeigen klar, daß sie, wie Sinus und Cosinus, zu unendlich vielen Bogen gehören. In dieser Hinsicht sind in Beziehung auf Tangente und Cotangente (analog den Gleichungen im §. 5. Zus. 2.) folgende formulariſche Werthe sehr merkwürdig:

$$\begin{aligned}
\text{tang}\, x &= -\text{tang}\,(\pi - x) = +\cot(Q - x)\\
&= +\text{tang}\,(\pi + x) = -\cot(Q + x)\\
&= -\text{tang}\,(2\pi - x) = +\cot(3Q - x)\\
&\qquad\qquad = -\cot(3Q + x).\\
\cot x &= -\cot(\pi - x) = +\text{tang}\,(Q - x)\\
&= +\cot(\pi + x) = -\text{tang}\,(Q + x)\\
&= -\cot(2\pi - x) = +\text{tang}\,(3Q - x)\\
&\qquad\qquad = -\text{tang}\,(3Q + x).
\end{aligned}$$

Zusatz 5. Die Veränderungen aller trigonometrischen Linien in den oberen Quadranten enthält das folgende Schema, in welchem die Zeichen $>$ und $<$ wieder die Bedeutung des Wachsens und Abnehmens der treffenden Funktion haben:

Funktion von α	$\alpha = 0°$	$\alpha >$ im I. Quadr.	$\alpha = Q$	$\alpha >$ im II. Quadr.	$\alpha = \pi$
Sinus	0 Min.	$> +$	$+r$ Max.	$< +$	0 Min.
Cosinus	$+r$ Max.	$< +$	0 Min.	$> -$	$-r$ Max.
Quersin.	0 Min.	$> +$	$+r$	$> +$	$+2r$ Max.
Quercos.	$+r$ Max.	$< +$	0 Min.	$> +$	$+r$ Max.
Tangente	0 Min.	$> +$	∞	$< -$	0 Min.
Cotang.	∞	$< +$	0 Min.	$> -$	∞
Secante	$+r$ Min.	$> +$	∞	$< -$	$-r$ Min.
Cosec.	∞	$< +$	$+r$ Min.	$> +$	∞

Anmerkung. Man wird nicht übersehen, daß, wie die früher aufgestellten Formeln zeigen, die letzten 6 trigonometrischen Linien im generirenden Halbmesser und im Sinus und Cosinus ausgedrückt seyen; daß folglich der Sinus als die Fundamental-Funktion betrachtet werden müsse. Seine, nach beliebig zum Grunde gelegtem Halbmesser vollzogene, Berechnung für alle Bogen von 0° bis Q macht schon allein die Berechnung der übrigen Funktionen möglich, und die für diese gefundnen Zahlen sind dann ebenfalls konstante Zahlen, welcher, oder deren Logarithmen, sich der Trigonometer bei Resolution der Dreiecke bedient.

Zum Behufe jener Berechnung dienen auch folgende, noch in anderer Hinsicht sehr fruchtbare, Formeln:

§. 8. Lehrsatz. Den Halbmesser $r = 1$ gesetzt, gelten für den Sinus und Cosinus der Summe oder Differenz zweier Bogen die Formeln:

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha$;
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Beweis. Im Quadranten ABC (Fig. 3.) sey $BE = \alpha$, $ED = \beta$. Man mache $EF = ED$ und ziehe die Sehne DF, so halbirt diese der Halbmesser CE und ist auf DF senkrecht (Geom. §. 84.), folglich ist $DI = \sin\beta$ und $CI = \cos\beta$. Zieht man die Perpendikel FG, EH, IK, DL; so ist $BH = \sin\alpha$ und $HC = \cos\alpha$; $FG = \sin BF = \sin(BE - EF$ oder $- ED) = \sin(\alpha - \beta)$ und $CG = \cos(\alpha - \beta)$; $DL = \sin(\alpha + \beta)$ und $CL = \cos(\alpha + \beta)$.

Zieht man ferner FN, IM parallel BC, so ist (nach Geom. §. 112.), wie $FI = ID$ auch $FX = XN$ und $DM = MN$, daher auch $FG = IK - IX = IK - MN = IK - DM = \sin(\alpha - \beta)$, und $DL = IK + DM = \sin(\alpha + \beta)$.

Nun ist wegen $\triangle CIK \sim \triangle CEH$

$IK : EH = CI : CE$, also $IK = \frac{EH \cdot CI}{r} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{r}$.

Auch ist wegen $\triangle FIo \sim \triangle XIo$ $m = n = E$, aber auch $s = m$, daher $s = E$ und $\triangle DIM \sim \triangle EHC$, folglich

$DM : DI = CH : CE$, also $DM = \frac{DI \cdot CH}{r} = \frac{\sin\beta \cdot \cos\alpha}{r}$.

Man hat also

1. $IK \pm DM = \sin(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha}{r}$.

Eben so ist $\cos(\alpha + \beta) = CL = CK - KL = CK - IM$, und $\cos(\alpha - \beta) = CG = CK + KG = CK + IM$.

Nun ist aus demselben Grunde, wie vorhin:

$CK : CH = CI : CE$ und $IM : DI = EH : CE$,

d. i. $CK = \frac{\cos\beta \cdot \cos\alpha}{r}$ und $IM = \frac{\sin\beta \cdot \sin\alpha}{r}$, also

2. $CK \pm IM = \cos(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta}{r}$.

Anmerkungen.

1. Die für den Halbmesser $r = 1$ berechneten Sinusse, Tangenten, ... heißen die natürlichen, kurz bezeichnet durch $\sin \alpha$, $\tang \alpha$, ... oder ausdrücklich durch sin. nat. α, ...; dieselben Funktionen, für irgend einen andern Halbmesser z. B. $r = 1000000$ ... berechnet, heißen künstliche, oder Tafelsinusse, ... bezeichnet durch sin. tab. α, ...

2. Nach §. 4. Zusatz 2. ist

$$\frac{\text{sin. nat. } \alpha}{1} = \frac{\text{sin. tab. } \alpha}{r}, \text{ daher } r.\text{ sin. nat. } \alpha = \text{sin. tab. } \alpha.$$

Dieses zeigt, wie man mittelst einer in dem einen Systeme schon berechneten trigonometrischen Funktion eben diese, als zu einem andern Systeme gehörig, finden könne.

3. Der Trigonometer bedient sich gewöhnlich der Logarithmen der künstlichen trigonometrischen Funktionen, oder der sogenannten logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, welche so eingerichtet sind, daß $\log r = 10$, r. also $= 10^{10}$ ist. Daher ist (nach 2.) $\log \text{sin. nat. } \alpha = \log \text{ sin. tab. } \alpha - 10$; u. s. w. D. i. wenn man von dem aus jenen Tafeln genommenen Logarithmus irgend einer Funktion des Bogens α die Zahl 10 abzieht; so hat man den Logar der natürlichen Funktion desselben Bogens, und daher diese natürliche Funktion selbst, wenn man zu jenem Logar. die entsprechende Zahl (mittelst der Tafel der Logar. für die natürlichen Zahlen) sucht.

Umgekehrt leitet man nach der Formel:

$$\text{sin. tab. } \alpha = r.\text{ sin. nat. } \alpha \text{ oder}$$
$$\log \text{sin. tab. } \alpha = 10 + \log \text{ sin. nat. } \alpha$$

aus der bekannten natürlichen Funktion und ihren aufgesuchten Logar., den Logar. der künstlichen Funktion ab.

4. Mayer bedient sich in seiner praktischen Geometrie öfters der trigonometrischen Funktionen für den Halbmesser $r = 10^7$. Daher erhält man diese (die wir durch sin. M., tang. M. ... bezeichnen wollen), indem man die natürlichen Funktionen, in wiefern sie, wie gewöhnlich, mit 7 Decimalstellen berechnet sind, als ganze Zahlen nimmt; denn sin. M. α

$= 10^7 \cdot$ sin. nat. α (nach 2.) So ist z. B. sin. nat. $18^\circ =$ 0,3090170, daher sin. M. $18^\circ = 3090170$, und umgekehrt $\frac{3090170}{10^7} = 0{,}309\ldots =$ sin. nat. 18°.

Hat man aber keine Tafel der natürlichen Funktionen zur Hand, so setzt man: log sin. M. $\alpha = 7 +$ log sin. nat. α, und (weil nach 3. log sin. nat. $\alpha =$ log sin. tab. $\alpha - 10$) log sin. M. $\alpha =$ log sin. tab. $\alpha - 3$. So ist log sin. tab. $18^\circ =$ 9,4899824, daher log sin. M. $18^\circ = 6{,}489\ldots$, folglich, da diesem Logar. die Zahl 3090170 entspricht, ist sin. M. $18^\circ =$ eben dieser Zahl.

5. Um für die Fälle, in welchen der Bogen oder Winkel α, dessen Sin. oder Tang. &c. oder Log. Sin. ... in den Tafeln aufgesucht werden soll, größer Q oder $> 90^\circ$ gegeben ist, die zugehörigen trigonometrischen Funktionen leicht und sicher zu finden, dienen die oben im §. 5. Zus. 2. und §. 7. Zus. 2. dargestellten Formeln. Die Vergleichung derselben giebt die Vorschrift: Man ziehe vom gegebenen Winkel α so oft 90° oder Q ab, wie oft es möglich ist, und suche dann zu dem Reste x, der nun ein spitzer Winkel ist, *entweder* die *verlangte* trigonometrische Funktion, *oder* die Funktion des *Complementwinkels* in den Tafeln, je nachdem man nämlich *entweder* 2Q (oder 180°), *oder* nur Q oder 3Q (d. i. nur 90° oder 270°) von α abgezogen hat. So wird z. B.

statt	sin	129°	30′	6″	gesucht	cos	30°	30′	6″.
—	cos	230	45	12	— —	cos	50	45	12.
—	tang	338	15	7	— —	cot	68	15	7.
—	cot	140	12	25	— —	tang	50	12	25.

Es versteht sich hiebei von selbst, daß der auf diese Weise gefundnen Zahl das Zeichen beigesetzt werden muß, welches der trigonometrischen Funktion des gegebenen stumpfen oder erhabenen Winkels zukommt.

2) Zusammenstellung der vorzüglichsten goniometrischen Formeln für r = 1.

Erstens. Formeln der trigonometrischen Funktionen ganzer Winkel oder Bogen.

§. 9. a. Für den Sinus.

nr. 1. $\sin\alpha = \sqrt{(1-\cos\alpha^2)} = \sqrt{[(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)]}$ (§. 4. Zusatz 6. 3.).

2. . . . $= \cos\alpha \cdot \tan\alpha$ (§. 7. 1.). — Nach Fig. 2. ist ID : CI = AT : CT, daher

3. . . . $= \frac{\tan\alpha}{\sec\alpha}$, oder, statt CT gesetzt $\sqrt{(AC^2+AT^2)}$,

4. . . . $= \frac{\tan\alpha}{\sqrt{(1+\tan\alpha^2)}}$, und, statt AT gesetzt $\sqrt{(CT^2-AC^2)}$,

5. . . . $= \frac{\sqrt{(\sec\alpha^2-1)}}{\sec\alpha}$.

6. . . . $= \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$ (§. 7. 1.). Aber $\operatorname{cosec}\alpha = CM = \sqrt{(BM^2+BC^2)}$, daher

7. . . . $= \frac{1}{\sqrt{(1+\cot\alpha^2)}}$.

8. . . . $= \frac{2 \cdot \tan\frac{1}{2}\alpha}{1+\tan\frac{1}{2}\alpha^2}$ (nr. 150.) $= \frac{2 \cdot \cot\frac{1}{2}\alpha}{1+\cot\frac{1}{2}\alpha^2}$, weil $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$ (§. 7. 1.).

9. . . . $= \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$ (nr. 40.) $= \frac{\tan\alpha}{\sqrt{(1+\tan\alpha^2)}}$ $= \frac{1}{\sqrt{(1+\cot\alpha^2)}}$ (nr. 154.).

10. . . . $= 2\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha$ (nr. 146. 1)).

Zusatz. In den ähnlichen Dreiecken AID, DIH (Fig. 2.) ist

ID : AD = DH : ID, aber DH = 2r − AD, daher auch

$\sin\alpha = \sqrt{[\text{sin. v.}\,\alpha \cdot (2-\text{sin. v.}\,\alpha)]}$.

§. 10. b. Für den Cosinus.

nr. 11. $\cos\alpha = \sqrt{(1-\sin\alpha^2)} = \sqrt{[(1+\sin\alpha)\,(1-\sin\alpha)]}$ (§. 4. Zusatz 6.)

12. $\ldots = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}$ (nr. 2.).

13. $\ldots = \frac{1}{\sec\alpha}$ (§. 7. 1.) $= \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}\alpha^2)}}$ (nr. 4.)
$= \frac{\cot\alpha}{\sqrt{(1+\cot\alpha^2)}}$ (wie in nr. 8.) — Wegen CD : CI = BM : CM (in Fig. 2.) ist

14. $\ldots = \frac{\cot\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{\sqrt{(\operatorname{cosec}\alpha^2-1)}}{\operatorname{cosec}\alpha}$ (weil BM $= \sqrt{(CM^2-BC^2)}$).

15. $\ldots = \frac{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha^2}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha^2-1}{\cot\frac{1}{2}\alpha^2+1}$ (nr. 154.).

16. $\ldots = 1-2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$ (nr. 40.) $= 2\cos\frac{1}{2}\alpha^2-1$ (nr. 43.).

17. $\ldots = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$ (nr. 41.) $= \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$ (nr. 146. 2)).

Zusatz. Will man wieder den cos IE im cos. v. BE ausdrücken; so findet man, wie oben (§. 9. Zus.), indem man sich BI und IQ gezogen denkt,

$$\cos\alpha = \sqrt{[\text{cos. v.}\,\alpha \,.\, (2-\text{cos. v.}\,\alpha)]}.$$

§. 11. c. Für die Tangente.

nr. 18. $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (§. 7.) $= \frac{\sin\alpha}{\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}}$ (nr. 11.).
$= \frac{\sqrt{(1-\cos\alpha^2)}}{\cos\alpha}$ (nr. 1.).

19. $\ldots = \frac{1}{\cot\alpha}$ (§. 7. 1.) $= \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{cosec}\alpha^2-1)}}$ (nr. 14.).

20. $\ldots = \sqrt{(\sec\alpha^2-1)}$, da $AT = \sqrt{(CT^2-AC^2)}$.

21. $\ldots = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$ (nr. 18. 9. 17.)

22. $\ldots = \frac{2\,.\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha^2}$ (nr. 18. 8. 15.) $= \frac{2\,.\cot\frac{1}{2}\alpha}{\cot\frac{1}{2}\alpha^2-1}$.

nr. 23. $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ (nr. 156. 1)).

24. . . . $= \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ (nr. 156. 2) 19.).

§. 12. d. Für die Cotangente.

nr. 25. $\cot\alpha = \frac{1}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (§. 7.) $= \frac{\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}}{\sin\alpha}$ (nr. 11.)

$= \frac{\cos\alpha}{\sqrt{(1-\cos\alpha^2)}}$ (nr. 1.)

26. . . . $= \sqrt{(\text{cosec}\,\alpha^2-1)}$ (nr. 14.)

$= \frac{1}{\sqrt{(\sec\alpha^2-1)}}$ (nr. 19.) — Vermöge nr. 25. hat man ferner nach nr. 21—24.

27. . . . $= \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}} = \frac{1-\text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha^2}{2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha^2-1}{2\cot\frac{1}{2}\alpha}$.

28. . . . $= \frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

29. $\text{tang}\,\alpha \,.\, \cot\alpha = 1$.

§. 13. e. f. Für die Secante und Cosecante.

nr. 30. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ (§. 7.) $= \frac{1}{\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}}$ (nr. 11.).

Aus dem rechtw. Dreiecke ACT ist

31. . . . $= \sqrt{(1+\text{tang}\,\alpha^2)}$. — Wegen $\triangle$ ACT ∞ $\triangle$ BCM ist CT : AC = CM : BM, daher

32. . . . $= \frac{\sqrt{(1+\cot\alpha^2)}}{\cot\alpha}$, indem man für CM wie in nr. 6. substituirt.

33. $\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ (§. 7.) $= \frac{1}{\sqrt{(1-\cos\alpha^2)}}$ (nr. 1.).

34. . . . $= \sqrt{(1+\cot\alpha^2)}$, wie zu nr. 32. bemerkt ist. In den vorigen ähnlichen $\triangle\triangle$ ist auch CM : CT = BC : AT, daher, wenn man für CT wie in nr. 3. substituirt.

35. . . . $= \frac{\sqrt{(1+\text{tang}\,\alpha^2)}}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{(\sec\alpha^2-1)}}$ (nr. 20.)

§. 13. g. h. Für den Quersinus und Quercosinus.

nr. 36. sin. v. $\alpha = 1 - \cos\alpha$ (§. 6.) $= 1 - \sqrt{(1 - \sin\alpha^2)}$ (nr. 11.)
$= 2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2$ (nr. 40.).

37. cos. v. $\alpha = 1 - \sin\alpha$ (§. 6.) $= 1 - \sqrt{(1 - \cos\alpha^2)}$ (nr. 1.).

Zweitens. Formeln der trigonometrischen Funktionen eines halben Bogens oder Winkels.

§. 15. 1) des Sinus und Cosinus.

Zieht man in Fig. 2. die Sehnen AI, IH und auf diese senkrecht CO, so ist CO : AI = CH : AH = 1 : 2, d. i. $CO = \frac{1}{2}AI = \frac{1}{2}\sqrt{(DI^2 + AD^2)}$ oder

$\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{[\sin\alpha^2 + (1 - \sqrt{[1 - \sin\alpha^2]^2})]}$ (nr. 36.)
$= \frac{1}{2}\sqrt{[\sin\alpha^2 + (1 - 2\sqrt{(1 - \sin\alpha^2)} + (1 - \sin\alpha^2)]}$
= (durch Reduct.) $\frac{1}{2}\sqrt{(2 - 2\sqrt{(1 - \sin\alpha^2)})}$, daher

nr. 38. $\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ (nr. 11.) $= \sqrt{\frac{1}{2}}$ sin. v. α (nr. 36.).

Zusatz. Daher auch

39. $\sin \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$ und

40. $2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2 = 1 - \cos\alpha =$ sin. v. α.

Wie vorhin, findet man

$HO = \cos \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}IH = \frac{1}{2}\sqrt{(ID^2 + (CH + CD)^2)}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{(\sin\alpha^2 + (1 + \sqrt{[1 - \sin\alpha^2]})^2)} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{(1 - \sin\alpha^2)}}{2}}$, d. i.

41. $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$.

Zusatz 1. Also auch

42. $\cos \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha) = 1 - \sin \frac{1}{2}\alpha^2$ (nr. 16.), und

43. $2 \cos \frac{1}{2}\alpha^2 = 1 + \cos\alpha$.

Zusatz 2. Setzt man $\frac{1}{2}(90° - \alpha)$ statt $\frac{1}{2}\alpha$, so geht, weil $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, die Formel nr. 38. über in

44. $\sin(45° - \frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{2}}$, oder man hat

$1 - \sin\alpha = 2 \sin(45° - \frac{1}{2}\alpha)^2$.

Und aus nr. 41. wird

nr. 45. $\cos(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$, oder man hat

$$1+\sin\alpha = 2\cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)^2.$$

Setzt man ferner in nr. 40. $90^\circ + \alpha$ statt α, so hat man: $2\sin(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)^2 = 1 - \cos(90^\circ + \alpha) = 1 + \sin\alpha$ (§. 5. Zus. 2.). Daher allgemein:

46. $1 \pm \sin\alpha = 2\sin(45^\circ \pm \frac{1}{2}\alpha)^2$.

Weil ferner nach nr. 24. $1 - \cos(90^\circ + \alpha)$ oder $1 - \cos(2(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)) = \operatorname{tang}(45 + \frac{1}{2}\alpha) \cdot \sin(90^\circ + \alpha)$, und eben so $1 - \cos(2(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)) = \operatorname{tang}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) \cdot \sin(90 - \alpha) = \operatorname{tang}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) \cdot \sin(90^\circ + \alpha)$ (§. 5. Zus. 2.); so hat man:

47. $$\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1-\cos(90^\circ+\alpha)}{1-\cos(90^\circ-\alpha)} = \frac{\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}{\operatorname{tang}(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}$$
$$= \frac{2\cos(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)^2}{2\sin(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)^2} = \cot(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha)^2$$
$$= \operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)^2.$$

Da also auch $\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}} = \frac{1+\sin\alpha}{\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

nach nr. 11. oder $= \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$, wenn man vorhin mit $1-\sin\alpha$ multiplicirt hätte; so hat man

48. $$\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha) = \cot(45-\tfrac{1}{2}\alpha).$$

Setzt man in nr. 39. $\frac{1}{2}\alpha = \alpha + 45^\circ$, daher $\alpha = 2\alpha + 90^\circ$, so ist $\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = \sin(\alpha+45^\circ)^2$

$$= \frac{1-\cos(2\alpha+90^\circ)}{2} = \frac{1+\sin 2\alpha}{2}$$ (nach nr. 69., indem $\cos 90^\circ = 0$ und $\sin 90^\circ = 1$)

$$= \frac{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2}$$ (§. 4. Zus. 6. 2) mit nr. 146.) $= \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{2}$, daher

nr. 49. $\sin(\alpha+45^\circ)=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{2}}$. — Eben so findet man:

50. $\cos(\alpha+45^\circ)=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}}$. — Auf ganz gleiche Weise entwickelt man:

51. $\sin(\alpha-45^\circ)=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sqrt{2}}$, und

52. $\cos(\alpha-45^\circ)=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sqrt{2}}$; ferner

53. $\sin(45^\circ-\alpha)=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}}$, und

54. $\cos(45^\circ-\alpha)=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sqrt{2}}$.

§. 16. 2) der Tangente und Cotangente.

Wegen $\triangle$ HDI ∞ $\triangle$ HCS (Fig. 2.) ist

$$CS : DI = HC : HD, \text{ d. i.}$$

$\text{tang}\frac{1}{2}\alpha : \sin\alpha = 1 : 1+\cos\alpha$, indem, wenn man sich aus H mit dem Halbm. HC einen Bogen zwischen C und HI gezogen denkt, CS die Tangente dieses Bogens, oder des Winkels H ($=\frac{1}{2}$AI $=\frac{1}{2}\alpha$) ist. Folglich hat man

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sqrt{(1+\cos\alpha)}\cdot\sqrt{(1-\cos\alpha)}}{\sqrt{(1+\cos\alpha)}\cdot\sqrt{(1+\cos\alpha)}}\text{ (nr. 1.), also}$$

nr. 55. $\text{tang}\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, und

56. $\cot\frac{1}{2}\alpha=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

Zusatz. Ferner hat man, nach der Hypothese bei nr. 48., aus nr. 55. $\text{tang}\frac{1}{2}\alpha^2=\text{tang}(\alpha+45^\circ)^2$

$=\frac{1-\cos(2\alpha+90^\circ)}{1+\cos(2\alpha+90^\circ)}=\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$ (nr. 47. u. §. 5. Zus. 2.)

$=\frac{1+\text{tang}\,\alpha^2+2\,\text{tang}\,\alpha}{1+\text{tang}\,\alpha^2-2\,\text{tang}\,\alpha}$ (nr. 149.) $=\frac{(1+\text{tang}\,\alpha)^2}{(1-\text{tang}\,\alpha)^2}$, also

57. $\text{tang}(\alpha+45^\circ)=\frac{1+\text{tang}\,\alpha}{1-\text{tang}\,\alpha}=\frac{\cot\alpha+1}{\cot\alpha-1}$, und

58. $\cot(\alpha+45^\circ)=\frac{\cot\alpha-1}{\cot\alpha+1}=\frac{1-\text{tang}\,\alpha}{1+\text{tang}\,\alpha}$.

Auf ganz gleiche Weise entwickelt man:

nr. 59. $\tang(\alpha-45^\circ)=\frac{\tang\alpha-1}{\tang\alpha+1}$ und $\cot(\alpha-45^\circ)=\frac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}$;

60. $\tang(45^\circ-\alpha)=\frac{1-\tang\alpha}{1+\tang\alpha}$ und $\cot(45^\circ-\alpha)=\frac{\cot\alpha+1}{\cot\alpha-1}$.

§. 17. 3) der Secante und Cosecante, Quersinus und Quercosinus.

nr. 61. $\sec\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha}}$ (nr. 30. 41.).

62. $\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}}$ (nr. 33. 38.).

63. $\sin.v.\frac{1}{2}\alpha=1-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ (nr. 36. 41.).

64. $\cosin\ v.\frac{1}{2}\alpha=1-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ (nr. 37. 38.).

Drittens. Formeln der trigonometrischen Funktionen von Summen oder Differenzen der Bogen.

§. 18. a) des Sinus und Cosinus.

nr. 65. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\,.\,\cos\beta+\sin\beta\,.\,\cos\alpha$, und

66. $\sin(\alpha-\beta=\sin\alpha\,.\,\cos\beta-\sin\beta\,.\,\cos\alpha$ (§. 8.)

Daher durch Addit. u. Subtract.

67. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\,.\,\cos\beta$, und

68. $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\,.\,\cos\alpha$.

Ferner:

69. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,.\,\cos\beta-\sin\alpha\,.\,\sin\beta$, und

70. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\,.\,\cos\beta+\sin\alpha\,.\,\sin\beta$ (§. 8.).

Daher, wie vorhin,

71. $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\,.\,\cos\beta$, und

72. $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\,.\,\sin\beta$.

Zusatz 1. In derselben Funktion ausgedrückt, ist

73. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\,.\,\sqrt{(1-\sin\beta^2)}\pm\sin\beta\,.\,\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}$
$=\cos\beta\,.\,\sqrt{(1-\cos\alpha^2)}\pm\cos\alpha\,.\,\sqrt{(1-\cos\beta^2)}$.

74. $\cos(\alpha\pm\beta)=\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}\,.\,\sqrt{(1-\sin\beta^2)}\mp\sin\alpha\,.\,\sin\beta$
$=\cos\alpha\,.\,\cos\beta\mp\sqrt{(1-\cos\alpha^2)}\,.\,\sqrt{(1-\cos\beta^2)}$.

Zusatz 2. Setzt man in nr. 67. und 71. $m\varphi$ statt α und $n\varphi$ statt β; so hat man:

nr. 75. $\sin m\varphi \cdot \cos n\varphi = \frac{1}{2}\sin(m+n)\varphi + \frac{1}{2}\sin(m-n)\varphi$, und

76. $\cos m\varphi \cdot \cos n\varphi = \frac{1}{2}\cos(m+n)\varphi + \frac{1}{2}\cos(m-n)\varphi$.

Zusatz 3. Durch Multipl. von nr. 65. mit nr. 66. wird

77. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha^2\cdot\cos\beta^2 - \sin\beta^2\cdot\cos\alpha^2$, oder $= \frac{1}{2}\cos 2\beta - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$ (indem man nr. 152. substituirt und gehörig reducirt). Eben so

78. $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}\cos 2\beta + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$ und

79. $\sin(\alpha\pm\beta)\cdot\cos(\alpha\mp\beta) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \pm \frac{1}{2}\sin 2\beta$.

Zusatz 4. Nach nr. 65. und 66. ist auch

$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \sin\frac{1}{2}\alpha\cdot\cos\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\beta\cdot\cos\frac{1}{2}\alpha$ und

$\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \sin\frac{1}{2}\alpha\cdot\cos\frac{1}{2}\beta - \sin\frac{1}{2}\beta\cdot\cos\frac{1}{2}\alpha$, daher

$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 + \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 = 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cdot\cos\frac{1}{2}\beta^2 + 2\sin\frac{1}{2}\beta^2\cdot\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta) + \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)$ (nr. 40. 42.) = (durch Reduct.) $\frac{2-2\cos\alpha\cdot\cos\beta}{2}$, also

80. $1-\cos\alpha\cdot\cos\beta = \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 + \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2$.

Auf gleiche Weise findet man, indem man vorerst die Formeln nr. 69. 70., wie oben, ändert:

81. $1+\cos\alpha\cdot\cos\beta = \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 + \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2$.

Zusatz 5. Aus nr. 67. ist: $\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\alpha}$,

" " 72. " : $\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$.

Setzt man daher $\alpha = 30°$, so hat man, da $\sin 30° = \frac{1}{2}$ (§. 5. 1)), folgende, auch zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen nützliche, Formeln:

82. $\cos\beta = \sin(30°+\beta) + \sin(30°-\beta)$.

83. $\sin\beta = \cos(30°-\beta) - \cos(30°+\beta)$.

Und hieraus:

84. $\sin(30°+\beta) = \cos\beta - \sin(30°-\beta)$.

85. $\cos(30°+\beta) = \cos(30°-\beta) - \sin\beta$.

§. 19. b) der Tangente und Cotangente; der Secante und Cosecante.

nr. 86. $\tang(\alpha \mp \beta) = \frac{\sin\alpha.\cos\beta \mp \cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta \pm \sin\alpha.\sin\beta}$ (nr. 18. u. §. 8.),

und durch $\cos\alpha.\cos\beta$ Alles dividirt:

$$= \frac{\tang\alpha \mp \tang\beta}{1 \pm \tang\alpha.\tang\beta} = \frac{\cot\beta \mp \cot\alpha}{\cot\alpha.\cot\beta \pm 1}.$$

Daher

87. $\cot(\alpha \mp \beta) = \frac{1 \pm \tang\alpha.\tang\beta}{\tang\alpha \mp \tang\beta} = \frac{\cot\alpha.\cot\beta \pm 1}{\cot\beta \mp \cot\alpha}$.

88. $\sec(\alpha \mp \beta) = \frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta \pm \sin\alpha.\sin\beta}$ (nr. 30. u. §. 8.),

und wie bei nr. 86. dividirt:

$$= \frac{\sec\alpha.\sec\beta}{1 \pm \tang\alpha.\tang\beta}.$$

89. $\operatorname{cosec}(\alpha \mp \beta) = \frac{1}{\sin\alpha.\cos\beta \mp \cos\alpha.\sin\beta}$ (nr. 33. u. §. 8.),

und durch $\sin\alpha.\cos\beta$ dividirt:

$$= \frac{\operatorname{cosec}\alpha.\operatorname{cosec}\beta}{\cot\beta \mp \cot\alpha}.$$

Viertens. Formeln für die Summen und Differenzen trigonometrischer Funktionen.

§. 20. 1. Allgemeine Formeln.

1) Setzt man in nr. 67. 68. 71. 72. $\alpha+\beta=\varphi$; $\alpha-\beta=\psi$, daß also $\alpha=\varphi-\beta=\psi+\beta$, demnach $2\alpha=\varphi+\psi$ und eben so $2\beta=\varphi-\psi$, folglich $\alpha=\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$ und $\beta=\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ wird; so hat man:

nr. 90. $\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi).\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$. nr. 67.
91. $\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi).\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$. „ 68.
92. $\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi).\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$. „ 71.
93. $\cos\psi - \cos\varphi = 2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi).\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$. „ 72.

Und hieraus:

94. $\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\cos\varphi+\cos\psi} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}$

$= \tang\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$. — Eben so:

95. $\frac{\sin\varphi-\sin\psi}{\cos\varphi+\cos\psi}=\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$, und

96. $\frac{\sin\varphi-\sin\psi}{\cos\psi-\cos\varphi}=\cot\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$, und

97. $\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\cos\psi-\cos\varphi}=\cot\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$. — Ferner durch Division von nr. 94. durch 95; dann v. 95. durch 96.

98. $\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi}=\frac{\tang\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}$, und

99. $\frac{\cos\psi-\cos\varphi}{\cos\varphi+\cos\psi}=\frac{\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}{\cot\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}$ *)

$=\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi).\tang\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$.

Ferner allgemein z. B. nach nr. 93. ist:

100. $\cos n\psi-\cos n\varphi=2\sin\frac{n}{2}(\varphi+\psi).\sin\frac{n}{2}(\varphi-\psi)$,

und speciell z. B.

$\cos 2\psi-\cos 2\varphi=2\sin(\varphi+\psi).\sin(\varphi-\psi)$.

Auf ähnliche Weise hinsichtlich der übrigen Formeln.

2) Aus nr. 86., durch gehörige Reduction der Brüche, findet man:

101. $\tang(\alpha+\beta)+\tang(\alpha-\beta)=\frac{2\sin\alpha.\cos\beta.(\sin\beta^2+\cos\beta^2)}{\cos\alpha^2.\cos\beta^2-\sin\alpha^2.\sin\beta^2}$,

$=\frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

(nr. 146. 69. 70.). — Eben so:

102. $\tang(\alpha+\beta)-\tang(\alpha-\beta)=\frac{\sin 2\beta}{\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}$, und

103. $\cot(\alpha-\beta)-\cot(\alpha+\beta)=\frac{\sin 2\beta}{\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)}$.

---

*) Nr. 98. und 99. in Proportionen verwandelt, geben die Sätze: Die Summe der Sinusse (oder Cosinusse) zweier Winkel verhält sich zum Unterschiede derselben Sinusse (oder Cosinusse), wie die Tangente (oder Cotangente) der halben Summe jener Winkel zur Tangente der halben Differenz eben dieser Winkel.

Eben so hat man aus nr. 88. 89. die 4 Formeln:

nr. 104. $\sec(\alpha+\beta)+\sec(\alpha-\beta)=\frac{2\cos\alpha\,.\,\cos\beta}{\cos\alpha^2\,.\,\cos\beta^2-\sin\alpha^2\,.\,\sin\beta^2}$

$$=\frac{2\cos\alpha\,.\,\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)\,.\,\cos(\alpha-\beta)}.$$

105. $\sec(\alpha+\beta)-\sec(\alpha-\beta)=\frac{2\sin\alpha\,.\,\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)\,.\,\cos(\alpha-\beta)}$.

106. $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)+\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)=\frac{2\sin\alpha\,.\,\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)\,.\,\sin(\alpha-\beta)}$.

107. $\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)-\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)=\frac{2\cos\alpha\,.\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\,.\,\sin(\alpha-\beta)}$.

5) Man hat ferner aus nr. 67. 68.

108. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=\frac{2\sin\alpha\,.\,\cos\beta}{2\cos\alpha\,.\,\sin\beta}$

$$=\operatorname{tang}\alpha\,.\,\cot\beta.$$

109. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tang}\alpha.$

110. $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\cot\alpha\,.\,\cot\beta$ (nr. 71. 72.).

111. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\cot\beta.$ u. s. w.

4) Nach nr. 65. ist:

$\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha=\sin\alpha\,.\,\cos\beta+\cos\alpha\,.\,\sin\beta+\sin\alpha.$

$=(1+\cos\beta)\sin\alpha+\cos\alpha\,.\,\sin\beta.$

$=2\cos\frac{1}{2}\beta^2\,.\,\sin\alpha+\cos\alpha\,.\,\sin\beta$ (nr. 42.)

$=2\sin\alpha\,.\,\cos\frac{1}{2}\beta\,.\,\cos\frac{1}{2}\beta+\cos\alpha\,.\,2\sin\frac{1}{2}\beta\,.\,\cos\frac{1}{2}\beta$ (nr. 146.)

$=(\sin\alpha\,.\,\cos\frac{1}{2}\beta+\cos\alpha\,.\,\sin\frac{1}{2}\beta)\,2\cos\frac{1}{2}\beta$, also

112. $\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha=2\cos\frac{1}{2}\beta\,.\,\sin(\alpha+\frac{1}{2}\beta)$. Eben so:

113. $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha=2\sin\frac{1}{2}\beta\,.\,\cos(\alpha+\frac{1}{2}\beta)$. Daher

114. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha}=\cot\frac{1}{2}\beta\,.\,\operatorname{tang}(\alpha+\frac{1}{2}\beta)$.

Man findet eben so:

115. $\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha=2\cos\frac{1}{2}\beta\,.\,\cos(\alpha+\frac{1}{2}\beta)$ und

116. cos

nr. 116. $\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{1}{2}\beta\,.\,\sin(\alpha+\frac{1}{2}\beta)$. Daher

117. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha}{\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)} = \cot\frac{1}{2}\beta\,.\,\cot\frac{1}{2}(\alpha+\frac{1}{2}\beta)$.

Eben so ist nach nr. 86 und 18.

$$\tang(\alpha+\beta)+\tang\alpha = \frac{\sin\alpha\,.\,\cos\beta+\cos\alpha\,.\,\sin\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta-\sin\alpha\,.\,\sin\beta}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\sin\alpha\,.\,\cos\alpha\,.\,\cos\beta+\cos\alpha^2\,.\,\sin\beta+\sin\alpha\,.\,\cos\alpha\,.\,\cos\beta-\sin\alpha^2\,.\,\sin\beta}{\cos\alpha^2\,.\,\cos\beta-\sin\alpha\,.\,\cos\alpha\,.\,\sin\beta}$$

$$= \frac{2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha\,.\,\cos\beta+(\cos\alpha^2-\sin\alpha^2)\sin\beta}{\cos\alpha(\cos\alpha\,.\,\cos\beta-\sin\alpha\,.\,\sin\beta)}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha\,.\,\cos\beta+(1-2\sin\alpha^2)\sin\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos(\alpha+\beta)}$$ (nr. 146. 69. und 152.)

$$= \frac{\sin 2\alpha\,.\,\cos\beta+\cos 2\alpha\,.\,\sin\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos(\alpha+\beta)}$$ (nr. 151.). Daher denn

nr. 118. $\tang(\alpha+\beta)+\tang\alpha = \dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,.\,\cos(\alpha+\beta)}$ (nr. 65.).

Eben so findet man:

119. $\tang(\alpha+\beta)-\tang\alpha = \dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos(\alpha+\beta)}$. Daher

120. $\dfrac{\tang(\alpha+\beta)+\tang\alpha}{\tang(\alpha+\beta)-\tang\alpha} = \dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}$

Auf gleiche Weise:

121. $\cot\alpha+\tang(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha\,.\,\cos\beta+\sin\beta\,.\,\cos\alpha}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta-\sin\beta\,.\,\sin\alpha}$

$$= \frac{(\sin\alpha^2+\cos\alpha^2)\cos\beta}{\sin\alpha\,.\,\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\cos\beta}{\sin\alpha\,.\,\cos(\alpha+\beta)}$$. Eben so:

122. $\cot\alpha-\tang(\alpha+\beta) = \dfrac{(\cos\alpha^2-\sin\alpha^2)\cos\beta-2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha\,.\,\sin\beta}{\sin\alpha\,.\,\cos(\alpha+\beta)}$

$$= \frac{\cos 2\alpha\,.\,\cos\beta-\sin 2\alpha\,.\,\sin\beta}{\sin\alpha\,.\,\cos(\alpha+\beta)}$$ (n. 151. 146.)

$$= \frac{\cos(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha\,.\,\cos(\alpha+\beta)}$$ (nr. 69.).

123. $\cot(\alpha+\beta)+\cot\alpha = \dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha\,.\,\sin(\alpha+\beta)}$.

nr. 124. $\cot\alpha - \cot(\alpha+\beta) = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin(\alpha+\beta)}$. Daher

125. $\frac{\cot(\alpha+\beta)+\cot\alpha}{\cot\alpha-\cot(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}$. U. s. w.

Man findet auf gleiche Weise:

126. $\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\frac{1}{2}\beta \cdot \cos(\alpha-\frac{1}{2}\beta)$, und

127. $\sin\alpha + \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\frac{1}{2}\beta \cdot \sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)$. Also

128. $\frac{\sin\alpha+\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha-\sin(\alpha-\beta)} = \cot\frac{1}{2}\beta \cdot \tang(\alpha-\frac{1}{2}\beta)$.

U. s. f. durch alle Combinationen; z. B.

$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}$ (nr. 90. 69.).

Es ist aber der Nenner $= 2(\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\beta + \sin\frac{1}{2}\beta \cdot \cos\frac{1}{2}\beta \cdot \cos\alpha)$ (nr. 146.), und dieser eingeschlossene Faktor, wenn man nr. 65. mit 69. multiplizirt und im reducirten Produkte nach nr. 151. setzt $\cos\alpha$ statt $(\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - \sin\frac{1}{2}\alpha^2)$ und $\cos\beta$ statt $(\cos\frac{1}{2}\beta^2 - \sin\frac{1}{2}\beta^2)$, ist auch $= \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Folglich ist

129. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$. Eben so:

130. $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$.

Obige Formeln werden einfacher, wenn man setzt $(\alpha+\beta) = \varphi$ und $\alpha = \psi$, daher $\beta = \varphi - \psi$ und $2\alpha+\beta = (\alpha+\beta)+\alpha = \varphi+\psi$; man hat dann:

131. $\tang\varphi + \tang\psi = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\varphi\cdot\cos\psi}$ (nr. 118.).

132. $\tang\varphi - \tang\psi = \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\cos\varphi\cdot\cos\psi}$ (nr. 119.).

133. $\cot\varphi + \cot\psi = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin\varphi\cdot\sin\psi}$ (nr. 123.).

134. $\cot\psi - \cot\varphi = \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi\cdot\sin\psi}$ (nr. 124.).

Und aus diesen Formeln durch Division:

135. $\frac{\tang\varphi+\tang\psi}{\tang\varphi-\tang\psi} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin(\varphi-\psi)}$.

nr. 136. $\frac{\cot\varphi+\cot\psi}{\cot\psi-\cot\varphi}=\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin(\varphi-\psi)}$.

137. $\frac{\tang\varphi-\tang\psi}{\cot\varphi+\cot\psi}=\tang\varphi\,.\,\tang\psi$.

138. $\frac{\tang\varphi-\tang\psi}{\cot\psi-\cot\varphi}=\tang\varphi\,.\,\tang\psi$.

139. $\cot\psi\pm\cot\varphi=\frac{\cos(\varphi\mp\psi)}{\sin\psi\,.\,\cos\varphi}$ nr. 121. 122.).

§. 21. 2. Specielle Formeln.

1) Setzt man $\psi=90^0-\psi$, so ist $\sin\psi=\sin(90^0-\psi)$ $=\cos\psi$. Man hat daher

nr. 140. $\sin\varphi+\cos\psi=2\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi+90^0)\,.\,\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi-90^0)$ (nr. 90.).

141. $\sin\varphi-\cos\psi=2\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi+90^0)\,.\,\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi-90^0)$ (nr. 91.).

142. $\frac{\sin\varphi+\cos\psi}{\cos\varphi+\sin\psi}=\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi+90^0)$ (nr. 94.).

143. $\frac{\sin\varphi-\cos\psi}{\cos\varphi+\sin\psi}=\tang\frac{1}{2}(\varphi+\psi-90^0)$ (nr. 95.).

U. s. w.

2) Setzt man $\psi=90^0-\varphi$ und zwar $\psi>\varphi>45^0$; so hat man auch aus nr. 90., da nun $\sin\psi=\cos\varphi$ ist,

$\sin\varphi+\cos\varphi=2\sin\frac{1}{2}(90^0)\,.\,\cos\frac{1}{2}(90^0-2\varphi)$

$=2\sin 45^0\,.\,\cos(45^0-\varphi)$. Aber nach nr. 152. ist, $\alpha=45^0$ gesetzt, $\sin 45^0=\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $2\sin 45$ $=\sqrt{\frac{4}{2}}=\sqrt{2}$, daher

144. $\sin\varphi+\cos\varphi=\sqrt{2}\,.\,\cos(45^0-\varphi)$. Eben so ist nach nr. 91., indem man setzt $\sin\psi-\sin\varphi$, und nach nr. 152.

145. $\cos\varphi-\sin\varphi=2\cos 45^0\,.\,\sin(45^0-\varphi)$

$=\sqrt{2}\,.\,\sin(45^0-\varphi)$ (§. 4. Zus. 6. 1.).

Fünftens. Formeln der trigonometrischen Funktionen vielfacher Bogen, dann der Potenzen jener Funktionen von einfachen Bogen mittelst der vielfachen.

§. 22. Zur Vermeidung aller Weitläufigkeit stellen wir diese Formeln, welche in naher Verbindung stehen, unter einander auf.

Setzt man in nr. 65. α statt β, so ist

nr. 146. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$. Daher

1) $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha$;

2) $\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$;

3) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

147. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ oder $\operatorname{tang}\alpha + \cot\alpha = \frac{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

$= \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$. Daher

148. $\frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2}(\operatorname{tang}\alpha + \cot\alpha)$.

149. $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha^2}$ (nr. 146. 4. 13.). Folglich

150. $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{2\cot\frac{1}{2}\alpha}{1 + \cot\frac{1}{2}\alpha^2}$ (nr. 19.).

151. $\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$ (nr. 69.)

$= \cos\alpha^2 - (\sqrt{(1 - \cos\alpha^2)})^2 = 2\cos\alpha^2 - 1$

$= 1 - 2\sin\alpha^2$ (indem man vorhin nr. 11. statt $\cos\alpha^2$ substituirt). Also

152. $\cos\alpha^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) = 1 - \sin\alpha^2$ (nr. 11.), und

$\sin\alpha^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) = 1 - \cos\alpha^2$ (nr. 1.).

Wegen $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha^2 - 1$ ist auch

153. $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tang}\alpha^2}{1 + \operatorname{tang}\alpha^2}$. Daher

154. $\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha^2}{1 + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{\cot\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}$ (indem man nämlich durch $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$ dividirt), oder

$= \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha^2 - 1}{\cot\frac{1}{2}\alpha^2 + 1}$ (nr. 19.), und nach nr. 152.

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}\alpha^2)}}$ (nr. 153.)

$= \frac{1}{\sqrt{(1 + \cot\alpha^2)}}$ nr. 19.).

155. $1 + \sin 2\alpha = (\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2) + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ (nr. 146.)

$= (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$, und eben so:

$1 - \sin 2\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$. Ferner

$1+\cos 2\alpha = 2\cos\alpha^2$ (nr. 151.), und
$1-\cos 2\alpha = 2\sin\alpha^2$. Daher

nr. 156. 1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{2\cos\alpha^2} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha$;

2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \cot\alpha$;

3) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \dfrac{\cos\alpha^2-\sin\alpha^2}{\cos\alpha^2}$ (n.151.) $= \frac{1}{2}(1-\operatorname{tang}\alpha^2)$;

4) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}(\cot\alpha^2-1)$.

157. $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ (nr. 151. 155.)

$= \dfrac{\sin(45^0-\alpha)}{\cos(45^0-\alpha)}$ (nr. 145. 144.)

$= \operatorname{tang}(45^0-\alpha) = \cot(45^0+\alpha)$, und

158. $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha} = \cot(45^0-\alpha) = \operatorname{tang}(45^0+\alpha)$. Daher

159. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha} = \dfrac{\operatorname{tang}(45^0+\alpha)}{\operatorname{tang}(45^0-\alpha)} = \operatorname{tang}(45^0+\alpha)\,.\,\cot(45^0-\alpha)$

$= \operatorname{tang}(45^0+\alpha)^2$. — Nach nr. 155. ist

160. $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tang}\alpha^2$. — Und kehrt man in nr. 157. 158. die Brüche um, so hat man:

161. $\dfrac{1}{\cos 2\alpha} + \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ d. i. $\sec 2\alpha + \operatorname{tang} 2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tang}(45^0-\alpha)}$

$= \cot(45^0-\alpha) = \operatorname{tang}(45^0+\alpha)$. Eben so:

$\sec 2\alpha - \operatorname{tang} 2\alpha = \operatorname{tang}(45^0-\alpha)$, daher durch Addit.

$2\sec 2\alpha = \operatorname{tang}(45^0+\alpha) + \operatorname{tang}(45^0-\alpha)$.

162. $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\,.\,\cos\alpha + \sin\alpha\,.\,\cos 2\alpha$ (nr. 65.)

$= 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha^2 + \sin\alpha(1-2\sin\alpha^2)$ (nr. 146. 151.)

$= 2\sin\alpha - 2\sin\alpha^3 + \sin\alpha - 2\sin\alpha^3$ (nr. 152.)

$= 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3$. Daher

163. $\sin\alpha^3 = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$.

164. $\cos\alpha^3 = \cos\alpha^2\,.\,\cos\alpha = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\alpha\,.\,\cos 2\alpha)$ (nr. 152.)

nr. 165. $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha$ (nr. 69.)

$= \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - 2\sin\alpha^2 \cdot \cos\alpha$ (nr. 146.), und wegen $2\cos\alpha^3 - \cos\alpha = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha$ (nr. 164.)

$= 2\cos\alpha^3 - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos\alpha^3$ (nr. 1.)

$= 4\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha$. Folglich

166. $\cos\alpha^3 = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha$. — Man kann auch in nr. 65. 69. 2α ſtatt β ſetzen; dann iſt

167. $\sin 3\alpha = \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha$ und
$\cos 3\alpha = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha$. — In beiden Formeln nr. 146. 151. ſubſtituirt, iſt auch

168. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha \cdot \cos\alpha^2 - \sin\alpha^3$, und
$\cos 3\alpha = \cos\alpha^3 - 3\cos\alpha \cdot \sin\alpha^2$.

169. $\cos\alpha^4 = \cos\alpha^2)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\cos 2\alpha^2$ (nr. 152.)
$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$ (nr. 152.)
$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$.

170. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan\alpha^2}$ (durch Subſtit. von α ſtatt β in n. 86.)
$= \frac{2\cot\alpha}{\cot\alpha^2 - 1} = \frac{2}{\cot\alpha - \tan\alpha}$ (nr. 19.) Eben ſo:

171. $\cot 2\alpha = \frac{1-\tan\alpha^2}{2\tan\alpha} = \frac{\cot\alpha^2 - 1}{2\cot\alpha} = \frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{2}$.

Setzt man $\alpha = 45^0$, ſo iſt wegen $\tan 45^0 = 1$ (§. 7. Zuſ. 1.) und $\sin 45^0 = \cos 45^0$ (§. 4. Zuſ. 6.)

172. $\tan(45^0 \mp \beta) = \frac{\cos\beta \mp \sin\beta}{\cos\beta \pm \sin\beta} = \frac{1 \mp \tan\beta}{1 \pm \tan\beta} = \frac{\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm 1}$.

173. $\tan(\alpha - 45^0) = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ (nämlich $\beta = 45^0$ geſetzt). U. ſ. w.

174. $\operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{\operatorname{cosec}\alpha^2}{2\cot\alpha}$ (nr. 89.) $= \frac{1+\cot\alpha^2}{2\cot\alpha}$ (nr. 26.)
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cot\alpha} + \cot\alpha\right) = \frac{1}{2}(\tan\alpha + \cot\alpha)$ (nr. 19.).

175. $\sec 2\alpha = \frac{\sec\alpha^2}{1-\tan\alpha^2}$ (nr. 88.) $= \frac{1+\tan\alpha^2}{1-\tan\alpha^2}$

$$= \frac{(1+\tang\alpha)^2}{1-\tang\alpha^2} - \frac{2\tang\alpha}{1-\tang\alpha^2}$$

$$= \frac{1+\tang\alpha}{1-\tang\alpha} - \frac{2\tang\alpha}{1-\tang\alpha^2}$$

$$= \tang(45^0+\alpha) - \tang 2\alpha \text{ (nr. 172. 170.).}$$

Zusatz. Da $1-\cos\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha$ (nr. 40.)

$$= \sin\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} \text{ (nr. 146.)} = \sin\alpha \cdot \tang\tfrac{1}{2}\alpha, \text{ so ist}$$

nr. 176. $\tang\frac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\sin\alpha}$ (nr. 40.)

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{2\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha} \text{ (nr. 146.)} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

177. $\cot\frac{1}{2}\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (nr. 56.) $= \frac{1+1-2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\sin\alpha}$ (nr. 40.)

$$= \frac{1-\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha} \text{ (nr. 146.). Daher auch}$$

178. $\tang\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\tang\frac{1}{2}\alpha}{1-\tang\frac{1}{2}\alpha^2}$ (nr. 170.)

$$= \frac{2}{\cot\frac{1}{2}\alpha - \tang\frac{1}{2}\alpha} = \frac{2\cot\frac{1}{2}\alpha}{\cot\frac{1}{2}\alpha^2 - 1}. \text{ Weil dem-}$$

nach $\cot\frac{1}{2}\alpha - \tang\frac{1}{2}\alpha = \frac{2}{\tang\alpha} = 2\cot\alpha$, so ist auch

179. $\tang\frac{1}{2}\alpha = \cot\frac{1}{2}\alpha - 2\cot\alpha$, oder

$\tang\alpha = \cot\alpha - 2\cot 2\alpha$. — U. s. w.

180. $\sin\alpha = \frac{2}{\cot\frac{1}{2}\alpha + \tang\frac{1}{2}\alpha}$ (nr. 150.) $= \frac{1}{\cot\alpha + \tang\frac{1}{2}\alpha}$ (nr. 179.).

Weil ferner nach nr. 176. $\tang\frac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{\tang\alpha \cdot \cos\alpha} \text{ (nr. 2.), daher } \tang\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \tang\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$= \frac{1}{\cos\alpha} - 1$ ist; so hat man auch

181. $\frac{1}{\cos\alpha} = 1 + \tang\frac{1}{2}\alpha \cdot \tang\alpha$, oder

$$\cos\alpha = \frac{1}{1+\tang\frac{1}{2}\alpha \cdot \tang\alpha}.$$

§. 23. Einige zusammengesetzte, abgeleitete Formeln.

nr. 182. $\cos 2\alpha - \cos 2\beta = 2(\sin\beta^2 - \sin\alpha^2)$ (nr. 151.)
$= 2[(\sin\beta + \sin\alpha)(\sin\beta - \sin\alpha)]$. —

Weil aus nr. 77. $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha^2 . \cos\beta^2 - \sin\beta^2 . \cos\alpha^2 = (\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2)\cos\beta^2 - (\sin\beta^2 + \cos\beta^2)\cos\alpha^2$ ist; so hat man auch:

183. $\cos\beta^2 - \cos\alpha^2 (= \sin\alpha^2 - \sin\beta^2$ nach nr. 11.)
$= \sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)$.

Auf gleiche Weise findet man:

184. $\cos\beta^2 - \sin\alpha^2 (= \cos\alpha^2 - \sin\beta^2) = \cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)$.

Und durch Multipl. von nr. 131. mit 132. und von nr. 133. mit 134. findet man:

185. $\tang\alpha^2 - \tang\beta^2 = \frac{\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha^2 . \cos\beta^2}$, und

186. $\cot\beta^2 - \cot\alpha^2 = \frac{\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha^2 . \sin\beta^2}$.

$\sin\alpha . \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ nach nr. 146., und

187. $\sin\alpha^2 . \sin 2\alpha = \sin 2\alpha - \sin 2\alpha \cos\alpha^2$ (nr. 1.)
$= \sin 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha(1+\cos 2\alpha)$ (nr. 152.)
$= \frac{1}{2}\sin 2\alpha - \frac{1}{4}\sin 4\alpha$ (nr. 146.).

188. $\sin 2\alpha . \cos\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) - \sin\alpha . \cos 2\alpha$ (nr. 65.)
$= \sin 3\alpha - \sin\alpha(1-2\sin\alpha^2)$ (nr. 151.)
$= \sin 3\alpha - \sin\alpha + 2\sin\alpha^3$
$= \sin 3\alpha - \sin\alpha + \frac{6\sin\alpha - 2\sin 3\alpha}{4}$ (nr. 163.)
$= \frac{1}{2}\sin 3\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$.

189. $\sin 3\alpha . \cos\alpha = \sin(3\alpha+\alpha) - \sin\alpha . \cos 3\alpha$
$= \sin 4\alpha - 4\sin\alpha . \cos\alpha^3 + 3\sin\alpha . \cos\alpha$ (nr. 165.)
$= \sin 4\alpha + \frac{3}{2}\sin 2\alpha - 4\sin\alpha . \cos\alpha^2 . \cos\alpha$ (nr. 146.)
$= \sin 4\alpha + \frac{3}{2}\sin 2\alpha - 4\sin\alpha . \cos\alpha + 4\sin\alpha^3 . \cos\alpha$ (nr. 11.)
$= \sin 4\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{3}{2}\sin 2\alpha - \sin 3\alpha . \cos\alpha$ (nr. 163. 146.)
$= \frac{1}{2}\sin 4\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

nr. 190. $\sin\alpha^3 . \cos\alpha = \frac{1}{4}\sin\alpha . \cos\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha . \cos\alpha$ (nr. 163.)
$= \frac{1}{8}\sin 2\alpha - \frac{1}{8}\sin 4\alpha - \frac{1}{8}\sin 2\alpha$
$= \frac{1}{4}\sin 2\alpha - \frac{1}{8}\sin 4\alpha.$ (nr. 146. 189.)

191. $\sin\alpha . \cos 3\alpha = \sin 4\alpha - \sin 3\alpha . \cos\alpha$ (wie oben)
$= \sin 4\alpha - \frac{1}{2}\sin 4\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ (nr. 189.)
$= \frac{1}{2}\sin 4\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$

192. $\sin\alpha . \cos\alpha^3 = \frac{1}{4}\sin\alpha . \cos\alpha + \frac{1}{4}\sin\alpha . \cos 3\alpha$ (nr. 166.)
$= \frac{1}{8}\sin 2\alpha + \frac{1}{8}\sin 4\alpha - \frac{1}{8}\sin 2\alpha$ (n. 146. 191.)
$= \frac{1}{8}\sin 4\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha.$

Anmerkung. Die meisten dieser Formeln sind, wie man sieht, zwar für specielle Fälle entwickelt; allein es hält nicht schwer, z. B. die Funktionen des nfachen Winkels oder Bogens darzustellen. Weil nämlich

1. $\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha . \cos\beta - \sin(\alpha-\beta)$ (nr. 69.)
2. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta) - 2\sin\alpha . \sin\beta$ (nr. 72.)
3. $\tang(\alpha+\beta) = \frac{\tang\alpha + \tang\beta}{1 - \tang\alpha . \tang\beta}$ (nr. 86.); so erhält

man durch Substitution von $(n-1)\beta$ statt α

aus 1. $\sin n\beta = 2(\sin(n-1)\beta) . \cos\beta - \sin(n-2)\beta$;
" 2. $\cos n\beta = \cos(n-2)\beta - 2(\sin(n-1)\beta) . \sin\beta$;
" 3. $\tang n\beta = \frac{\tang(n-1)\beta + \tang\beta}{1 - \tang(n-1)\beta . \tang\beta}$. U. s. w.

Aber dergleichen allgemeine Ausdrücke entsprechen dem Zwecke einer allgemeinen Berechnung z. B. des $\sin n\alpha$ keineswegs, weil man $\sin(n-1)\alpha$ und $\sin(n-2)\alpha$ wissen müßte. Daher folgende allgemeine Aufgabe!

§. 24. Aufgabe. Aus dem gegebenen Sinus oder Cosinus des einfachen Winkels den Sinus oder Cosinus des nfachen Winkels zu finden.

Auflös. I. $\sin n\alpha = n\sin\alpha . \cos\alpha^{n-1} - \frac{n . n-1 . n-2}{1 . 2 . 3}$

$\sin\alpha^3 . \cos\alpha^{n-3} + \frac{n . n-1 . n-2 . n-3 . n-4}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}\sin\alpha^5 . \cos\alpha^{n-5} - + \ldots$

$\mp \frac{n . n-1 . n-2 \ldots n-2m}{1 . 2 . 3 \ldots 2m+1}\sin\alpha^{2m+1} . \cos\alpha^{n-(2m+1)}.$

$$\text{II. } \cos n\alpha = \cos\alpha^n - \frac{n.n-1}{1.2}\sin\alpha^2.\cos\alpha^{n-2}$$
$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\sin\alpha^4.\cos\alpha^{n-4} - + \ldots$$
$$\mp\frac{n.n-1\ldots n-(2m-1)}{1.2\ldots 2m}\sin\alpha^{2m}.\cos\alpha^{n-2m}.$$

Sowohl in I. als II. gilt im beigefügten allgemeinen Gliede das obere Zeichen, wenn m eine ungerade, dagegen das untere Zeichen +, wenn m eine gerade Zahl ist.

Beweis. Aus nr. 65. 69. hat man, $\beta = n\alpha$ gesetzt,

$$\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha.\cos\alpha + \cos n\alpha.\sin\alpha, \text{ und}$$
$$\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha.\cos\alpha - \sin n\alpha.\sin\alpha.$$

Diese Gleichungen zeigen, nach welchem Gesetze Sin. und Cos. des vielfachen Winkels $(n+1)\alpha$ aus dem Sin. und Cos. des nächstvorhergehenden vielfachen Winkels entstehen.

Man nehme also an, daß die in unserer Auflösung aufgestellten Gleichungen für $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$ gültig seyen, und suche daraus die Gleichungen für $\sin(n+1)\alpha$ und $\cos(n+1)\alpha$ obigem Gesetze gemäß; so wird man, $\sin\alpha = s$ und $\cos\alpha = c$ der Kürze wegen setzend, finden:

$$\sin n\alpha.\cos\alpha = ns.c^n - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}s^3.c^{n-2} + \ldots.$$
$$\mp\frac{n.n-1\ldots n-(2m-1).n-2m}{1.2\ldots 2m.2m+1}s^{2m+1}.c^{n-2m}.$$

$$\cos n\alpha.\sin\alpha = s.c^n - \frac{n.n-1}{1.2}s^3.c^{n-2} + \ldots$$
$$\mp\frac{n.n-1\ldots n-(2m-1)}{1.2\ldots 2m}s^{2m+1}.c^{n-2m}.$$

Daher durch Addition beider Werthe:

$$\sin(n+1)\alpha = (n+1)s.c^n - \frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3}s^3.c^{n-2} + \ldots.$$
$$\mp\frac{(n+1).n.(n-1)\ldots(n+1-2m)}{1.2.3\ldots 2m+1}s^{2m+1}.c^{n-2m}.$$

Auf gleiche Weise findet man auch:

$$\cos n\alpha . \cos\alpha = c^{n+1} - \frac{n.n-1}{1.2} s^2 . c^{n-1} + \ldots$$
$$+ \frac{n.n-1 \ldots n-(2m+1)}{1.2 \ldots (2m-1).2m} s^{2m} . c^{n-2m+1}$$

$$-\sin n\alpha . \sin\alpha = -\frac{n}{1} s^2 . c^{n-1} + \ldots .$$
$$+ \frac{n.n-1 \ldots n-(2m-2)}{1.2 \ldots 2m-1} s^{2m} . c^{n-2m+1}$$

Also $\cos(n+1)\alpha = c^{n+1} - \frac{(n+1).n}{1.2} s^2 . c^{n-1} + \ldots$
$$+ \frac{(n+1).n.(n-1)\ldots(n+2m(2m-1))}{1.2.3 \ldots (2m-1).2m} s^{2m} . c^{n-2m+1}$$

Diese Gleichungen für $\sin(n+1)\alpha$ und $\cos(n+1)\alpha$ findet man auch aus den in unserer Auflösung angenommenen Gleichungen, wenn man in diesen $n+1$ statt n substituirt. Wenn daher diese Gleichungen für den Sinus oder Cosinus irgend eines vielfachen Winkels ($n\alpha$, wo $n =$ einer ganzen Zahl) gültig sind; so gelten sie auch für $\sin(n+1)\alpha$ und $\cos(n+1)\alpha$. Nun gelten sie aber vermöge der Formeln nr. 146. 151. 168., wenn $n = 2$ oder $= 3$ ist; folglich gelten sie auch für $\sin(3+1)\alpha$ und $\cos(3+1)\alpha$, d. i. für $\sin 4\alpha$ und $\cos 4\alpha$; demnach $n = 4$ gesetzt, auch für $\sin(4+1)\alpha$ und $\cos(4+1)\alpha$, d. i. für $\sin 5\alpha$ und $\cos 5\alpha$; u. s. w. ins Unendliche. Sie sind also allgemein gültig, welche ganze Zahl auch n bedeuten möge.

Zusatz 1. Daß die Formeln oder Gleichungen in obiger Auflösung auch für gebrochne Werthe von n gelten, erhellt so:

Es sey wieder $c = \cos\alpha$ und $s = \sin\alpha$; so gibt

1) die Entwicklung von $\frac{1}{2}(c+s)^n - \frac{1}{2}(c-s)^n$

$$\tfrac{1}{2}c^n + \tfrac{1}{2}nc^{n-1}.s + \tfrac{1}{2}.\frac{n.n-1}{1.2}c^{n-2}.s^2 + \tfrac{1}{2}.\frac{n.n-1.n-2}{1.2.5}c^{n-3}.s^5 + \ldots$$
$$-\tfrac{1}{2}c^n + \tfrac{1}{2}nc^{n-1}.s - \tfrac{1}{2}.\frac{n.n-1}{1.2}c^{n-2}.s^2 + \tfrac{1}{2}.\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}c^{n-3}.s^3 - \ldots$$
$$= nc^{n-1}.s + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}c^{n-3}.s^3 + \frac{n.n-1\ldots n-4}{1.2\ldots 5}c^{n-5}.s^5 + \ldots$$

d. i. ganz dieselbe Formel wie für $\sin n\alpha$, nur daß die Zeichen jetzt nicht alterniren. — Eben so findet man:

2) $\frac{1}{2}(c+s)^n + \frac{1}{2}(c-s)^n$
$= c^n + \frac{n.n-1}{1.2}c^{n-2}.s^2 + \frac{n...n-3}{1...4}c^{n-4}.s^4 + \ldots$ d. i. ganz dieselbe Formel, wie für $\cos n\alpha$, nur daß auch hier die Zeichen nicht wechseln.

Sollen in beiden Entwicklungen die Zeichen wechseln, so darf man nur $s\sqrt{-1}$ statt s setzen; dann erhält nämlich in Beziehung auf 1) wegen s^3 (nun) $= -s^3\sqrt{-1}$ das zweite Glied das Zeichen — und das dritte Glied das Zeichen +, weil $(s\sqrt{-1})^5 = +s^5\sqrt{-1}$ ist (Allgem. Größenl. §. 59. Zusatz 1.); u. s. w. Auf gleiche Weise erhellt dieselbe Wahrheit für die Entwicklung unter 2), welche, da die imaginäre Größe $\sqrt{-1}$ verschwindet, nun ganz dieselbe wird, wie für $\cos n\alpha$.

Demnach ist

nr. 193. $\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})^n - \frac{1}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha\sqrt{-1})^n = \sin n\alpha\sqrt{-1}$.

194. $\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})^n + \frac{1}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha\sqrt{-1})^n = \cos n\alpha$.

Durch Addition und Subtraction beider Formeln hat man noch

195. $(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})^n = \cos n\alpha + \sin n\alpha\sqrt{-1}$.

196. $(\cos\alpha-\sin\alpha\sqrt{-1})^n = \cos n\alpha - \sin n\alpha\sqrt{-1}$.

Zusatz 2. Es ist also:

$\sin\alpha = s$.	$\cos\alpha = c$.
$\sin 2\alpha = 2cs$.	$\cos 2\alpha = c^2 - s^2$.
$\sin 3\alpha = 3sc^2 - s^3$.	$\cos 3\alpha = c^3 - 3cs^2$.
$\sin 4\alpha = 4sc^3 - 4cs^3$.	$\cos 4\alpha = c^4 - 6c^2s^2 + s^4$.
$\sin 5\alpha = 5c^4s - 10c^2s^3 + s^5$.	$\cos 5\alpha = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4$.
$\sin 6\alpha = 6c^5s - 20c^3s^3 + 6cs^5$.	
etc.	etc.

Man hat eben so:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = t.$$

$$\text{tang}\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2cs}{c^2-s^2} \text{ (und durch } c^2 \text{ dividirt)} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$\text{tang}\,3\alpha = \frac{3sc^2 - s^3}{c^3 - 3cs^2}$ (und durch c^3 dividirt) $= \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$.

$\text{tang}\,4\alpha = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6t^2 + t^4}$. U. s. w. Daher denn auch:

$\cot\alpha = \frac{1}{t}$; $\cot 2\alpha = \frac{1 - t^2}{2t}$; $\cot 3\alpha = \frac{1 - 3t^2}{3t - t^2}$; u. s. w.

Zusatz 3. Durch Substitution der Werthe für $\cos\alpha$ oder $c = \sqrt{(1 - s^2)}$ und für $\sin\alpha$ oder $s = \sqrt{(1 - c^2)}$ hat man:

$\sin\alpha = s$.	$\cos\alpha = c$.
$\sin 2\alpha = 2s\sqrt{(1 - s^2)}$.	$\cos 2\alpha = 2c^2 - 1$.
$\sin 3\alpha = 3s - 4s^3$ (wie nr. 162.).	$\cos 3\alpha = 4c^3 - 3c$.
$\sin 4\alpha = (4s - 8s^3)\sqrt{(1 - s^2)}$.	$\cos 4\alpha = 8c^4 - 8c^2 + 1$.
$\sin 5\alpha = 5s - 20s^3 + 16s^5$.	$\cos 5\alpha = 16c^5 - 20c^3 + 5c$.
$\sin 6\alpha = (6s - 32s^3 + 192s^5 - 128s^7)\sqrt{(1 - s^2)}$.	
etc.	etc.

Durch leichte Substitutionen lassen sich auch die Sinusse vielfacher Bogen in lauter Potenzen der Cosinusse, und die Cosinusse vielfacher Bogen in lauter Potenzen der Sinusse ausdrücken. Nämlich:

$\sin\alpha = \sqrt{(1 - c^2)}$.	$\cos\alpha = \sqrt{(1 - s^2)}$.
$\sin 2\alpha = 2c\sqrt{(1 - c^2)}$.	$\cos 2\alpha = 1 - 2s^2$.
$\sin 3\alpha = (4c^2 - 1)\sqrt{(1 - c^2)}$.	$\cos 3\alpha = (1 - 4s^2)\sqrt{(1 - s^2)}$.
$\sin 4\alpha = (8c^3 - 4c)\sqrt{(1 - c^2)}$.	$\cos 4\alpha = 1 - 8s^2 + 8s^4$.
$\sin 5\alpha = (16c^4 - 12c^2 + 1)\sqrt{(1 - c^2)}$.	
etc.	etc.

Zugleich erhellt, daß, wenn man sich den Winkel, für welchen eine der vorstehenden Formeln gilt, in gleiche Theile getheilt vorstellt, die zugehörige Formel sogleich erhalten werde; so ist z. B. $\sin\alpha = 2s\sqrt{(1 - s^2)}$ die Formel, wenn der Winkel in 2 gleiche Theile — und $\sin\alpha = 3s - 4s^2$ die Formel, wenn der Winkel in 3 gleiche Theile getheilt wird.

Zusatz 4. Aus den vorstehenden Formeln folgen unmittelbar auch die der Potenzen des Sinus und Cosinus. So hat man hinsichtlich der ungeraden Potenzen des Sinus durch bloße

Versetzung der Glieder jener Gleichungen und dann durch Substitution des bereits Gefundenen die Formeln:

$$\sin\alpha = \sin\alpha.$$
$$4\sin\alpha^3 = 3\sin\alpha - \sin 3\alpha.$$
$$16\sin\alpha^5 = 10\sin\alpha - 5\sin 3\alpha + \sin 5\alpha.$$
$$64\sin\alpha^7 = 35\sin\alpha - 21\sin 3\alpha + 7\sin 5\alpha - \sin 7\alpha.$$

etc.

Um die geraden Potenzen des Sinus zu finden, darf man nur eben diese Gleichungen mit $2\sin\alpha$ multipliziren, und die erhaltenen Produkte nach nr. 72. auflösen; wobei man sich erinnern muß, daß $\cos(\alpha - \alpha)$ oder $\cos 0^0 = 1$ ist. So bekommt man:

$$2\sin\alpha^2 = 1 - \cos 2\alpha \text{ (wie in nr. 152.).}$$
$$8\sin\alpha^4 = 3.2\sin\alpha^2 - 2\sin 3\alpha.\sin\alpha$$
$$= 3 - 3\cos 2\alpha - \cos 2\alpha + \cos 4\alpha$$
$$= 3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha. \text{ Eben so:}$$
$$32\sin\alpha^6 = 10 - 15\cos 2\alpha + 6\cos 4\alpha - \cos 6\alpha.$$
$$128\sin\alpha^8 = 35 - 56\cos 2\alpha + 28\cos 4\alpha - 8\cos 6\alpha + \cos 8\alpha.$$

etc.

Die Potenzen des Cosinus folgen unmittelbar schon aus jenen Formeln. Nämlich:

$$2\cos\alpha^2 = 1 + \cos 2\alpha \text{ (wie in nr. 152.).}$$
$$4\cos\alpha^3 = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha. \text{ Und für } c^2 \text{ substituirt,}$$
$$8\cos\alpha^4 = 3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha. \text{ Eben so:}$$
$$16\cos\alpha^5 = 10\cos\alpha + 5\cos 3\alpha + \cos 5\alpha.$$
$$32\cos\alpha^6 = 10 + 15\cos 2\alpha + 6\cos 4\alpha + \cos 6\alpha.$$
$$64\cos\alpha^7 = 35\cos\alpha + 21\cos 3\alpha + 7\cos 5\alpha + \cos 7\alpha.$$

etc.

Das aus diesen Gleichungen hervorgehende Gesetz der Coefficienten der Werthe, welches, wenn man sie mit den Binomial-Coefficienten vergleicht, leicht ersichtlich ist, findet man in Klügel's analytischer Trigonometrie von Seite 121—124 eigends dargestellt und bewiesen.

§. 25. **Aufgabe.** Es sey ein Winkel oder Bogen α durch seinen Sinus (oder Cosinus) a gegeben: man soll alle verschiedenen Sinusse (oder Cosinusse)

des nten Theiles der zu dem Sinus (oder Cosinus) α gehörigen Winkel, deren kleinster $= \varphi$ sey, 1) für ein ungerades, 2) für ein gerades n finden.

Auflösung. 1) Für ein ungerades n.

Der Aufgabe gemäß ist $\alpha =$ ang. (oder arc.) $\sin\alpha$, oder $\frac{1}{n}\alpha = \frac{1}{n}$ ang. sin a. Weil nun nach §. 8. Zus. 2. der durch seinen Sinus gegebene Winkel oder Bogen α unzählige Werthe hat; so muß jeder dieser Werthe in n gleiche Theile getheilt werden, indem α selbst in solche Theile zu theilen ist.

Jene Werthe, als deren kleinsten wir φ annahmen, sind, nach Klassen geordnet, folgende:

I. φ; $\pi-\varphi$; $2\pi+\varphi$; $3\pi-\varphi$; .. $(n-1)\pi+\varphi$; $n\pi-\varphi$.

II. $(n+1)\pi+\varphi$; ... $(2n-2)\pi+\varphi$; $(2n-1)\pi-\varphi$.

III. $2n\pi+\varphi$; ... $3n\pi-\varphi$.

IV. $(3n+1)\pi+\varphi$; ... $(4n-1)\pi-\varphi$.

U. s. w.

Da aber die Sinusse des nten Theiles jedes Winkels der Klasse III. IV. u. ff. schon unter den Sinussen des nten Theiles der Winkel in I. und II. vorkommen; so hat man nur eben diese 2 Klassen zu berücksichtigen.

Wie nun in I. die Summe der Winkel $\varphi+n\pi-\varphi = n\pi$, daher der nte Theil dieser Summe $= \pi$, d. i. ein ungerades Multiplum von π ist; so ist auch dieses derselbe Fall mit der halben Summe je zweier anderen Winkel, die von φ und $n\pi-\varphi$ gleichweit abstehen. Demnach sind alle Sinusse des nten Theiles jedes Winkels in I. gleich und haben dasselbe Zeichen (§. 8. Zus. 2.), und zwar +, weil, wie $\frac{n\pi-\varphi}{n} < \pi$ oder $< 2R$, so auch der nte Theil eines jeden der übrigen Winkel in I. kleiner als 2R ist.

In II. ist wieder die Summe der vom Anfange und Ende gleichweit abstehenden Winkel $= 3n\pi$, daher der nte Theil der Summe $= 3\pi$, d. i. ein ungerades Vielfache von π, also sind auch die Sinusse des nten Theiles dieser Winkel gleich

und haben daſſelbe Zeichen, das aber jetzt — iſt, weil, wie $\frac{(2n-1)\pi-\varphi}{n}$ oder $\left(2\pi-\frac{\pi+\varphi}{n}\right) < 2\pi$ aber $> \pi$, auch der nte Theil jedes andern Winkels in II. kleiner als 4R, aber größer als 2R iſt.

Weil endlich die Anzahl aller Winkel von φ (oder von $0\pi+\varphi$) an bis $n\pi-\varphi$ in I. gleich $n+1$ iſt, aber die Sinuſſe des nten Theiles je zweier (vorhin bezeichneten) Winkel gleich ſind; ſo hat man für die Klaſſe I. nicht unzählige, ſondern nur $\frac{n+1}{2}$ verſchiedene Sinuſſe. Eben ſo hat man in der Klaſſe II. nur $n-1$ Winkel (z. B. für $n=5$ nur 4), daher gibt dieſe Klaſſe nur $\frac{n-1}{2}$ verſchiedene Sinuſſe.

Demnach ſind die Werthe von $\sin\frac{\alpha}{n} = \sin\frac{1}{n}$ ang. $\sin\alpha$ für ein ungerades n folgende:

I. $\sin\frac{\varphi}{n}$; $\sin\frac{2\pi+\varphi}{n}$; $\sin\frac{4\pi+\varphi}{n}$; ... $\sin\frac{(n-1)\pi+\varphi}{n}$.

II. $\sin\frac{n+1)\pi+\varphi}{n}$; .... $\sin\frac{(2n-2)\pi+\varphi}{n}$.

Nimmt man nun zuerſt ſtatt der ſtumpfen Winkel ihre Supplemente und ſtatt der erhabenen Winkel die Ueberſchüſſe über 2R, deren Sinuſſe aber nun das Zeichen — haben; ſo ſind die nach + und — geordneten verſchiedenen Werthe von $\sin\frac{\alpha}{n}$ folgende:

I'. (Sinuſſe mit +). $\sin\frac{\varphi}{n}$; $\sin\frac{\pi-\varphi}{n}$; $\sin\frac{2\pi+\varphi}{n}$;

$\sin\frac{3\pi+\varphi}{n}$; .... $\sin\frac{\frac{1}{2}(n-3)\pi\mp\varphi}{n}$; $\sin\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi\pm\varphi}{n}$.

II'. (Sinuſſe mit —). $\sin\frac{\pi+\varphi}{n}$; $\sin\frac{2\pi-\varphi}{n}$; $\sin\frac{3\pi+\varphi}{n}$;

... $\sin\frac{\frac{1}{2}(n-3)\pi\pm\varphi}{n}$; $\sin\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi\mp\varphi}{n}$.

In I'. und II'. gilt bei φ das obere Zeichen für einen geraden Werth von $\frac{1}{2}(n-1)$; das untere Zeichen für einen ungeraden Werth von $\frac{1}{2}(n-1)$.

Iſt

Ist z. B. der Winkel oder Bogen α, der bloß durch seinen Sinus a gegeben ist, in 3 gleiche Theile zu theilen, wo folglich nun für $n=3$ der Werth von $\frac{1}{2}(n-1)=1$ d. i. ungerade ist, daher bei φ das untere Zeichen gilt, und die aus I. zu nehmenden Sinusse mit $\frac{\pi-\varphi}{n}$ enden; so hat man aus eben dieser Klasse I. nur diese 2 verschiedenen Werthe von $\sin\frac{\alpha}{3}$, nämlich: $+\sin\frac{\varphi}{n}$ und $+\sin\frac{\pi-\varphi}{n}$. Weil nun auch die aus der Klasse II. zu nehmenden Sinusse mit $\sin\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi+\varphi}{n}=\sin\frac{\pi+\varphi}{n}$ enden; so ist dieser der einzige aus II. zu nehmende Werth, daher sind im angegebenen Falle die einzig verschiedenen Werthe von $\sin\frac{1}{3}\alpha$ diese drei: $+\sin\frac{\varphi}{n}$; $+\sin\frac{\pi+\varphi}{n}$; $-\sin\frac{\pi+\varphi}{n}$, wo $n=3$. Auf gleiche Weise findet man für $\sin\frac{\alpha}{5}$ die verschiedenen Werthe aus I. $+\sin\frac{\varphi}{5}$; $+\sin\frac{\pi-\varphi}{5}$; $+\sin\frac{2\pi+\varphi}{5}$ und aus II. $-\sin\frac{\pi+\varphi}{5}$; $-\sin\frac{2\pi-\varphi}{5}$.

2) Für ein gerades n.

Auch für diesen Fall hat man, wie im ersten Falle, nur die zwei Klassen von Winkeln zu berücksichtigen:

I. φ; $\pi-\varphi$; $2\pi+\varphi$; $3\pi-\varphi$; ... $(n-1)\pi-\varphi$.

II. $n\pi+\varphi$; $(n+1)\pi-\varphi$; ... $(2n-1)\pi-\varphi$.

Sowohl in I. als II. sind die Sinusse des nten Theiles jedes der Winkel von einander verschieden. Allein wie der nte Theil des letzten Winkels in II. oder $2\pi-\frac{\pi+\varphi}{n}$ vom nten Theile des letzten Winkels in I. oder von $\pi-\frac{\pi+\varphi}{n}$ um π d. i. um 2Q oder 2R unterschieden ist; eben so differiren die Sinusse der nten Theile jeder 2 andern Winkel aus II. und I., die vom Anfange gleichweit abstehen, nur um 2R, sind daher gleich,

haben aber entgegengesetzte Zeichen. Daher erhält man jetzt n Paare ± Sinusse, als Werthe von $\sin\frac{\alpha}{n}$, nämlich

$$\pm\sin\frac{\varphi}{n};\ \pm\sin\frac{\pi-\varphi}{n};\ \pm\sin\frac{\pi+\varphi}{n};\ \pm\sin\frac{2\pi-\varphi}{n};$$

$$\pm\sin\frac{2\pi+\varphi}{n};\ \pm\sin\frac{3\pi-\varphi}{n};\ \pm\sin\frac{3\pi+\varphi}{n};\ \ldots\ \pm\sin\frac{\frac{1}{2}n\pi+\varphi}{n}.$$

So sind z. B. von $\sin\frac{1}{2}\alpha$ oder $\sin\frac{1}{2}$ ang. sin a die verschiedenen Werthe:

$\pm\sin\frac{\varphi}{2};\ \pm\sin\frac{\pi-\varphi}{2}$. Und von $\sin\frac{1}{4}\alpha$

$\pm\sin\frac{\varphi}{4};\ \pm\sin\frac{\pi-\varphi}{4};\ \pm\sin\frac{\pi+\varphi}{4};\ \pm\sin\frac{2\pi-\varphi}{4}$. U. s. w.

Zusatz. Auf gleiche Weise entwickelt man die verschiedenen Werthe von $\cos\frac{\alpha}{n}$ oder von $\cos\frac{1}{n}$ ang. cos a. Diese Werthe sind für ein ungerades n folgende:

$$+\cos\frac{\varphi}{n};\ -\cos\frac{\pi-\varphi}{n};\ -\cos\frac{\pi+\varphi}{n};\ +\cos\frac{2\pi-\varphi}{n};$$

$$+\cos\frac{2\pi+\varphi}{n};\ \ldots\ \pm\cos\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi-\varphi}{n};\ \pm\cos\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi+\varphi}{n},$$

wo + gilt, wenn $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade ist.

Für ein gerades n hat man die Werthe:

$$\pm\cos\frac{\varphi}{n};\ \pm\cos\frac{2\pi-\varphi}{n};\ \pm\cos\frac{2\pi+\varphi}{n};\ \pm\cos\frac{4\pi-\varphi}{n};$$

$\pm\cos\frac{4\pi+\varphi}{n}$.... bis $\frac{1}{2}$n Paare Cosinusse genommen sind.

So sind z. B. 1) von $\cos\frac{1}{2}\alpha$; 2) $\cos\frac{1}{3}\alpha$; 3) $\cos\frac{1}{4}\alpha$ die Werthe folgende:

1) $\pm\cos\frac{\varphi}{2}$. — 2) $+\cos\frac{\varphi}{3};\ -\cos\frac{\pi-\varphi}{3};\ -\cos\frac{\pi+\varphi}{3}$. —

3) $\pm\cos\frac{\varphi}{4};\ \pm\cos\frac{2\pi-\varphi}{4}$. U. s. w.

B.

Ebene Trigonometrie.

a. Gesetze der Resolution rechtwinkeliger und gleichschenkeliger Dreiecke.

§. 26. Man unterscheidet zwei Hauptfälle, je nachdem nämlich die Hypotenusa unter den gegebenen Stücken ist, oder nicht.

1. Im ersten Falle ist das Gesetz der Resolution durch die Proportion gegeben:

Der Halbmesser (sin. tot. = r oder =, 1) der Tafel verhält sich zum Sinus (oder Cosinus) eines spitzen Winkels, wie die Hypotenusa zu dem Kathetus, welcher jenem Winkel opponirt ist (oder an jenem Winkel liegt).

Beweis: In Fig. 4. stelle CD, auf der Hypotenusa CA = h beliebig groß genommen, den Tafelhalbmesser vor; ferner sey aus C mit CD, als Halbmesser, der Bogen DI gezogen; so ist das Perpendikel DE = sin DI = sin α und CE = cos α, und wegen $\triangle$ DEC $\sim$ $\triangle$ ABC gilt

$$1)\ CD : DE = CA : AB,$$
$$\text{d. i. } r : \sin\alpha = h : c;$$
$$2)\ CD : CE = CA : CB,$$
$$\text{d. i. } r : \cos\alpha = h : a.$$

Zusatz. Wenn demnach nebst h auch α (= C) gegeben, folglich auch A bekannt ist; so hat man für r = 1 und für log r = 10, wie gewöhnlich,

$$c = h \cdot \sin\alpha, \text{ oder } \log c = \log h + \log \sin\alpha - 10;$$
$$\text{und } a = h \cdot \sin A, \text{ oder } \log a = \log h + \log \sin A - 10.$$

Um aber den Kathetus a unmittelbar aus h und α zu finden, bedient man sich der 2) Proportion oder der Gleichung $a = h \cdot \cos\alpha$.

Ist aber nebst h der Käthetus c gegeben und α gesucht, so ist aus 1) $\sin\alpha = \frac{c}{h}$, oder $\log.\sin\alpha = 10 + \log c - \log h$.

2. Im zweiten Falle ist das Gesetz der Resolution durch die Proportion gegeben:

Der Tafel-Halbmesser verhält sich zur Tangente eines spitzen Winkels, wie der an diesem Winkel liegende Käthetus zu dem jenem Winkel opponirten Käthetus.

Beweis. Man nehme auf einem Käthetus beliebig CH = r, ziehe aus C mit CH, als Halbmesser, den Bogen HL; so ist das im Endpunkte H errichtete Perpendikel HG = tang HL = tang α, wie CG = sec α, und man hat, wie vorhin:

1) CH : HG = CB : BA, d. i. r : tang α = a : c;

2) CH : CG = CB : CA, d. i. r : sec α = a : h.

Zusatz 1. Wenn also a und α gegeben sind, demnach auch A bekannt ist, und es soll h gefunden werden; so hat man vermöge 2) unmittelbar $h = \alpha . \sec\alpha$, ohne sich mittelst des gefolgerten Winkels A einer der Proportionen unter 1) bedienen zu müssen.

Unter derselben Voraussetzung ist nach 1)

$c = a . \tang\alpha$, oder $\log c = \log a + \log \tang\alpha - 10$. Und eben so ist auch $a = c . \tang A$, wie wir im vorigen Zusatze setzten $a = h . \sin A$. Beides kann man unmittelbar beweisen, indem man, statt, wie vorhin, auf dem Käthetus CB, nun auf AB einen beliebigen Theil den Tafelhalbmesser vorstellen läßt, und mit demselben vom Scheitel des Winkels A aus einen Kreisbogen zieht. Die übrige Konstruktion bleibt. Hinsichtlich des unmittelbaren Beweises von $a = h . \sin A$ gilt dasselbe Verfahren, nur daß von A aus ein auf der Hypotenusa abgeschnittener, beliebig großer Theil den Sinus totus r vorstellt.

Will man in einem besonderen Falle in 1) cot α statt tang α einführen; so setzt man statt r : tang α vermöge 1. im §. 7.

$r : \frac{r^2}{\cot\alpha}$, oder $1 : \frac{r}{\cot\alpha}$, d. i. $\cot\alpha : r$ und invertirt, wodurch man ſtatt 1) hat

$$r : \cot\alpha = c : a, \text{ oder } c = \frac{a}{\cot\alpha}.$$

Zuſatz 2. Um h aus a und b, oder a aus h und b zu finden, dient der pythagor. Lehrſatz (Geom. §. 79.), nach welchem $h = \sqrt{(a^2+b^2)}$ und $a = \sqrt{(h^2-b^2)}$ iſt. Bei großen Zahlen kommt man im letzten Falle leichter zum Ziele, wenn man $h^2-b^2 = (h+b)(h-b)$ ſetzt. Für jeden Fall bietet auch hier die Trigonometrie ein Hülfsmittel zur leichteſten Berechnung dar. Es iſt nämlich allgemein:

$$\sqrt{(n^2+m^2)} = \sqrt{\left(m^2 \cdot \frac{m^2+n^2}{m^2}\right)} = m\sqrt{\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)}.$$

Setzt man nun $\frac{n}{m} = \text{tang}\, x$, demnach $\frac{n^2}{m^2} = \text{tang}\, x^2$, ſo iſt

$$\sqrt{\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)} = \sqrt{(1+\text{tang}\, x^2)} = \sec x \text{ (nr. 31.)} = \frac{1}{\cos x},$$

daher $m\sqrt{\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)} = \frac{m}{\cos x}$ und $\log m \cdot \sqrt{\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)} = \log\sqrt{(m^2+n^2)} = \log m - \log\cos x$, wobei $\log\cos x$ aus $\log\text{tang}\, x = \log n - \log m$ als bekannt zu betrachten iſt.

Eben ſo iſt (für $m>n$) $\sqrt{(m^2-n^2)} = m\sqrt{\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)}$, daher, $\frac{n}{m} = \sin x$ geſetzt, $m\sqrt{\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)} = m\sqrt{(1-\sin x^2)} = m \cdot \cos x$, folglich

$$\log\sqrt{(m^2-n^2)} = \log m + \log\cos x,$$

wobei wieder $\log\cos x$ aus $\log n - \log m = \log\sin x$ bekannt iſt.

Zuſatz 3. Da man im gleichſchenkeligen Dreiecke ABC (Fig. 5.) aus einem gegebenen Winkel auch die andern Winkel kennt, und da das Perpendikel BD den Winkel B an der Spitze, wie die Baſis b halbirt; ſo bietet die Reſolution dieſes Dreieckes keine eigene Schwierigkeit dar. Nämlich

1. aus b und c findet man $\frac{1}{2}B$ im rechtw. $\triangle ABD$ mittelst der Proportion:

$$r : \sin\tfrac{1}{2}B = c : \tfrac{1}{2}b, \text{ daher } \sin\tfrac{1}{2}B = \frac{r \cdot \frac{1}{2}b}{c}.$$

2. Dieselbe Proportion dient, um aus b und B einen Schenkel c zu finden, oder man hat $c = \frac{r \cdot \frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}B}$.

Eben so dient sie, um

3. aus c und B die Grundseite b zu finden; man hat nämlich

$$\tfrac{1}{2}b = \frac{c \cdot \sin\frac{1}{2}B}{r}, \text{ oder } b = \frac{2c \cdot \sin\frac{1}{2}B}{r}.$$

Anmerkungen.

1. Man wird nicht übersehen, daß die allgemeinen Proportionen oder Gleichungen des §. 26. auch aus der allgemeinen Proportion

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C \text{ (§. 4. Zus. 1.)}$$

abgeleitet werden können. Denn ist $A = R$, folglich a Hypotenusa $= h$; so hat man

1) $h : b = \sin R : \sin B$; d. i. $h : b = r : \sin B$;

weil ferner $B = R - C$, also $\sin B = \cos C$ ist, so hat man auch

2) $h : b = r : \cos C$, wie im §. 26. unter 1.

Substituirt man $\sqrt{(b^2 + c^2)}$ statt h; so wird (nach allgem. Größenl. §. 114. Zus. 1. und §. 115.) aus 1)

$b^2 + c^2 : b^2 = r^2 : \sin B^2$, oder

$b^2 + c^2 - b^2 : b^2 = r^2 - \sin B^2 : \sin B^2$, oder

$$c : b = \sqrt{(r^2 - \sin B^2)} : \sin B$$
$$= \cos B : \sin B \text{ (nr. 11.)}$$
$$= \frac{r \cdot \cos B}{\cos B} : \frac{r \cdot \sin B}{\cos B} = r : \operatorname{tang} B \text{ (§. 7.)},$$

oder auch $b : c = r : \cot B$, wie oben.

Da wir weiter unten sehen werden, daß man mit Hülfe sowohl der erwähnten allgemeinen Proportion, als der aus ihr abgeleiteten Proportionen alle Aufgaben auch über die Resolu-

von schiefwinkeliger Dreiecke lösen könne; so erhellt, daß jene allgemeine Proportion mit Recht die Fundamentalproportion der Trigonometrie genannt werden könne.

2. Den Anfänger müssen wir hier, gleichsam an der Schwelle, auf Zweierlei aufmerksam machen:

Erstens macht die richtige Führung des logarithmisch-trigonometrischen Calculs, dessen wir uns in der Regel bedienen, darum einige Behutsamkeit nothwendig, weil die der Rechnung zum Grunde gelegten trigonometrischen Formeln gewöhnlich für den Halbmesser = 1 entworfen sind.

Zweitens sucht der Trigonometer lieber den halben Winkel, theils um den ganzen mit Hülfe der gemeinen Tafeln genauer zu finden, theils um die Zweideutigkeit zu beseitigen, ob der ganze gesuchte Winkel spitz oder stumpf zu nehmen sey. Daher denn der Vorzug der auf halbe gesuchte Winkel sprechenden Formeln, wie z. B. der folgenden hinsichtlich rechtwinkeliger Dreiecke:

Die im §. 26. zu 1. unter 2) angeführte Proportion

$r : \cos\alpha = h : a$ oder (für $r = 1$) $h : a = 1 : \cos\alpha$

geht (convertendo) in diese über;

$h : h - a = 1 : 1 - \cos\alpha = 1 : 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$ (nr. 155.),

daher $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{h-a}{2h}}$; eben so: $\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{h-c}{2h}}$ (P).

Oder man hat aus $h : a = 1 : \cos\alpha$ auch

$h + a : h - a = 1 + \cos\alpha : 1 - \cos\alpha = 1 : \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = 1 : \tang\frac{1}{2}\alpha^2$

vermöge nr. 160. Daher denn

$\tang\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{h-a}{h+a}}$; eben so: $\tang\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{h-c}{h+c}}$ (Q).

Beispiel. In Fig. 4. stelle C den Erdmittelpunkt und DP einen Theil der Meeresfläche vor; in O sey das Auge des Beobachters in einer Höhe von 34 Fuß über dem Spiegel des Meeres, auf dessen äußersten Punkt M die Sehlinie OM (als Tangente von DP) treffen soll; man verlangt, den Winkel γ zu kennen, welcher von OM mit der horizontal durch O gehenden Linie ON gebildet wird.

Da $\gamma = \beta$ (Geom. §. 124.) und in dem (in M rechtw.) $\triangle$ COM nach Obigem $\cos\beta = \frac{CM}{CO}$ ist, so kann man β oder γ finden, indem der Erdhalbmesser CM = 19611324', daher auch CO = CM + 34' bekannt ist. Es ist nämlich, indem man r mit in jene Formel aufnimmt,

$$\log\cos\beta = 10 + \log CM + (C.\log CO - 10)$$

nach allgem. Größenl. §. 145. Zus. 1.; oder

$$\log\cos\beta = \log CM + C.\log CO = 7{,}2925067 + 2{,}7074925 = 9{,}9999992.$$

Nach den gewöhnlichen Tafeln entspricht diesem Log. cos. ein zwischen 0° 6' 50" und 6' 40" fallender Winkel. Nebstdem sind obige Logar. von 8ziffrigen Zahlen nicht genau gefunden. Daher, um sicherer zu gehen, setzt man nach obiger Formel (P)

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta \text{ oder } \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(CO - CM)}{CO}} = \sqrt{\frac{17}{CO}}.$$

Da nun auch diese Formel, wie (P), nur für r = 1 gilt, so darf man nur, um r wieder ausdrücklich einzuführen, sich erinnern, daß nach §. 8. Anmerk. 2. $\frac{\sin.\,tab.\,\alpha}{r} = \sin.\,nat.\,\alpha$, daher $\sin.\,tab.\,\alpha^2 = r^2 . \sin.\,nat.\,\alpha^2$ sey. Daher denn auch

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{r^2 . 17}{CO}} = r . \sqrt{\frac{17}{CO}} \text{ und}$$

$$\log\sin\tfrac{1}{2}\gamma = 10 + \frac{\log 17 + C.\log CO - 10}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\log 17 + C.\log CO + 10).$$ Also die Rechnung

$$\log 17 = 1{,}2304489$$
$$+ C.\log CO = 2{,}7074925$$
$$+ 10 = 10{,}\ldots$$
$$: 2 \quad 15{,}9379414$$
$$= 6{,}9689707 = \log\sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$

folglich $\frac{1}{2}\gamma$ = 5' 12", 5 und γ = 6' 25".

5. Wendet man, wie es oft geschieht, die Resolution des rechtw. Dreieckes auf die Bestimmung einer Höhe an; so weiß man, daß an dieser wegen der terrestrischen Strahlenbrechung eine subtraktive Correktion angebracht werden müsse. Eine

zweite, additive wird nothwendig, sobald der horizontale Abstand vom Fußpunkte der zu messenden Höhe beträchtlich groß ist. Wenn z. B. A (Fig. 6.) der Endpunkt dieses horizontalen Abstandes von der zu messenden Höhe BD ist; so fällt in jenem Falle der scheinbare Horizont AR des Punktes A, dessen wahrer Horizont der aus dem Erdmittelpunkte C mit dem Halbmesser AC gezogene Kreis ist, mit jenem horizontalen Abstande zusammen. Statt daher den Höhenwinkel DAB zu messen, erhält man den Winkel DAR und daher statt der Höhe BD nur die Höhe RD, zu der folglich noch BR, oder der Abstand des scheinbaren Horizontes des Punktes A vom wahren, zu addiren ist.

Dieses BR findet man leicht. Denn der sehr kleine Bogen AB kann als Perpendikel aus dem rechten Winkel RAG auf GR gefällt, daher das kleine $\triangle ARB \sim \triangle ARG$ (Geom. §. 124.) betrachtet werden, so daß ist $RG : AR = AR : BR$. Weil nun RG ohne merklichen Fehler für BG oder für den doppelten Erdhalbmesser = 1719 geogr. Meilen genommen werden kann; so hat man aus

$$\log BR = 2 \log AR - \log 1719$$ die Correktion BR.

b. Gesetze der Resolution schiefwinkeliger Dreiecke.

§. 27. Die zwei einfachsten Hauptfälle sind:

1) Aus 2 gegebenen Winkeln und einer Seite,

2) aus 2 gegebenen Seiten und einem Winkel, welcher einer dieser Seiten gegenübersteht,

die übrigen Stücke zu finden.

Abgesehen von dem Zweifelhaften für 2) nach §. 2. ist in beiden Fällen die Resolution durch die allgemeine Proportion (§. 4. Zus. 1.) gegeben. Analytische Auflösungen gewähren hiebei keinen besondern Vortheil.

Beispiel. Es sey aus der gemessenen Standlinie a (Fig. 7.) und den an ihr gemessenen Winkeln B, C der horizontale Abstand c des Punktes B von dem unzugänglichen

Punkte A zu bestimmen. Da auch der Winkel A bekannt ist; so hat man

$$\sin A : \sin C = a : c, \text{ oder } c = \frac{\sin C}{\sin A} \cdot a.$$

§. 28. Bei dem dritten Hauptfalle:

aus zwei mit dem eingeschlossenen Winkel α gegebenen Seiten a, b (Fig. 8.) die übrigen Stücke des △ ABC zu finden,

unterscheidet man mit Recht zwei Fälle:

1) Aus jenen gegebenen oder bekannten Stücken den der kleineren Seite b gegenüberstehenden Winkel β, der gewiß spitz ist, und nachher auch die dritte Seite c,

2) aus den gegebenen Stücken unmittelbar diese Seite c zu finden.

Aufgabe 1. Im Falle 1) den Winkel β zu finden.

Auflösung 1. Nach §. 27. ist $a : b = \sin A : \sin B$, und hieraus

$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B$, oder

$a + b : a - b = \text{tang } \frac{1}{2}(A+B) : \text{tang } \frac{1}{2}(A-B)$ (nr. 89.),

aus welcher Formel man, da $A + B = 2R - \alpha$ oder $\frac{1}{2}(A+B) = R - \frac{1}{2}\alpha$ bekannt ist, $\frac{1}{2}(A-B)$ findet. Will man aber vorerst die Berechnung von $\frac{1}{2}(A+B)$ vermeiden, so setzt man statt $\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)$ oder $\text{tang } (R - \frac{1}{2}\alpha)$ nach §. 7. Zus. 2. $\cot \frac{1}{2}\alpha$; demnach hat man die Formel:

$$\text{tang } \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cdot \cot \frac{1}{2}\alpha.$$

Hieraus findet man denn $\frac{1}{2}(A-B)$, folglich den kleineren Winkel B oder $\beta = \frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{2}(A-B)$ und den größeren $A = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}(A-B)$ vermöge allgem. Größenl. §. 90. Die dritte Seite c berechnet man denn nach §. 27.

Beispiel. Es sey der horizontale Abstand c der Punkte A, B von einander zu bestimmen. Man messe eine schickliche Standlinie CD und die Winkel um C und D, durch welche man die Winkel CAD und CBD kennt. Weiter berechne man

nach §. 27. Fall 1) im △ ACD die Seite AC = b und im △ BCD die Seite BC = a. Hierdurch sind im △ ABC die Seiten a, b mit dem eingeschlossenen Winkel α bekannt, und zwar sey α = 55° 41′ 18″; b = 120′ und a = 140′, folglich a + b = 260′; a − b = 20′; ½α = 17° 50′ 39″ und ½(A+B) = 90° − ½α = 72° 09′ 21″.

Die logarithmisch-trigonom. Rechnung nach der vorigen Formel steht demnach so:

$$\log(a-b) = \log 20 = 1{,}3010300$$
$$+\,C.\log(a+b) = C.\log 260 = 7{,}5850267 - 10$$
$$+\log\cot\tfrac{1}{2}\alpha = \log.\cot.\,17^\circ\,50'\,39'' = 10{,}4922585$$
$$\log\tan g\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \overline{9{,}5783150}.$$

Daher ½(A−B) = 15° 26′ 20″ und $\beta = \tfrac{1}{2}(A+B) - \tfrac{1}{2}(A-B) = \left.\begin{matrix}72^\circ\,09'\,21'' \\ -\,15\,\,26\,\,20\end{matrix}\right\} = 58^\circ\,43'\,01''$. Und nun wird mittelst der Proportion: sin β : sin α = b : c der Abstand c = 81′,914 gefunden. Man vergl. unten §. 29. Zus. 5. 2).

Auflösung 2. Den W. α < R gesetzt, fälle man auf die grössere Seite a vom Scheitel des ihr gegenüberstehenden Winkels das Loth AE = p; so ist nach §. 26.

$$r : \sin\alpha = b : p,\ \text{d. i. } p = \frac{b\,.\,\sin\alpha}{r} = b\,.\,\sin\alpha$$

(für den Halbm. = 1), und eben so:

$$r : \cos\alpha = b : CE,\ \text{d. i. } CE = \frac{b\,.\,\cos\alpha}{r} = b\,.\,\cos\alpha.$$

Daher $EB = CB - CE = a - \frac{b\,.\,\cos\alpha}{r} = a - b\,.\,\cos\alpha$, und nun im rechtw. △ ABE

$$r : \tan g\,\beta = EB : p = a - \frac{b\,.\,\cos\alpha}{r} : \frac{b\,.\,\sin\alpha}{r}$$
$$= r\,.\,a - b\,.\,\cos\alpha : b\,.\,\sin\alpha, \text{ also}$$
$$\tan g\,\beta = \frac{r\,.\,b\,.\,\sin\alpha}{r\,.\,a - b\,.\,\cos\alpha}, \text{ oder, wegen } \tan g\,\beta = \frac{r^2}{\cot\beta}\ (\S.\ 7.),$$
$$\cot\beta = \frac{r^2\,.\,a}{b\,.\,\sin\alpha} - \frac{r\,.\,b\,.\,\cos\alpha}{b\,.\,\sin\alpha} = \frac{r^2\,.\,a}{b\,.\,\sin\alpha} - \cot\alpha\ (\S.\ 7.).$$

Für die Rechnung ist vorerst

$$\log\frac{r^2\,.\,a}{b\,.\,\sin.tab.\alpha} = 20 + \log a + (C.\log b + C.\log\sin.tab.\alpha - 20).$$

Daher die Werthe von a; b und α wie vorhin angenommen und 20 weggelassen, erhält man durch die Rechnung

$$\log a = \log 140 = 2{,}1461280$$
$$\text{C}.\log b = \text{C}.\log 120 = 7{,}9208188$$
$$\text{C}.\log \text{sin. tab.}\,\alpha = \text{C}.\log.\text{sin}\,55^\circ\,41'\,18'' = 0{,}2340515$$
$$10{,}3009983.$$

Zieht man nach §. 8. Anm. 3. von diesem Logar. 10 ab und sucht zu 0,3009 . . . die entsprechende Zahl; so hat man die natürliche Funktion = 1,99985, und davon cot. nat. $\alpha = 1{,}3922454$ abgezogen, cot. nat. $\beta = 0{,}6076046$, daher denn $\beta = 58^\circ\,44' - 59'' = 58^\circ\,45'\,01''$, wie oben.

Zusatz 1. Ist $\alpha > R$, wie in Fig. 9., so daß die Senkrechte auf die verlängerte Seite BC oder a fällt; so ist zwar der Sinus sowohl als der Cosinus von ACE derselbe, wie für den Supplementwinkel α (§. 4. Zus. 3.); allein man hat jetzt $-\cos\alpha$, weßwegen obiger Werth von EB ($= a - b\,.\cos\alpha$) in $a + b.\cos\alpha$ übergeht, d. i. nun EB = BC + BC wird, wie auch die Figur unmittelbar zeigt.

Zusatz 2. Man bemerkt leicht, daß die Rechnung nach einer der Formeln in unserer 2. Auflösung, verglichen mit der Rechnung nach der Formel der 1. Auflösung, weder größere Schärfe, noch größere Erleichterung gewähre. Dasselbe ist der Fall, wenn man z. B. der Formel: $\text{tang}\,\beta = \frac{b\,.\sin\alpha}{a - b\,.\cos\alpha} = \frac{b\,.\sin\alpha}{a\left(1 - \frac{b\,.\cos\alpha}{a}\right)}$ dadurch eine bequemere Form gibt, daß man einen sogenannten Hülfswinkel einführt, und z. B., wenn $\alpha < R$ ist, $\frac{b\,.\cos\alpha}{a} = \sin\varphi^2$ setzt. Hiedurch hat man:

$$\text{tang}\,\beta = \frac{b\,.\sin\alpha}{a\,(1 - \sin\varphi^2)} = \frac{b\,.\sin\alpha}{a\cos\varphi^2} \text{ (nr. 11.).}$$

Bei der gewöhnlichen Berechnung des $\sin\varphi^2$ muß man, weil ursprünglich der Nenner $r\,.a - b\,.\cos\alpha = r\,.a\left(1 - \frac{b\,.\cos\alpha}{r\,.a}\right)$ ist, setzen:

$$\frac{b\,.\,\text{cos. tab.}\,\alpha}{r\,.a} = \frac{\text{sin. tab.}\,\varphi^2}{r^2}, \text{ daher } \text{sin.tab.}\varphi = \sqrt{\frac{r.b.\,\text{cos.tab.}\,\alpha}{a}};$$

man hat denn durch Logarithmen, wenn man wieder die vorigen Werthe gelten läßt, und + C . log a genommen, daher wieder log r = 10 weggelassen wird,

$$\begin{aligned} \log b &= \log 120 = 2{,}0791812 \\ +\log\cos 35^\circ\,41'\,18'' &= 9{,}9096643 \\ +\,C.\log a = C.\log 140 &= 7{,}8558720 \\ :\,2 & \quad 19{,}8427175 \\ \log\sin\varphi &= 9{,}9213588. \end{aligned}$$

Weil man nun, um β zu finden, nicht φ selbst, sondern $\log\cos\varphi$ kennen muß; so verfährt man kurz so: Weil der Buchlogarithmus 9,9213572 in den letzten Decimalstellen um 16 kleiner ist, als der vorhin durch Rechnung gefundene Logar.; weil ferner derselbe nächste Buchlog. von dem nächst höheren um 834 unterschieden ist, aber die 2 entsprechenden Buchlogar. der Cosinusse um 1913 differiren; so setzt man

$$834 : 1915 = 16 : x,$$

wodurch man findet, daß die Zahl $x = 35$ von dem log. cos. (= 9,7413164), welcher dem Buchlogar. $\sin\varphi$ entspricht, in den letzten Decimalen abgezogen werden müsse, um $\log\cos\varphi =$ 9,7413128 zu haben.

Die Rechnung 1) nach der Formel: $\text{tang}\,\beta = \frac{b\,.\sin\alpha}{a\,.\cos\varphi^2}$ (für den Halbm. = 1), oder 2) nach der Formel: $\frac{\text{tang.tab.}\beta}{r} = \frac{r^2.b\,.\sin.\text{tab.}\alpha}{r.a\,.\cos.\text{tab.}\varphi^2}$ (für den Halbm. = r) ist folgende:

1)		oder 2)	
		20, . . .	
log b =	2,0791812	2,079 . . .	
log sin α =	9,7659485	9,765 . . .	
C . log a =	7,8538720	7,853 . . .	— 10
C . 2 . log cos φ =	0,5173744	0,517 . . .	— 20
log tang β =	10,2163761	40,216 . . .	— 30.

Ich habe beide Rechnungen absichtlich neben einander gestellt, um zu zeigen, daß der Anfänger bei einer logar. trigonometr. Rechnung nach einer auf natürliche Funktionen sprechenden Formel (wie unter 1)) nicht ängstlich auf die Correktionen, wie sie unter 2) erscheinen, Bedacht nehmen dürfe, indem man die

Charakteristik des Logar. der gesuchten Funktion schon zum voraus so gewiß kennt, daß ein Irrthum um das Zehnfache jener Charakteristik unmöglich ist, daß sich folglich die etwa für das Endresultat der Rechnung nöthige Correktion gleichsam von selbst ergibt.

Obigem Endresultate entspricht übrigens $\beta = 58^0\,45'\,0'',4$.

Ist aber α stumpf und man setzt $\frac{b.\cos\alpha}{a} = \text{tang}\,\psi^2$; so hat man nun wegen $-\cos\alpha$:

$$\text{tang}\beta = \frac{b.\sin\alpha}{a\left(1+\frac{b.\cos\alpha}{a}\right)} = \frac{b.\sin\alpha}{a(1+\text{tang}\,\psi^2)}, \text{ oder}$$

$$= \frac{b.\sin\alpha}{a\left(1+\frac{\sin\psi^2}{\cos\psi^2}\right)} = \frac{b.\sin\alpha}{a\left(\frac{\cos\psi^2+\sin\psi^2}{\cos\psi^2}\right)} = \frac{b}{a}\sin\alpha.\cos\psi^2$$

nach §. 4. Zus. 6. 2).

§. 29. Fortsetzung.

Aufgabe 2. Im Falle 2) (§. 28.) die dritte Seite c unmittelbar zu finden.

Auflösung. Im rechtw. $\triangle$ ABE (Fig. 8.) ist

$$c^2 = p^2 + BE^2 = b^2.\sin\alpha^2 + (a - b.\cos\alpha)^2 \text{ (§. 28. Auflös. 2.)}$$
$$= b^2(\sin\alpha^2+\cos\alpha^2) + a^2 - 2ab.\cos\alpha, \text{ d. i.}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha \text{ (für den Halbm.} = 1)$$

oder $c = \sqrt{(a^2+b^2-2ab.\cos\alpha)}$.

Beispiel. Es sey $a = 646'$; $b = 218'$ und $\alpha = 171^0\,09'\,19'',5$; so ist $\cos\alpha = \sin 81^0\,09'\,19'',5$ (§. 8. Anmerk. 5.) und die Rechnung diese:

$a^2 = 417316$	$\sin 81^0\,09'\,19'',5 = 0,9881090$
$b^2 = 47524$	$2ab = 281656$
$a^2+b^2 = 464840$	$2ab.\sin 81^0\ldots = 278306,828\ldots$

Läßt man in dem letzten Produkte die Bruchtheile weg, daher die letzte Ziffer der ganzen Zahl um 1 erhöhend; so hat man

$$a^2+b^2-(-2ab.\cos\alpha) = \left.\begin{matrix}464840\\+278307\end{matrix}\right\} = 743147 = c^2, \text{ folglich}$$

$c = \sqrt{743147} = 862'$ sehr nahe.

Zusatz 1. Um unsere Formel für die Rechnung bequemer zu bilden, kann man verschiedene Wege einschlagen:

1). $c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab - 2ab \cdot \cos\alpha$
$= (a+b)^2 - 2ab(1+\cos\alpha)$
$= (a+b)^2 - 4ab \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha^2$ (nr. 41.).

Setzt man nun $(a+b)^2 = m^2$ und $-4ab \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha^2 = -n^2$, so daß $a+b = m$ und $n = 2\cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{ab}$, daher $\frac{n}{m} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{ab}}{a+b}$ ist; so hat man nach §. 26. Zus. 2.

$\log c = \log \sqrt{(m^2 - n^2)} = \log m + \log\cos x$
$= \log(a+b) + \log\cos x.$

Hiebei ist $\log\cos x$ aus $\log\frac{n}{m} = \log\frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{ab}}{a+b}$
$= \log\sin x$ als bekannt zu betrachten.

Nach dem vorigen Beispiele ist $\frac{1}{2}\alpha = 85^0\,34'\,39'',75$ und die Rechnung diese:

		daher, wie in §. 28. Zus. 2.	
$\log\cos\frac{1}{2}\alpha$	$= 8{,}8854566$	$\log\cos x$	$= 9{,}9995160$
$\frac{1}{2}\log 2ab \ldots$	$= 2{,}7248595$	$+\log(a+b)$	$= 2{,}9365137$
$C.\log(a+b)$	$= 7{,}0634863$	$\log c$	$= 2{,}9360297$;
$\log\sin x$	$= 8{,}6738024$		

also c sehr nahe $= 865$.

2). Setzt man $\cos\alpha = 1 - 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$ (nr. 151.); so findet man auf ähnliche vortheilhafte Weise

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 4ab \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha^2$
$= (a-b)^2 + 4ab \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha^2$
$= (a-b)^2\left(1 + \frac{4ab \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha^2}{(a-b)^2}\right).$

Setzt man dann $\tang\varphi^2 = \frac{4ab \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha^2}{(a-b)^2}$, folglich $\tang\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{a-b} \cdot \sqrt{ab}$, als bekannt; so wird

$c = (a-b)\sqrt{(1+\tang\varphi^2)} = (a-b) \cdot \frac{1}{\cos\varphi}$ (nr. 15.);
oder $\log c = \log(a-b) + C.\log\cos\varphi$.

Zusatz 2. Sind nicht die den Winkel α umschließenden Seiten a, b selbst, sondern ihre Logarithmen gegeben; so kann man, ohne a und b zu berechnen, so verfahren:

1). Setzt man $\frac{b}{a} = \text{tang}\,\psi^2 = \frac{\sin\psi^2}{\cos\psi^2}$, so ist $b = \frac{a \cdot \sin\psi^2}{\cos\psi^2}$, daher $a+b = \frac{a \cdot \sin\psi^2 + a \cdot \cos\psi^2}{\cos\psi^2} = \frac{a(\sin\psi^2+\cos\psi^2)}{\cos\psi^2} = \frac{a}{\cos\psi^2}$.

Oder man setzt $\frac{b}{a} = \sin\varphi^2$, folglich $b = a \cdot \sin\varphi^2$; so hat man $a-b = a(1-\sin\varphi^2) = a\cos\varphi^2$ (nr. 11.). Mit Hülfe dieser Formeln kann nun Alles logarithmisch behandelt werden.

2). Betrachtet man das $\triangle ABC$ (Fig. 8) als ein in C rechtwinkeliges, so ist, wenn φ den der größeren Seite a opponirten Winkel bezeichnet,

$$r : \text{tang}\,\varphi = b : a, \text{ d. i. } \text{tang}\,\varphi = \frac{a}{b}.$$

Es ist ferner unter der vorigen Voraussetzung $\varphi + B = R = 90^0$, daher $\varphi > B > 45^0$ und

$$\text{tang}(\varphi - 45^0) = \frac{\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,45^0}{1 + \text{tang}\,\varphi \cdot \text{tang}\,45^0} \text{ (nr. 86.)}$$

$$= \frac{\text{tang}\,\varphi - 1}{1 + \text{tang}\,\varphi} \text{ (§. 7. Zuf. 1.)} = \frac{a-b}{a+b} \text{ (durch Subst.)}$$

$$= \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}\alpha} \text{ (§. 28. Auflöf. 1.), folglich}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \cot\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \text{tang}(\varphi - 45^0)$$
$$= \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B) \cdot \text{tang}(\varphi - 45^0).$$

Weil man nun φ aus $\log a - \log b = \log \text{tang}\,\varphi$ findet; so erhellt, daß man nach jener Formel, mit Umgehung der Seiten a, b, die halbe Differenz der 2 an c liegenden Winkel und somit entweder nach §. 28. Auflöf. 1. diese Winkel selbst und dann die dritte Seite c, oder auch, ohne die Winkel A und B zu kennen, mit Hülfe einer der Formeln unter 1) die Seite c unmittelbar nach einer der Formeln im Zuf. 2. berechnen könne.

Beispiel. Es sey $\alpha = 108^0\,15'\,37'',37525$, daher $\frac{1}{2}\alpha = 54^0\,07'\,48'',68762$; ferner $\log a = 4{,}6859571$ und $\log b = 4{,}5434696$; so hat man

$\log a + C \cdot \log b = 10{,}1424375 = \log \text{tang}\,\varphi$; folglich $\varphi = 54^0\,14'\,05'',4752$ und $\varphi - 45^0 = 9^0\,14'\,05'',4752$. Daher denn

log cot

$\log \cot \frac{1}{2}\alpha = 9{,}8591843$	also $\frac{1}{2}(A-B) = 6^0\,42'\,18'',5814$
$\log \tang (\varphi - 45^0) = 9{,}2110911$	aber $\frac{1}{2}(A+B) = 35\;52\;11{,}51238$
$\log \tang \frac{1}{2}(A-B) = 9{,}0702754$	daher $A = 42^0\,34'\,29'',89378$
	und $B = 29\;09\;52{,}73098.$

Endlich nach der Proportion: $\sin A : \sin \alpha = a : c$, oder der Formel $c = \frac{a \sin \alpha}{\sin A}$ hat man:

$\log a = 4{,}6859571$

$\log \sin \alpha = 9{,}9775600 = \log \cos 18^0\,15'\,37'',37525$

$+ C \cdot \log \sin A = 0{,}1696975$

$\log c = 4{,}8332144$, daher $c = 68110{,}55$ in dem Maße (Fußen, Toisen, ...), auf welches die Rechnung spricht.

Will man eine Probe, so suche man z. B. $\log b$ aus $\sin A : \sin B = a : b$. Man findet

$\log b = (\log a + C \cdot \log \sin A) + \log \sin B = 4{,}8556544$ (aus voriger Rechnung) $+ 9{,}6878151 = 4{,}5434695$, genau stimmend mit der Angabe im Beispiele.

Zusatz 3. Man kann die allgemeine Proportion (§. 4. Zus. 1.) auch so ausdrücken:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Man hat daher auch

$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C \cdot \cos\frac{1}{2}C}$ (n. 90. 146.).

Aber weil $\frac{1}{2}C = 90^0 - \frac{1}{2}(A+B)$, daher $\cos\frac{1}{2}C = \sin\frac{1}{2}(A+B)$ ist; so erhält man durch Reduction und Aufhebung der Brüche

$$(a+b) \cdot \sin\tfrac{1}{2}C = c \cdot \cos\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Auf gleiche Weise ist

$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(A+C) \cdot \sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C \cdot \cos\frac{1}{2}C}$ (nr. 91.)

Aber $\sin\frac{1}{2}C = \cos\frac{1}{2}(A+B)$, daher auf vorige Art

$$(a-b) \cdot \cos\tfrac{1}{2}C = c \cdot \sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Nach einer dieser Formeln kann man aus a, b, α (oder C) und der nach §. 28. gefundnen halben Differenz der an c liegenden Winkel nun unmittelbar (ohne A und B selbst zu kennen) die dritte Seite c finden, und hiebei den schon aufgefundnen Logar. $(a+b)$ oder Logar. $(a-b)$ wieder brauchen.

§. 50. Vierter Hauptfall:

Aus den drei gegebenen Seiten eines schiefwinkeligen Dreieckes

erstens einen Winkel; zweitens den Flächeraum der Figur zu finden.

Aufgabe 1. Aus den 3 Seiten einen Winkel zu finden.

Auflösung 1. Es seyen die Seiten des △ ABC (Fig. 10. I. II.) wieder kurz durch a, b, c bezeichnet. Man beschreibe aus C mit dem Halbmesser = CB einen Kreis; verlängere in I. und II. AC und in II. auch AB bis zur Peripherie, und fälle das Perpendikel CD, welches auf AB und AF die Segmente AD = S und BD = s bildet.

Nach Geom. §. 126. II. oder §. 130. gilt

1) für I. AE : AB = AF : AG, oder AE . AG = AB . AF;
2) für II. AE : AF = AB : AG, oder AE . AG = AB . AF.

Nun ist für I. und II. AE = a + b; AG = b − a; in I. AF = AD − DF = AD − BD (Geom. §. 84. II.) = S − s; aber in II. AF = AD + BD = S + s. Diese Werthe oben substituirt, hat man

in 1) (a+b) (b−a) = c . (S−s) und in 2) (a+b) (b−a) = c . (S−s).

Daher die allgemeine Proportion:

$$c : a+b = b-a : S \mp s,$$

die man leicht mit Worten ausdrückt, und in deren letztem Gliede — gilt, wenn die Senkrechte CD innerhalb des Dreieckes fällt.

Aus dieser Proportion findet man zunächst

$$S \mp s = \frac{(a+b)(b-a)}{c}.$$

Man hat daher auch $\frac{1}{2}(S \mp s)$, folglich nach allgem. Größenl. §. 90.

für Fig. I. das größere Segment $S = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}(S-s)$
und das kleinere Segm. $s = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}(S-s)$, weil $c = S+s$ ist. Aber

für Fig. II., in welcher AB oder $c = S-s$ ist, hat man $S = \frac{1}{2}(S+s) + \frac{1}{2}c$ und $(s = \frac{1}{2}(S+s) - \frac{1}{2}c$.

Mittelst dieser bekannten Segmente findet man nach §. 26. z. B. im rechtw. △ BCD den Winkel B, indem für I. $\cos B = \frac{r \cdot s}{a}$ und für II. $\cos CBD = \frac{r \cdot s}{a}$, wo nun der Supplementwinkel von CBD der gesuchte W. B ist. U. s. w.

Zusatz. Die Segmente AD (= S) und BD (= s) können auch unmittelbar so gefunden werden:
für I. ist $CD^2 = b^2 - S^2$ und $= a^2 - s^2$;
aber $s^2 = (c-S)^2 = c^2 - 2cS + S^2$, daher durch Subst.
$b^2 - S^2 = a^2 - c^2 + 2cS - S^2$ und hieraus

$$S = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}. \quad \text{Eben so ist } s = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}.$$

In beiden Formeln ist der Nenner die doppelte Seite, auf die das Loth trifft, und die Seite, deren Quadrat im Zähler abgezogen wird, ist die nicht am gesuchten Segmente liegende.

Für II. entwickelt man eben so: $S = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$, wie vorhin, aber $s = \frac{a^2-(b^2+c^2)}{2c}$. Wenn daher der aus dem obigen Ausdrucke $\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$ entwickelte Werth von s mit — gefunden wird; so ist dieses ein Zeichen, daß das Dreieck in B stumpfwinkelig sey, oder das Loth außerhalb der Figur falle.

Uebrigens ist von selbst klar, daß, wollte man die verschiedene Lage des Perpendikels umgehen, die der Allgemeinheit der Auflösung weniger zusagende Beschränkung eintreten müsse, das Perpendikel nur auf die größte Seite zu fällen.

Beispiel. In Fig. I. sey a = 64; b = 142 und c = 184 in einerlei Maß gegeben oder gefunden.

Hier ist $S - s = \frac{(a+b)(b-a)}{c} = \frac{206 \cdot 78}{184} = \frac{16068}{184} = 87{,}32609$;
daher das größere Segment $S = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}(S-s) = 92 + 43{,}66304$
$= 135{,}66304$, und das kleinere Segment $s = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}(S-s)$
$= 48{,}33696$. — Nach dem Zus. ist unmittelbar $S = \frac{184^2+142^2-64^2}{2 \cdot 184}$
$= \frac{49924}{368} = 135{,}66304$, und $s = \frac{64^2+184^2-142^2}{368} = 48{,}33696$,
wie vorhin.

Ferner im △ ADC ist $b : S = r : \sin ACD$,
und im △ CBD ist $a : s = r : \sin BCD$.

Rechnung.

$\log r = 10,\ldots$	$\log r = 10,\ldots$
$\log S = 2,1524615$	$\log s = 1,6842793$
$+C.\log b = 7,8477117$	$+C.\log a = 8,1938200$
$\log \sin ACD = 9,9801732$	$\log \sin BCD = 9,8780993$
W. $ACD = 72^0\ 49'\ 06'',45$,	W. $BCD = 49^0\ 02'\ 54'',64$;
daher $A = 17^0\ 10'\ 53'',55$,	$B = 40^0\ 57'\ 05'',36$,

und $C = ACD + BCD = 121^0\ 52'\ 01'',09$.

§. 31. Fortsetzung.

Vermöge der Formel im §. 29., in der a, b, die den W. α umschließenden Seiten bedeuten, hat man für Fig. 10.

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \text{ und } \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Um dem Zweifel, ob der nach dieser oder einer andern, ebenfalls auf den ganzen Winkel sprechenden, Formel gefundne Winkel spitz oder stumpf zu nehmen sey, zu begegnen, sucht man erst die den kleineren Seiten opponirten Winkel, deren jeder gewiß spitz ist.

Obige Formel dient indessen mehr noch zur Entwickelung folgender bequemeren Formeln:

Weil $1-\cos A = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$, oder

$\frac{1}{2}(1-\cos A) = \sin \frac{1}{2}A^2$ (nr. 152.) $= \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}$; weil

ferner eben so $\frac{1}{2}(1+\cos A) = \cos \frac{1}{2}A^2$ (n. 152.) $= \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}$

ist; so hat man die 2 Formeln:

$$(\mu)\ldots \sin \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{bc}}, \text{ und}$$

$$(\nu)\ldots \cos \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}}.$$

Da endlich nach nr. 146. $\sin A = 2 \sin \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}A$ ist; so hat man durch Multiplikation von (μ) und (ν)

$$(\rho)\ldots \sin A = \frac{1}{2bc}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]},$$

oder, wenn man den Perimeter des Dreiecks durch 2s, demnach $\frac{1}{2}(a+b+c)$ durch s bezeichnet,

$$\sin A = \frac{1}{2bc}\sqrt{[2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)]},$$

oder $(\sigma)\ldots \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{[s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)]}$.

Beispiel. Es bleiben dieselben Werthe der Seiten, wie im Beispiel des vorigen Paragraphen; man sucht den W. A nach (μ).

Hier ist $a+b-c = 22$; $a+c-b = 106$ und $bc = 26128$, demnach die Rechnung, bei der man $\log r^2$ oder 20 addirt denken muß, diese:

$\log(a+b-c) =$	1,3424227
$\log(a+c-b) =$	2,0253059
$+ C \cdot \log bc =$	5,5828938 — 10
	18,9506224
$: 2$	9,4753112
$\log \frac{1}{2} = \log 0,5 =$	0,6989700 — 1
$\log \sin \frac{1}{2}A =$	9,1742812.

Daher $\frac{1}{2}A = 8^0\ 35'\ 26'',797$ und $A = 17^0\ 10'\ 53'',59$.

§. 32. Fortsetzung.

Aufgabe 2. Aus den drei gegebenen Seiten den Flächeninhalt T des Dreiecks zu finden.

Auflösung. In Fig. 10. ist $CD = h$ die Höhe des Dreiecks ABC für die Basis c, und $T = \frac{1}{2}c.h = \frac{1}{2}b.c.\sin A$, indem $h = b.\sin A$ ist. Substituirt man nun statt $\sin A$ den Werth (ρ) oder (σ) des vorigen Paragraphen; so hat man die Formeln:

(1) $T = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$;

(1') $T = \sqrt{[s.(s-a).(s-b).(s-c)]}$ (vgl. Geom. §. 137. 5)).

Ferner ist aus $T = \frac{1}{2}c.h$ die Höhe $h = \frac{2T}{c}$, daher wenn man in diesem Ausdrucke einen der vorigen Werthe für T substituirt, hat man

(2) $h = \frac{1}{2c}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$;

(2') $h = \frac{2}{c}\sqrt{[s.(s-a).(s-b).(s-c)]}$ für die Basis c.

Beispiel. Die Werthe der Seiten, wie in den §§. 50. 51. angenommen ist,

$s = 195$; $s-a = 131$; $s-b = 55$; $s-c = 11$, daher die Rechnung:

log 195	= 2,2900346	also T = 3859, 1 (Quadratmaß).
log 131	= 2,1172713	Ferner $\log h = \log 2 + \log T + C.\log c$
log 55	= 1,7242759	$= 0{,}3010300 + 3{,}5864872$
log 11	= 1,0413927	$+ 7{,}7351822 = 1{,}6226994$, daher die
:2	7,1729745	Höhe h = 41,9468 (im bekannten Maße
log T	= 3,5864872	der Seiten).

Zusatz 1. Für ein gleichschenkeliges Dreieck, in welchem z. B. $a = b$, ist

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{[2a+c).(2a-c).c^2} = \frac{1}{4}c\sqrt{[(2a+c).(2a-c)]};$$

und für ein gleichseitiges $\triangle$ ist $T = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, woraus die Seite $a = \sqrt{\frac{4T}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{\frac{T.\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,T.\sqrt[4]{3}$ gefunden wird, wenn T gegeben ist.

Zusatz 2. Der Flächenraum F des Trapezes Fig. 11., dessen parallele Seiten a, b seyn sollen, ist $= \frac{1}{2}(a+b).h$ (Geom. §. 137. 4)). Zieht man $CD \| c$, so sind im $\triangle CDB$ alle Seiten, nämlich $CD = c$; $BC = d$ und $BD = b-a$ bekannt, wenn die des Trapezes gegeben sind. Demnach ist durch Substitution (in $\frac{1}{2}(a+b).h$) des obigen Werthes (2) für h

$$F = \frac{a+b}{4(b-a)}\sqrt{[(b+c+d-a).(a+c+d-b).(b+d-a-c).(b+c-a-d)]}.$$

Zusatz 3. Aus 2 mit dem eingeschlossenen Winkel α (Fig. 8.) gegebenen Seiten a, b ist $T = \frac{1}{2}a.b.\sin\alpha$. — Wären a, b mit dem anliegenden Winkel B gegeben; so suchte man C mit Hülfe der allgemeinen Proportion, wodurch man denn auch $\alpha = 2R-(B+C)$, demnach, wie vorhin, auch T fände.

Wenn daher alle Seiten der Trapezoide (Fig. 12.) und 2 einander opponirte Winkel α, β gegeben sind; so kann man den Flächenraum der Figur finden, indem man den Flächenraum T, T' eines jeden der Dreiecke, in welche die Diagonale AB die Figur theilt, nach der angeführten Formel berechnet.

Wären endlich nur die 2 Diagonalen AD, BC (Fig. 13.) mit dem W. $AOB = COD = \varphi$ gegeben, und man fällte die Perpendikel h, h' auf BC; so hätte man den Flächenraum T des $\triangle ABC = \frac{1}{2}BC \cdot AO \cdot \sin\varphi$ und den Flächenraum T' des $\triangle BDC = \frac{1}{2}BC \cdot OD \cdot \sin\varphi$; daher

$$F = T + T' = \frac{1}{2}BC \cdot AD \cdot \sin\varphi.$$

Zusatz 4. Auf ähnliche Weise kann man leicht den Kreisabschnitt $ABDA = s$ (Fig. 14.) aus dem gegebenen Halbmesser AC und dem Bogen ADB oder Winkel $C = \varphi$ finden. Denn der Flächenraum T des $\triangle ABC$ ist $= \frac{1}{2}AC^2 \cdot \sin\varphi$; der Kreisausschnitt $S = \frac{1}{2}AC^2 \cdot \pi \cdot \frac{\varphi}{180^0}$ (Geom. §. 145. Zus. 2.), daher

$$s = S - T = \frac{1}{2}AC^2\left(\frac{\pi\varphi}{180^0} - \sin\varphi\right).$$

Wäre statt φ die Sehne AB gegeben; so fände man aus $r : \sin\frac{1}{2}\varphi = AC : \frac{1}{2}AB$ leicht den Winkel φ.

Ist $\triangle ABC$ (= T) eines jener gleichschenkeligen, kongruenten Dreiecke, in welche ein reguläres neck von C aus getheilt wird (Geom. §. 94. Zus.); so ist, wenn man sich von C das Perpendikel p auf die gegebene Seite a gefällt denkt, $\frac{1}{2}\varphi = \frac{180^0}{n}$ und $p = \frac{\frac{1}{2}a}{\text{tang}\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{2}a \cdot \cot\frac{1}{2}\varphi$ (§. 26.), daher $T = \frac{1}{4}a^2 \cdot \cot\frac{1}{2}\varphi$ und der Flächenraum des regulären necks $P = nT = \frac{1}{4}n.a^2 \cdot \cot\frac{1}{2}\varphi$.

Wäre wieder nur AC gegeben; so hätte man, wie vorhin, $T = \frac{1}{2}AC^2 \cdot \sin\varphi$ und $P = \frac{1}{2}nAC^2 \cdot \sin\varphi$. Weil ferner $\frac{1}{2}a = AC \cdot \sin\frac{1}{2}\varphi$, daher $a = 2AC \cdot \sin\frac{1}{2}\varphi$, so ist der Umfang des Polygons $= 2nAC \cdot \sin\frac{1}{2}\varphi$.

Zusatz 5. Soll man, wie im Zus. 5., unmittelbar aus einer gegebenen Seite c (Fig. 10.) und den 2 anliegenden Winkeln $A (= \alpha)$, $B (= \beta)$ den Flächenraum des $\triangle ABC$ finden; so ist, wenn für den Fall, daß, wie in Fig. 10. I., beide Winkel spitz sind, jener Flächenraum mit T, und eben dieser für den Fall, wo, wie in Fig. 10. II., ein Winkel stumpf ist, mit T' bezeichnet wird,

$$T = \frac{\frac{1}{2}c^2}{\cot\alpha + \cot\beta} \text{ und } T' = \frac{\frac{1}{2}c^2}{\cot\alpha - \cot\beta}.$$

Denn im ersten Falle sey das durch das Loth CD = p entstandne Segment AD = s, daher BD = c − s, so ist im △ BCD

1) $p = \frac{c-s}{\text{tang BCD}} = \frac{c-s}{\cot\beta}$ und im △ ADC eben so

2) $p = \frac{s}{\text{tang ACD}} = \frac{s}{\cot\alpha}$; daher $\frac{s}{\cot\alpha} = \frac{c-s}{\cot\beta}$, oder

$s : c-s = \cot\alpha : \cot\beta$, oder $s+c-s : s = \cot\alpha + \cot\beta : \cot\alpha$.

Den hieraus erhaltenen Werth von $s = \frac{c \cdot \cot\alpha}{\cot\alpha+\cot\beta}$ in 2) substituirt, wird $p = \frac{c}{\cot\alpha+\cot\beta}$ und $T = \frac{1}{2}c \cdot p = \frac{\frac{1}{2}c^2}{\cot\alpha+\cot\beta}$.

Auf gleiche Weise erhält man den Ausdruck für T'.

Noch einige, für besondere Fälle abgeleitete, trigonometrische Formeln.

§. 53. Erster besonderer Fall:

Unter dem Gegebenen sollen sich Summen oder Differenzen der Seiten des Dreieckes befinden.

Hieher gehören z. B. folgende nützliche Aufgaben:

1. **Aus der Seite c (Fig. 9.) dem ihr gegenüberliegenden Winkel C (= α) und der Summe s = a + b der 2 andern Seiten diese selbst zu finden.**

Auflösung. Es sey a − b = d; so ist nach §. 51.

$\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(c+d).(c-d)}{4ab}$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(s+c).(s-c)}{4ab}$; daher

$\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\cos\frac{1}{2}\alpha^2} = \text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{c^2-d^2}{s^2-c^2}$, woraus man

$d = \sqrt{(c^2 - \text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha^2\,(s^2-c^2))}$, demnach auch $\frac{1}{2}d$ und die größere Seite $= \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$, u. s. w. findet.

Zusatz. Ist die gegebene Seite c der Kathetus eines in A rechtw. △ ABC (Fig. 15.); so hat man nun, wenn b den andern Kathetus bezeichnet,

$\sin\frac{1}{2}A^2 = \frac{(c+d).(s-c)}{4bc}$; $\cos\frac{1}{2}A^2 = \frac{(s+c).(c-d)}{4bc}$; daher,

weil $\text{tang}\,\frac{1}{2}A^2 = 1\ (= r^2)$, $(c+d).(s-c) = (s+c).(c-d)$.

Hieraus findet man $2ds = 2c^2$ oder $d = \frac{c^2}{s}$; ferner die Hypotenuse $a = \frac{1}{2}(s+d) = \frac{s^2+c^2}{2s}$ und $b = \frac{s^2-c^2}{2s}$.

2. Aus der Basis a, der Höhe $AE = p$ des $\triangle ABC$ (Fig. 9.) und der Summe der Seiten $b+c$ diese Seiten selbst zu finden.

Auflösung. Man kennt demnach $s = a+b+c$ und $s-a = b+c$. Setzt man ferner $b-c = d$, so geht die Formel (2) für h oder p im §. 32. in diese über:

$4a^2p^2 = s.(a+d).(a-d).(s-2a) = (a^2-d^2).s.(s-2a)$,

woraus man $d^2 = a^2 - \frac{4a^2p^2}{s.(s-2a)}$, daher auch d oder $\frac{1}{2}d$ entwickelt. Das Uebrige, wie unter 1.

3. Aus dem gegebenen Unterschiede der Hypotenuse a (Fig. 15.) und des Kathetus b mit dem eingeschlossenen Winkel C ($= \alpha$) den andern Kathetus c zu finden.

Auflösung. Wegen $b = a \cdot \cos\alpha$ (§. 26.) ist $a+b = a+a \cdot \cos\alpha = a(1+\cos\alpha)$ und $a-b = a(1-\cos\alpha)$, daher $c^2 = a^2-b^2 = (a+b)(a-b) = a^2(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$, und

$$\frac{c^2}{(a-b)(a-b)} = \frac{(1+\cos\alpha).(1-\cos\alpha)}{(-\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \cot\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

(nr. 27.). Hieraus hat man denn

$$c = (a-b)\cot\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Wäre $a-c$ mit dem Winkel α gegeben, und man sollte den an α liegenden Kathetus b finden; so hätte man, wie vorhin, $b = (a-c).\cot\frac{1}{2}\beta$. Aber $\frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(90^0-\alpha) = 45^0-\frac{1}{2}\alpha$, folglich

$$b = (a-c).\cot(45^0-\tfrac{1}{2}\alpha).$$

Zusatz. Ist in 3. statt der Differenz die Summe $a+b$ gegeben; so hat man

$$\frac{c^2}{(a+b)(a+b)} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha^2 \text{ (nr. 21.), daher nun}$$

$$c = (a+b)\tan\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Und wäre $a+c$ mit α gegeben und man suchte, wie oben, den an α liegenden Kathetus b; so hätte man

$$b = (a+c).\tan(45^0-\tfrac{1}{2}\alpha).$$

4. Aus der gegebenen Differenz b—c der Katheten und einem Winkel $\alpha < 45^0$ die Summe b+c, demnach die Katheten b, c selbst zu finden.

Auflösung. Da $b = a \cdot \cos\alpha$ und $c = a \cdot \sin\alpha$ ist, so hat man

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \cot(45^0 - \alpha)$$ (nr. 172. und nr. 25.);

daher $b+c = (b-c) \cdot \cot(45^0 - \alpha)$. U. s. w.

Zusatz 1. Ist $\alpha > 45^0$, daher nun die Differenz $c-b = \sin\alpha - \cos\alpha$, so ist durch ein ähnliches Verfahren, wie vorhin, und nach nr. 173. 25.

$$c+b = (c-b) \cdot \cot(\alpha - 45^0).$$

Zusatz 2. Ist b+c mit $\alpha < 45^0$ gegeben; so findet man auf gleiche Weise

$b-c = (b+c) \cdot \tan(45^0 - \alpha)$, und für $\alpha > 45^0$

$c-b = (b+c) \cdot \tan(\alpha - 45^0)$.

§. 34. Zweiter besonderer Fall:

Um aus aufeinander folgenden Seiten und Winkeln das Gesuchte zu finden, werden folgende nützliche Formeln leicht entwickelt:

In Fig. 9. seyen der Winkel C oder α, die ihn umschließenden Seiten a, b und der Winkel B oder β die aufeinander folgenden Stücke; so ist der Winkel A oder $\gamma = 2R - (\alpha+\beta)$, daher $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$, folglich auch

$$a : b = \sin(\alpha+\beta) : \sin\beta$$
$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha : \sin\beta \text{ (nr. 65.)}$$
$$= \sin\alpha \cdot \cot\beta + \cos\alpha : 1 \text{ (durch Divis. mit } \sin\beta).$$

Hieraus 1) $a = b \cdot \sin(\alpha+\beta) : \sin\beta$, oder

1') $a = b \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cot\beta)$, zur Berechnung der zwischen α und β liegenden Seite.

Man hat eben so:

2) $b = a \cdot \sin\beta : \sin(\alpha+\beta)$ oder

2') $b = a : (\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cot\beta)$, zur Berechnung einer an α oder β liegenden Seite aus diesen Winkeln und der zwischenliegenden Seite.

Ferner ist aus 1')

$$a = b \cdot \cos\alpha + b \cdot \sin\alpha \cdot \cot\beta$$

oder $a - b \cdot \cos\alpha = b \cdot \sin\alpha \cdot \cot\beta$, folglich

3) $\cot\beta = (a : b \sin\alpha) - \cot\alpha$, zur Berechnung eines Winkels, der an einer der 2 mit dem eingeschlossenen Winkel gegebenen Seiten liegt.

Substituirt man in 1') statt $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ihre Werthe aus nr. 150. 154.; so hat man

$$a = \frac{b - b\tan\frac{1}{2}\alpha^2 + 2b \cdot \cot\beta \cdot \tan\frac{1}{2}\alpha}{1 + \tan\frac{1}{2}\alpha^2}, \text{ oder}$$

$$(a+b)\tan\tfrac{1}{2}\alpha^2 - 2b \cdot \cot\beta \cdot \tan\tfrac{1}{2}\alpha = b - a, \text{ und}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \frac{2b \cdot \cos\beta}{(a+b)\sin\beta} \cdot \tan\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{b-a}{b+a}, \text{ oder}$$

$$\frac{\tan\frac{1}{2}\alpha^2 (a+b)\sin\beta - 2b \cdot \cos\beta \cdot \tan\frac{1}{2}\alpha}{(a+b) \cdot \sin\beta} = \frac{b-a}{a+b}.$$

Addirt man nun auf beiden Seiten $\frac{b^2 \cdot \cos\beta^2}{(a+b)^2 \sin\beta^2}$ und reducirt auf einerlei Nenner; so wird die erste Seite der Gleichung

$$\frac{\tan\frac{1}{2}\alpha^2 (a+b)^2 \sin\beta^2 - 2b.(a+b)\sin\beta \cdot \cos\beta \cdot \tan\frac{1}{2}\alpha + b^2 \cos\beta^2}{(a+b)^2 \cdot \sin\beta^2}$$

$$= \frac{[\tan\frac{1}{2}\alpha (a+b)\sin\beta - b\cos\beta]^2}{(a+b)^2 \cdot \sin\beta^2}.$$

Und die zweite Seite der Gleichung wird

$$\frac{b^2(\sin\beta^2 + \cos\beta^2) - a^2 \cdot \sin\beta^2}{(a+b)^2 \cdot \sin\beta^2} = \frac{b^2 - a^2 \cdot \sin\beta^2}{(a+b)^2 \cdot \sin\beta^2}$$

$$= \frac{(b+a \cdot \sin\beta) \cdot (b - a \cdot \sin\beta)}{(a+b)^2 \cdot \sin\beta^2}.$$ Läßt man nun auf beiden Seiten den Nenner weg, zieht die 2te Wurzel aus und versetzt; so hat man

$$4) \quad \tan\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{b \cdot \cos\beta \pm \sqrt{((b + a \cdot \sin\beta)(b - a \cdot \sin\beta))}}{(a+b) \cdot \sin\beta},$$

wobei + gilt, wenn die dem W. β opponirte Seite $b > a$ ist. Mit Hülfe dieser Formel kann man einen Winkel aus den ihn umschließenden Seiten und einen Winkel, der an einer dieser Seiten liegt, finden.

c. Anwendung auf Polygonometrie.

§. 35. Es sollen hier nur die Hauptgleichungen der Polygonometrie mit einigen Folgerungen aus denselben entwickelt und dargestellt werden.

Wie aus 6 Stücken des Dreieckes, wenn drei, dasselbe bestimmende, Stücke gegeben sind, die übrigen gefunden werden; eben so lassen sich, wenn in einem necke $2n-3$ Stücke bekannt sind, die übrigen drei durch Rechnung bestimmen. Und wie aus 2 Winkeln des ebenen geradlinigen Dreieckes auch der dritte erkannt wird; eben so weiß man, wenn $n-1$ Winkel des ecks gegeben sind, mittelst der Formel für die Summe der inneren Polygonwinkel, nämlich $S = 2Rn-4R$ (Geom. §. 58.), den letzten oder nten Winkel zu finden.

Es sey das Polygon ABCDE... (Fig. 16.); die Seite $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; u. s. w. Zieht man die gerade Linie AH und auf diese die Perpendikel $B1$; $C2$; $D3$; ... und durch die Scheitel derselben Winkel B, C, D, ... die mit AH Parallelen $Ba = 12$; $Cb = 23$; $ED = 34$; .... so nennt man AH die Abscissenlinie; die einzelnen Theile derselben, von A an gerechnet, wie A1, A2, A3, ... die Abscissen und die Perpendikel $B1$, $C2$, $D3$, ... die zugehörigen Ordinaten. Die durch die Konstruktion der Ordinaten und der Abscissen (der Coordinaten) entstehenden Hülfswinkel m, n, p, q, ... lassen sich in den Polygonwinkeln A, B, C, ... auf folgende Weise bestimmen:

$$m = R-A;$$
$$n = B-R-m = A+B-2R;$$
$$p = R-n = 3R-(A+B);$$
$$q = C-R-p = A+B+C-4R;$$
$$s = R-q = 5R-(A+B+C);$$
$$t = D-s = A+B+C+D-5R;$$
$$u = R-t = 6R-(A+B+C+D);$$

u. s. w., wobei das Gesetz erhellt, nach welchem jeder folgende Winkel in den Polygonwinkeln gehörig ausgedrückt wird.

Leicht entwickelt man nun auch die Werthe der Katheten der Hülfsdreiecke, nämlich

$y = B1 = a.\sin A;$

$y' = Ca = b.\sin n = b.\sin(A+B-2R) = -b.\sin(A+B);$

$y'' = Db = c.\sin q = c.\sin(A+B+C);$

$y''' = Dd' = d.\sin u = d.\sin(A+B+C+D);$

u. s. w. Um sich von der Richtigkeit dieser Werthe zu überzeugen, darf man nur jede vorhin vorgekommene Funktion nach der Formel nr. 66. behandeln, indem man die Summe der Polygonwinkel kurz mit φ bezeichnet:

so ist $\sin n = \sin(\varphi-2R) = \sin\varphi.\cos 2R - \sin 2R.\cos\varphi$; aber $\cos 2R = -1$ und $\sin 2R = 0$, daher $\sin n = -\sin\varphi = -\sin(A+B)$. Eben so $\sin q = \sin(\varphi-4R) = \sin\varphi.\cos 4R - \sin 4R.\cos\varphi$; aber $\sin 4R = 0$ und $\cos 4R = +1$, daher $\sin q = +\sin\varphi = \sin(A+B+C)$. Ferner ist $\sin 6R.\cos\varphi - \sin\varphi.\cos 6R = \sin 4$; aber $\sin 6R = 0$ und $\cos 6R = -1$, daher $\sin u = +\sin\varphi$. U. s. w.

Eben so ist nach nr. 70. z. B. $\cos n = \cos\varphi.\cos 2R + \sin\varphi.\sin 2R = -\cos\varphi = -\cos(A+B)$; u. s. w. Man findet daher auf gleiche Weise

$x = A1 = a.\cos A;$

$x' = Ba = b.\cos n = -b.\cos(A+B);$

$x'' = Cb = c.\cos q = c.\cos(A+B+C);$

$x''' = Ed' = d.\cos u = -d.\cos(A+B+C+D);$ u. s. w.

Leicht entwickelt man nun die Werthe erstens der Ordinaten:

$Y = B1 = y = a.\sin A;$

$Y' = C2 = Y+y' = a.\sin A - b.\sin(A+B);$

$Y'' = D3 = Y'+y'' = a.\sin A - b.\sin(A+B) + c.\sin(A+B+C);$

$Y''' = E4 = Y''-y''' = a.\sin A - b.\sin(A+B) + c.\sin(A+B+C) - d.\sin(A+B+C+D);$

u. s. w., woraus das Gesetz erhellt, welchem der Ausdruck jeder folgenden Ordinate gehorcht; so ist

$$Y'' = F5 = a.\sin A - b.\sin(A+B) + c.\sin(A+B+C) - d.\sin(A+B+C+D) + e.\sin(A+B+C+D+E).$$

Zweitens der Abscissen:

$X = A1 = x = a.\cos A;$

$X' = A2 = X + x' = a.\cos A - b.\cos(A+B);$

$X'' = A3 = X' + x'' = a.\cos A - b.\cos(A+B) + c.\cos(A+B+C);$

$X''' = A4 = X'' + x''' = a.\cos A - b.\cos(A+B) + c.\cos(A+B+C) - d.\cos(A+B+C+D);$

u. s. w., woraus auch das Gesetz für die zugehörigen Abscissen erhellt.

Weil im geschlossenen Polygon für die Punkte A und H keine Ordinaten Statt finden, folglich

$$y + y' + y'' + y''' + \ldots = 0$$

wie $x + x' + x'' + x''' + \ldots = 0$ ist, so hat man

(M) $\ldots a.\sin A - b.\sin(A+B) + c.\sin(A+C+D) - + \ldots = 0;$

(N) $\ldots a.\cos A - b.\cos(A+B) + c.\cos(A+C+D) - + \ldots = 0.$

Wie ferner im $\triangle ABC$ (Fig. 17.) die erste Abscisse $= a.\cos A$ und die zweite, die zu ihrem Werthe die Seite c hat, oder $c = a.\cos A - b.\cos(A+B)$ ist, und wie daher in einem Vierecke die Abscisse $d = a.\cos A - b.\cos(A+B) + c.\cos(A+B+C)$ ist; eben so ist in Ansehung der obern Abtheilung die ganze Abscissenlinie

$AH = a.\cos A - b.\cos(A+B) + - \ldots + g.\cos(A+B+C+\ldots+G)$

und hinsichtlich der untern Abtheilung, wo $A' = B'A'H$ stumpf ist, hat man eben so

$AH = a'.\cos A' - b'.\cos(A'+B') + - \ldots + i.\cos(A'+B'+\ldots+I').$

Diese Gleichungen gehören mit den 2 vorigen (M) und (N) zu den Hauptgleichungen der Polygonometrie. Aus denselben lassen sich leicht andere Gleichungen für die Funktion eines beliebigen Polygonwinkels ableiten, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden.

§. 56. Fortsetzung.

Mit Hülfe der allgemeinen Gleichungen (M) und (N) (§. 55.) findet man die besonderen und zwar die Fundamental-Gleichungen bestimmter Figuren auf folgende Weise:

1) Für das Dreieck ABC (Fig. 17.). Die erste Ordinate B1 ist $= a.\sin A$, aber die zweite oder die Ordinate

für den 3ten Winkel, nämlich $a.\sin A - b.\sin(A+B) = 0$, und die dritte Seite, wie wir vorhin sahen, $c = a.\cos A - b.\cos(A+B)$. Weil aber $2R - (A+B) = C$, daher $\sin(A+B) = \sin C$ und $\cos(A+B) = -\cos C$ (§. 5. Zuf. 2.) ist; so hat man hinsichtlich des Dreieckes die 2 Fundamentalgleichungen:

(1) $a.\sin A - b.\sin C = 0$,

(2) $a.\cos A + b.\cos C - c = 0$.

Aus (1) hat man wieder $a : b = \sin C : \sin A$, d. i. die Fundamentalproportion der Trigonometrie (vgl. §. 26. Anmerk. 1.).

2) Für das Viereck. In dieser Figur ist allgemein

(3)... $a.\sin A - b.\sin(A+B) + c.\sin(A+B+C) = 0$.

(4)... $a.\cos A - b.\cos(A+B) + c.\cos(A+B+C) - d = 0$.

Nimmt man an, das Viereck sey im Kreise beschrieben (Fig. 18.), demnach die einander gegenüber stehenden Winkel $A+C = 2R$ und $B+D = 2R$ (Geom. §. 87. Zuf. 5.); so gehen obige Gleichungen in diese über:

(3')... $a.\sin A - b.\sin(A+B) + c.\sin B = 0$.

(4')... $a.\cos A - b.\cos(A+B) - c.\cos B - d = 0$.

Multiplizirt man (3') mit $-\cos(A+B)$ und (4') mit $\cos(A+B)$ und summirt die Produkte; so erhält man nach nr. 60.

(5)... $a.\sin B - c.\sin A - d.\sin(A+B) = 0$.

Aber durch Multiplikation von (3') mit $\sin(A+B)$ und von (4') mit $\cos(A+B)$, hat man nach nr. 70., und weil $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ ist, durch Addition

(6)... $a.\cos B - b - c.\cos A - d.\cos(A+B) = 0$.

Und in (3') den Werth von $\sin(A+B)$ aus (5), und in (4') den Werth von $\cos(A+B)$ aus (6) substituirt, findet sich

(3'')... $(ad+bc).\sin A - (ab+cd)\sin B = 0$.

(4'')... $(ad+bc).\cos A - (ab+cd)\cos B + b^2 - d^2 = 0$.

Aus (3'') ist $\sin A^2 = \frac{(ab+cd)^2.\sin B^2}{(ad+bc)^2}$, oder $1 - \sin A^2$ d. i. $\cos A^2 = \frac{(ad+bc)^2 - (ab+cd)^2.\sin B^2}{(ad+bc)^2}$.

Und aus (4'') ist

$$\cos A^2 = \frac{(ab+cd)^2.\cos B^2 + 2(ab+cd)\cos B.(d^2-b^2) + (d^2-b^2)^2}{(ad+bc)^2}.$$

Diese beiden Werthe von $\cos A^2$ gleichgestellt, entwickelt man durch gehörige Reduktion:

(7)... $\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$, oder auch, da a und b die den Winkel B umschließenden Seiten sind,

(7')... $\cos A = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$, u. s. w.

Hieraus ist ferner

$\frac{1-\cos B}{1+\cos B} = \frac{2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2}{2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2}$; daher $\frac{1}{2}(a+b+c+d) = s$ gesetzt, hat man nach nr. 160.

(8)... $\tang \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a).(s-b)}{(s-c).(s-d)}}$.

Hieraus erhellt, wie vorhin, die Formel zur Auffindung eines jeden andern Winkels des eingeschriebenen Viereckes aus dessen Seiten.

Zieht man die Diagonale AC, so ist nach §. 52. Zus. 3. des Vierecks Flächenraum $F = \frac{1}{2}ab.\sin B + \frac{1}{2}cd.\sin D$. Aber B ist das Supplement von D, daher $\sin D = \sin B$, folglich

$F = \frac{1}{2}(ab+cd).\sin B = \frac{(ab+cd).\tang \frac{1}{2}B}{1+\tang \frac{1}{2}B^2}$ (nr. 8.), oder durch Substitution von (8)

$F = \frac{(ab+cd)\sqrt{[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]}}{(s-a)(s-b)+(s-c)(s-d)}$, oder, da der Nenner $= ab+cd$ ist,

(9)... $F = \sqrt{[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]}$.

Hieraus hat man wieder die Formel (1') §. 52. für den Flächenraum des Dreieckes, indem nun $d = 0$ und $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist.

Zieht man endlich in Fig. 18. auch die Diagonale BD; so ist, AC mit u und BD mit v bezeichnet, nach §. 29.

$u^2 = a^2+b^2-2ab.\cos B$ und $v^2 = a^2+d^2-2ad.\cos A$, oder durch Substitution aus (7) und (7') und gehörige Red.

$u = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$ und $v = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$, also auch

(10)... $uv = ac+bd$,

d. i. das Rechteck unter den Diagonalen ist gleich der Summe der Rechtecke unter je 2 opponirten Seiten eines Vierecks, in welchem je 2 einander gegenüberstehende Winkel = 2R sind.

Dieser merkwürdige Satz heißt der Ptolomäische, weil Ptolomäus sich desselben als Fundaments in seinem Almageſt zur Berechnung der Sehnen bediente.

3) Für das Fünfeck. Theilt man ein Polygon überhaupt durch Diagonalen in Dreiecke; so zeigen die obigen Auflösungen, wie man aus den gegebenen Seiten des Polygons dessen Winkel und Flächenraum bestimmen könne.

Hier soll nun noch eine allgemeine Hauptgleichung für einen unbekannten Winkel A abgeleitet werden, wobei wir das Fünfeck als Beispiel zum Grunde legen. Für dasselbe ist

$$(m)\quad a.\sin A - b.\sin(A+B) + c.\sin(A+B+C) - d.\sin(A+B+C+D) = 0.$$

Aber $\sin(A+B) = \sin A.\cos B + \sin B.\cos A$;

$\sin[A+(B+C)] = \sin A.\cos(B+C) + \sin(B+C).\cos A$; eben so

$\sin(A+B+C+D) = \sin A.\cos(B+C+D) + \sin(B+C+D).\cos A.$

Daher durch Substitution in (m), Reduction und Versetzung

$$\sin A\,[a - b.\cos B + c.\cos(B+C) - d.\cos(B+C+D)] = \cos A\,[b.\sin B - c.\sin(B+C) + d.\sin(B+C+D)].$$

Daher denn

$$(n)\quad \frac{\sin A}{\cos A} = \operatorname{tang} A = \frac{b.\sin B - c.\sin(B+C) + d.\sin(B+C+D)}{a - b.\cos B + c.\cos(B+C) - d.\cos(B+C+D)}.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man, wenn nur die letzte Seite e des Pentagons mit den 2 anliegenden Winkeln A und E unbekannt sind, den Winkel A finden. Da ferner diese Formel einem erkannten Gesetze folgt; so läßt sie sich auch auf jedes andere Polygon für denselben Fall der Aufgabe leicht erweitern und anwenden.

C.

Sphärische Trigonometrie.

a. Eigenschaften der sphärischen Dreiecke.

§. 37. **Vorbereitung, oder Hülfssätze aus der Sphärik.**

1. Wenn in Fig. 19. ILMNI die Peripherie eines **größten** Kugelkreises K (**Geom.** §. 175.) und AB den auf K senkrechten Kugeldurchmesser vorstellt; so heißt dieser Durchmesser AB die **Axe**, und dessen Endpunkte A, B, als Punkte der Kugeloberfläche, sind die **Pole** jenes größten Kreises.

2. Es ist daher die Axe AB senkrecht auf alle Halbmesser CM, CH, CI, ... dieses größten Kreises K, oder der Winkel $ACM = ACH = ACI = R$, folglich auch der Bogen $AM = AH = AI = Q$; d. i. jeder Peripheriepunkt M, H, ... des Kreises K steht um einen Quadranten oder gleichweit vom Pole A oder B ab, und **umgekehrt**: jeder Pol eines größten Kugelkreises steht von allen Punkten der Peripherie dieses Kreises gleichweit ab.

3. Sind umgekehrt die größten Kreisbogen AH, AI Quadranten, folglich ACH, ACI rechte Winkel, und ist daher AC sowohl auf CH als CI, demnach (vermöge **Geom.** §. 150.) auf den Kreis K selbst senkrecht; so ist AC oder AB die Axe, oder A und B sind die Pole eben dieses größten Kreises K, und die Peripherie dieses Kreises, welcher auf AC oder AB, d. i. auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der von den Bogen AH, AI zum Theile begrenzten Kreise, folglich auf diese Kreise selbst senkrecht ist, schneidet sich mit den Quadranten AH, AI unter rechten Winkeln.

4. Also geht jeder größte Kreisbogen, wie DH, welcher senkrecht auf die Peripherie des größten Kreises K ist, verlängert durch den Pol A oder B dieses Kreises. Folglich ist der Punkt A oder B der Kugeloberfläche, in welchem sich zwei, auf ILM senkrechte, größte Kreisbogen DH, EI verlängert schnei-

den, der Pol des Kreises K, und diese verlängerten Bogen HDA, IEA sind Quadranten.

5. Wie DH, EI, so schneiden sich je 2 andere, hinlänglich verlängerte Bogen größter Kreise in den Polen desjenigen größten Kreises, auf welchen jene Kreise senkrecht sind, d. i. sie schneiden sich einander in einer Bogenweite $= 2Q$, und begrenzen daher die Oberfläche eines keilförmigen Kugelausschnittes (Geom. §. 175.), dessen Größe von der Neigung der zwei sich in AB (nach Fig. 19.) schneidenden Halbkreise oder ihrer halben Peripherien AHB, AIB, d. i. von dem sphärischen Winkel DAE oder HBI abhängt, der am Pole A oder B gebildet wird.

6. Diese Neigung wird mit Recht immer $< 2Q$ oder $< 2R$ betrachtet; denn ist sie $= 2R$, so bilden jene 2 Halbkreise einen einzigen größten Kugelkreis, und der keilförmige Kugelausschnitt fällt mit der Hemisphäre, oder seine Oberfläche mit der halben Kugelfläche (Geom. §. 175.) zusammen; ist sie aber $> 2R$, so wird die Größe des keilförmigen Ausschnittes oder seiner Oberfläche auch aus der Neigung oder dem sphärischen Winkel erkannt, welcher die Ergänzung jener Neigung zu 4R, demnach $< 2R$ ist.

7. Die Neigung der Bogen DA, EA zu einander oder der sphärische Winkel DAE ist derselbe wie der Winkel FAG der Tangenten jener Bogen. Oder nimmt man $AH = AI = Q$, so daß die Linien HC, IC, in welchen sich jene Halbkreise mit dem Kreise K schneiden, (vermöge 5.) senkrecht auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie AB derselben Halbkreise sind; so ist auch der W. ICH, den diese Perpendikel IC, HC mit einander bilden, gleich der Neigung derselben 2 Halbkreise zu einander $=$ HI (Geom. §. 166. Zus. 1.); d. i. diese Neigung, von welcher die Größe des keilförmigen Kugelausschnittes oder seiner Oberfläche abhängt, ist $=$ DAE $=$ HCI $=$ FAG $=$ HI.

8. Die Gleichung DAE $=$ HI drückt man durch den Satz aus: Der sphärische Winkel, den 2 größte Kreisbogen an ihrem Durchschnittspunkte (dem Scheitel) mit einander bilden, hat zum Maße einen größten Kreisbogen, welcher zwischen des Winkels Schen-

keln in einem Abstande = Q von dessen Scheitel oder vom Ursprunge jener Kreisbogen gezogen wird.

9. Stellt man sich einen größten Kugelkreis gezogen vor, dessen Axe schief ist auf die Axe AB unseres Kreises K; so schneidet sich derselbe sowohl mit K, als mit den auf diesen senkrechten Kreisen AHB, AIB. Ist demnach DE ein Theil der Peripherie jenes neuen Kreises, so gilt von den Bogen DA, DE und EA, ED dasselbe, was vorhin von AD und AE galt. Nämlich DA, DE, jeden bis zu 2Q, vom Ursprunge D an verlängert, begrenzen die Oberfläche eines keilförmigen Kugelausschnittes, dessen Größe abhängt von dem sphärischen Winkel ADE. Hinsichtlich des Maßes dieses Winkels gilt der Satz unter 8., so wie hinsichtlich der Größe eines jeden dieser sphärischen Winkel, daß er $< 2R$ sey (nach 6.).

§. 38. **Erklärung.** Der Theil der Oberfläche eines keilförmigen Kugelausschnittes oder der Kugelfläche überhaupt, wie der Theil ADE, begrenzt von drei größten Kreisbogen (AD, AE, ED) heißt ein *sphärisches Dreieck*; die sphärischen Winkel DAE, ADE, AED heißen dessen *Winkel*, und die Bogen AD, AE, ED dessen *Seiten*.

Zusatz 1. Also ist jeder sphärische Dreieckswinkel $< 2R$ (§. 37. 9.), die Summe der 3 Winkel $< 6R$ oder die halbe Summe $< 3R$.

Zusatz 2. Stellt man sich die Endpunkte der Seiten des sphärischen Dreieckes durch Sehnen verbunden, und über dem von diesen Sehnen begrenzten ebenen Dreiecke, als Basis, eine dreiseitige Pyramide errichtet vor, deren Spitze der Mittelpunkt C der Kugel ist; so erhellt, daß jede Seite, wie AD, das Maß des von den Kugelhalbmessern AC, DC, welche mit der Sehne AD eine Seitenfläche der Pyramide begrenzen, an C gebildeten Winkels sey. Da eben diese Halbmesser AC, DC Durchschnittslinien sind, in welchen sich nämlich die größten Kreise, von deren Peripherien die Seiten des sphärischen Dreiecks Theile sind, einander schneiden; so sagt man auch: Jede Seite, wie AD, ist das Maß eines geradlinigen Winkels, der von den Durchschnittslinien an C gebildet wird, in welchen die Ebene des

Bogens AD die 2 andern Ebenen der Bogen oder Seiten AE, DE des sphärischen Dreieckes ADE schneidet.

Zusatz 3. Es ist also nach Geom. §. 160. Zus. 3. die Summe der 3 Seiten des sphär. Dreieckes $< 4Q$ und eine Seite ist $<$ als die Summe der zwei andern Seiten.

Zusatz 4. Jede Seite des sphärischen Dreieckes wird, wie jeder Winkel, $< 2Q$ vorausgesetzt. Denn ist eine Seite wie ILMP des Dreieckes, dessen 2 andere Seiten sind AP, PI, $> 2Q$; so sind die Stücke dieses Dreieckes theils dieselben, wie die des Dreieckes API, theils werden sie aus den des letzteren bestimmt, indem z. B. die Seite PI die Ergänzung von ILMP ist. Dasselbe erhellt auch schon daraus, daß sich größte Kreisbogen, wie AD, AE, nur in einem Abstande $= 2Q$ von ihrem Ursprunge (in A) an schneiden, demnach die Bogen ADB, AEB kein sphärisches Dreieck einschließen. Soll daher ein solches entstehen, so müssen diese Bogen AD, AE, ehe sie verlängert B erreichen, von einem dritten größten Kreisbogen, wie DE, geschnitten werden.

§. 39. Erklärung. Das sphärische Dreieck T', dessen jede Seite das Supplement des ihr gleichsam gegenüberstehenden Winkels eines andern sphärischen Dreieckes T, und dessen jeder Winkel das Supplement der ihm gleichsam gegenüberliegenden Seite eben dieses Dreieckes T ist, heißt Polar- oder Supplementär-Dreieck.

Konstruktion des Polardreieckes. In Fig. 20. sey jede Seite des Dreieckes T oder ABC $< Q$; man verlängere sie so, daß AD, AE, BF, BG, ... Quadranten werden. Legt man durch die Endpunkte D und E, F und G, ... größte Kreisbogen; so ist A'B'C' ($= T'$) das Polardreieck für T. Denn der Punkt A ist der Pol des Bogens C'B' (§. 37. 3.), folglich steht der Punkt B', wie jeder andere Punkt dieses Bogens, vom Pole A um Q ab (§. 37. 2.). Nun ist eben so C der Pol des Bogens A'B', folglich steht B' auch von C um Q ab, demnach ist B', als von C und A um Q abstehend, der Pol der Seite AC. Auf gleiche Weise zeigt man, daß auch A' der Pol der Seite BC, und C' der Pol der Seite AB sey.

Daher nach §. 37. 2. $B'D = Q = C'E$, d. i. $B'D + ED + DC'$ oder $B'C' + ED = 2Q$; aber $ED =$ dem Winkel A (§. 37. 8.), folglich $B'C' + A$ oder $a' + A = 2Q$; d. i. die Seite a' des Dreieckes T' ist das Supplement des Winkels A. Auf gleiche Weise wird bewiesen, daß auch $b' + B$, wie $c' + C = 2Q$ sey.

Weil endlich $EA = Q = BG$ ist, so hat man $EA + BA + AG$ oder $EG + c = 2Q$; aber EG ist das Maß des Winkels C', folglich ist $C' + c = 2Q$. Eben so ist sowohl $A' + a$, als $B' + b = 2Q$; d. i. jeder Winkel in T' ist das Supplement der ihm gegenüberliegenden Seite des Dreieckes T, und umgekehrt; man kann daher sagen: Eines dieser Dreiecke ist des Andern Supplement- oder Polar-Dreieck.

Zusatz 1. Auch hieraus erhellt 1), daß, weil $A + B + C + a' + b' + c' = 6Q$ oder $6R$ ist, $A + B + C < 6R$, oder die halbe Summe der 3 Winkel $< 3R$ sey (vergl. §. 38. Zus. 1.); 2) daß aber, weil $a' + b' + c' < 4Q$ ist, $A + B + C > 2R$, oder die halbe Summe der 3 Winkel des sphärischen Dreieckes immer $> R$ sey.

Zusatz 2. Im sphärischen Dreiecke können also zwischen rechten, stumpfen und spitzen Winkeln alle Combinationen Statt finden, welche die Summe der 3 Winkel $> 2R$, aber $< 6R$ geben; so können z. B. 2, auch 3 rechte Winkel im sphärischen Dreiecke seyn. Allein wenn z. B. im Dreiecke HAI (Fig. 19.) der Winkel $AHI = AIH = R$, so sind nach §. 37. 4. die Seiten AH, AI Quadranten, A der Pol des Bogens HI, dieser demnach das Maß des dritten Winkels A (§. 37. 8.). Dieses gilt auch, wenn man umgekehrt die Seiten AH, AI als Quadranten annimmt, in welchem Falle die Winkel H und I rechte sind. Ist daher in einem sphärischen Dreiecke jeder Winkel ein rechter, so ist auch jede Seite ein Quadrant, und umgekehrt.

Hiedurch ist klar, daß die Resolution eben solcher Dreiecke keine Schwierigkeit darbiete, daß demnach das sphärische Dreieck, das einen rechten und 2 schiefe Winkel hat (nach der Analogie mit dem ebenen Dreiecke — kurz das rechtwinkelige sphärische Dreieck genannt), der Hauptgegenstand der Resolution sphärischer rechtwinkeliger Dreiecke sey.

Uebrigens heißt auch hier die dem rechten Winkel gegenüberstehende Seite Hypotenuse, aber die 2 andern Seiten erhielten den Namen „Perpendikel.“

Zusatz 3. Auch folgt, daß in jedem sphärischen Dreiecke, z. B. BDE (Fig. 19.), der äußere Winkel AED kleiner, als die Summe der 2 opponirten innern Winkel, d. i. $< (B + EDB)$ sey. Denn $AED + DEB = 2R$, aber $(B + EDB + DEB) > 2R$ (Zus. 1.), also auch $> (AED + DEB)$, folglich $(B + EDB) > AED$ (vergl. Geom. §§. 39. 57.).

§. 40. Erklärung. Entgegengesetzte, symmetrische Kugeldreiecke ABD, abd (Fig. 21.) heißen diejenigen, deren eines ABD über dem andern und hinter dem größten Kreise ADad liegt, und deren anderes abd vor dem ersten ABD und hinter dem größten Kreise BDbd liegt, so, daß die Scheitel der sich entsprechenden Winkel dieser Dreiecke um einen Kugeldurchmesser von einander abstehen.

Konstruktion. Es sey auf der, in Beziehung auf den liegenden Kreis ABabA, obern Kugelhälfte das Dreieck ABD, dessen Spitze in D ist, gebildet. Man ziehe die Kugeldurchmesser Aa, Bb, Dd und verbinde ihre Endpunkte a, b, d durch Bogen größter Kreise; so ist das von diesen Bogen auf der untern Kugelhälfte eingeschlossene Dreieck abd, dessen Spitze in d ist, das dem Dreiecke ABD entgegengesetzte. Denn diese Bogen ab, ad, bd sind, wie AB, AD, BD nur Theile der Peripherien derselben größten Kreise, weil sich je 2 größte Kreisbogen, z. B. AD und BD, die sich in dem Endpunkte D des Kugeldurchmessers schneiden, sich verlängert in einem Abstande $= 2Q$ von D, d. i. auch im andern Endpunkte d desselben Durchmessers Dd schneiden.

Zusatz 1. Aus dieser Konstruktion folgt zugleich, daß sowohl die gleichnamigen Seiten, wie AB, ab, . . ., als die gleichnamigen Winkel, wie D, d, . . . dieser Dreiecke gleich seyen, diese folglich sich nur hinsichtlich ihrer Lage unterscheiden. Demungeachtet kann man sie nicht kongruent nennen, indem das Dreieck abd, auch auf die obere Halbkugel verschoben gedacht, sich doch mit ABD nicht deckt, wenn es nicht zugleich umgewendet wird, was wohl bei ebenen, nicht aber bei sphärischen

Dreiecken geschehen darf. Denn dieser Seiten sind nur Theile größter Kreisperipherien, welche als auf fixe Punkte der Kugel bezogen, eine bestimmte Lage und eben dadurch eine bestimmte Bedeutung haben.

Zusatz 2. Auch können diejenigen sphärischen Dreiecke auf derselben Kugelhälfte entgegengesetzt heißen, welche von den Bogen zweier sich schneidenden größten Halbkreise und dem Bogen eines größten Kreises begrenzt werden, der als Halbirungskreis der Kugel betrachtet wird. Man stelle sich nämlich diesen Kreis BDEB (Fig. 22.) in der Papier-Ebene, daher die eine Kugelhälfte über jene liegend vor; so sind, wenn Ee und BA zwei halbe, sich in C schneidende, größte Kreise vorstellen, die Dreiecke ECA und BCe auf derselben Kugelhälfte sich entgegengesetzt.

Allein diese Dreiecke sind nicht auch symmetrische. Denn nebst den gleichen Scheitelwinkeln sind nur noch die Seiten Be, AE nothwendig gleich, weil diese Bogen die Maße der Scheitelwinkel sind, welche von den in der Ebene des Kreises BDAB liegenden Durchmessern AB, AE am Kugelmittelpunkte gebildet werden. Die 2 andern, sich entsprechenden Dreieckswinkel sind wechselseitige Supplemente von einander. Indem sich nämlich der Halbkreis eE unter gleichen Winkeln zu eDAE neigt, oder CEA = CeD, aber CeD + BeC = 2R ist; so ist auch CEA + BeC = 2R. Eben so ergänzt CAE den Winkel CBe zu 2R.

§. 41. Lehrsätze. Zwei sphärische, auf derselben Kugeloberfläche beschriebene, Dreiecke sind entweder kongruent oder symmetrisch (wechselseitig gleichseitig und gleichwinkelig), wenn sie 1) einen Winkel gleich und die diesen umschließenden Seiten wechselseitig gleich haben; oder 2) wenn die an einer gleichen Seite liegenden Winkel wechselseitig gleich; oder 3) wenn die Dreiecke wechselseitig gleichseitig, oder 4) wechselseitig gleichwinkelig sind.

Beweis. Dieser kann in Ansehung der 3 ersten Sätze auf ähnliche Weise, wie für die Kongruenz ebener geradliniger Dreiecke (Geom. §. 35. 37. 41.) geführt werden, und die Wahr-

heit des vierten Satzes folgt mit Hülfe der konstruirten Polardreiecke aus dem dritten Satze.

Daß aber nach Satz 1. der eingeschlossene Winkel (wie bei ebenen Dreiecken — vergl. Geom. §. 51. Anmerk.) gleich seyn müsse, erhellt durch die Konstruktion:

Im Dreiecke ADE (Fig. 25.) sey der Winkel D spitz. Man lege durch AC einen Kreis senkrecht auf den, der zum Theile von DE begrenzt ist, so daß also die Winkel bei F rechte sind. Man nehme ferner eF = EF und lege einen größten Kreis durch eAC; so entsteht ein zweites Dreieck ADe, das mit ADE die Seite AD = AD und Ae = AE (indem nach Satz 1. die in F rechtw. Dreiecke kongruent sind) und den von jenen Seiten nicht eingeschlossenen Winkel D = D hat, und doch ist die dritte Seite De nicht = DE, weder der Winkel DAe = DAE. Auch ist nicht der Winkel AeD = AED, indem AED + AEF = 2R, aber AEF = AeF, folglich auch AED + AeD = 2R, d. i. AeD nur das Supplement von AED ist.

Eben so erhellt, daß der Satz 2. nicht, wie für ebene Dreiecke (Geom. §. 57. Zus. 3.), erweitert werden könne. Denn die Dreiecke ADE, Ade haben eine Seite gleich, nämlich AE = Ae, den Winkel AED = Aed (weil AED + AeD = 2R = AeD + Aed) und den (nicht anliegenden) Winkel D = d, ohne daß die Kongruenz der Dreiecke, oder die wechselseitige Gleichheit der übrigen Stücke folge; so ist Ad > AD, und auch dAe und DAE, de und DE sind nicht nothwendig gleich.

§. 42. Lehrsatz. In dem gleichschenkeligen sphärischen Dreiecke sind die Winkel an der Grundseite gleich, und umgekehrt.

Beweis. Im Dreiecke ABC (Fig. 19.) sey die Seite c = b. Man schneide von A aus auf c und b gleiche Theile Am = An ab und ziehe die größten Kreisbogen Bn, Cm; so sind die Dreiecke ABn, ACm vermöge §. 41. Satz 1. gleich, Bn = Cm, daher auch die Dreiecke BCn, BCm nach §. 41. Satz 3. gleich, und der Winkel mBC = nCB, d. i. die Winkel an der Basis BC gleich.

Und umgekehrt: wenn nämlich B = C, so ist auch b' = c' (§. 39.), folglich, wie vorhin auch B' = C', daher auch b und c, als die Supplemente dieser Winkel, gleich.

Zusatz 1. Daher ist ein sphärisches gleichseitiges Dreieck auch gleichwinkelig, und umgekehrt (vergl. Geom. §. 39. Zus. 2.).

Zusatz 2. Verbindet man an der gemeinschaftlichen Basis zwei gleichschenkelige Dreiecke und legt durch ihre Spitzen einen größten Kreisbogen; so beweist man auf gleiche Weise, wie Geom. §. 44., daß dieser Bogen jeden Winkel an der Spitze, so wie auch die Grundseite und die ganzen Dreiecke halbire und auf die Basis senkrecht sey.

§. 43. Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreiecke steht dem größeren Winkel eine größere Seite gegenüber, und umgekehrt.

Beweis. Im Dreiecke dBC (Fig. 22.) sey der Winkel $BdC > C$; so kann man innerhalb des Dreiecks einen größten Kreisbogen dp durch den Scheitel d so legen, daß der Winkel $pdC = C$ wird. Dann ist auch $dp = Cp$ (§. 42.). Aber $dp + pB > dB$ (§. 38. Zus. 3.), daher auch $Cp + bB$, d. i. $CB > dB$.

Der umgekehrte Satz wird nun mit Hülfe des Polardreieckes leicht bewiesen.

b. Gesetze der Resolution rechtwinkeliger Kugeldreiecke.

§. 44. Allgemeine Proportion:

In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinusse der Winkel, wie die Sinusse der diesen Winkeln opponirten Seiten: d. i.

$$\sin A : \sin B = \sin a : \sin b, \text{ oder } \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}.$$

Beweis. Es sey das sphärische Dreieck ABC (Fig. 24.), M der Kugelmittelpunkt, daher AM, wie BM, CM Kugelhalbmesser. Man fälle vom Scheitel C aus das Perpendikel CP auf die Bogenebene ABM und lege 2 geradlinige ebene Dreiecke CPE, CPF so durch CP, daß der Halbmesser AM senkrecht auf die Ebene CPE und BM senkrecht auf CPF werde. Unter dieser Voraussetzung ist 1) $CE = \sin b$ und $CF = \sin a$;

2) weil CE, liegend in der Bogenebene ACM, und PE, liegend in der Bogenebene ABM, senkrecht auf AM sind, in welchem Halbmesser sich diese beiden Bogenebenen schneiden; so ist der Winkel PEC der Neigungswinkel beider Ebenen (Geom. §. 156.), folglich gleich dem sphärischen Winkel A (§. 37. 7.). Aus demselben Grunde ist auch Winkel CFP = B. Nun ist nach §. 26. 1.

im △ CPE, rechtw. in P, $r : \sin CEP = CE : CP$,
im „ CFP, „ „ „ „, $\sin CFP : r = CP : CF$;
folglich durch Substitution: $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$.

Auf gleiche Art wird dieses hinsichtlich der andern Winkel und der ihnen opponirten Seiten bewiesen.

Zusatz. Ist also einer der Winkel z. B. A ein rechter, daher a die Hypotenuse; so gilt die spezielle Proportion:

(1) $r : \sin B = \sin h : \sin b$, oder
$r : \sin C = \sin h : \sin c$;

d. i. der Tafel-Halbmesser (oder Sinus totus = r = 1) verhält sich zum Sinus eines schiefen Winkels, wie der Sinus der Hypotenuse zum Sinus des jenem Winkel opponirten Perpendikels (analog mit (1) im §. 26. und in gleichen Fällen anwendbar).

§. 45. Zweite und dritte spezielle Proportion:

(2) In jedem rechtwinkeligen Kugeldreiecke verhält sich der Halbmesser zum Cosinus eines der schiefen Winkel, wie die Tangente der Hypotenuse zur Tangente des an jenem Winkel liegenden Perpendikels (analog mit der Proportion 2) unter 1. §. 26.); und

(3) Der Halbmesser verhält sich zum Sinus eines der Perpendikel, wie die Tangente des an diesem liegenden schiefen Winkels zur Tangente des diesem Winkel opponirten Perpendikels (analog mit 2. im §. 26.).

Beweis. Es sey ABC (Fig. 25.) das in A rechtwinkel. Dreieck und AM, wie BM, CM Kugelhalbmesser. Fällt man aus C das Loth CD auf AM, legt durch dasselbe eine Dreiecksebene CDE so, daß BM auf sie senkrecht wird; so ist so-

wohl der Winkel CEM, als DEM und CDM ein rechter. Weil ferner der Halbmesser AM die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der Bogenebenen BAM, CAM ist; so ist die auf AM senkrechte CD auch senkrecht auf die Ebene BAM, folglich auch auf DE, welche in dieser Ebene liegt; oder der Winkel CDE ist ebenfalls ein rechter. Endlich ist (wie im §. 44. gezeigt wurde) der Winkel CED = dem sphärischen Winkel B. Nun ist nach §. 26. 2.

im △ MCE, rechtw. in E, $ME : CE = r : \text{tang } h$,
" " MED, " " " ", $ME : DE = r : \text{tang } c$;
daher " " " ", $CE : DE = \text{tang } h : \text{tang } c$. Aber
" " CED, " " in D, $CE : DE = r : \sin EDC$
$= r : \cos CED$; also

$$(2)\quad \begin{matrix} r : \cos B = \text{tang } h : \text{tang } c; \text{ eben so} \\ r : \cos C = \text{tang } h : \text{tang } b. \end{matrix}$$

Auf gleiche Weise hat man ferner aus jedem der Dreiecke CMD, CED, DME resp. die Proportionen:

$MD : DC = r : \text{tang } b$,
$DC : DE = \text{tang } B : r$;
daher $MD : DE = \text{tang } B : \text{tang } b$. Aber
$MD : DE = r : \sin c$, folglich

$$(3)\quad \begin{matrix} r : \sin c = \text{tang } B : \text{tang } b, \text{ oder} \\ r : \sin b = \text{tang } C : \text{tang } c. \end{matrix}$$

Zusatz 1. Statt (2) und (3) kann man resp. auch setzen:

(2') $r : \cos B = \cot c : \cot h$;
(3') $r : \sin b = \cot c : \cot C$ (nr. 25.).

Zusatz 2. Mit Hülfe dieser drei Hauptproportionen leitet man, zum Behufe der direkten Auflösung mancher Aufgaben, noch drei andere, wie folgt, ab:

Es sey (Fig. 26.) jede Seite des in A rechtwinkel. Dreieckes ABC < Q. Verlängert man sie (nieder- oder aufwärts), bis jede = Q wird, und verbindet die Endpunkte durch größte Kreisbogen; so entsteht ein neues, in A' (oder A") rechtwinkeliges, sogenanntes Complementär-Dreieck CB'A' (oder BC"A"). Denn da B der Pol des Bogens B'D' ist, so sind die Winkel bei A' rechte (§. 37. 3.) Weil folglich B' sowohl von B, als

A, um Q absteht, also Pol des Bogens BD ist; so ist auch BD = Q und die Seite A'B' das Complement von A'D oder des Winkels B; d. i. c' + B = R. Eben so ist der Bogen AD das Maß des Winkels B', daher B' + c = R, wie h' + b = R und h + b' = R, und nur der Winkel A = A' und der Winkel A'CB' = ACB.

Also ist im Dreiecke A'B'C nach (1) §. 44. Zus.

r : sin B' = sin h' : sin b'; folglich

(4) r : cos c = cos b' : cos h;

eine Gleichung zwischen den 3 Seiten. Ferner

r : sin A'CB' = sin h' : sin c'; daher

(5) r : sin C = cos b : cos B;

eine Gleichung zwischen 2 Winkeln und 1 Perpendikel. Endlich

r : sin b' = tang A'CB' : tang c' (nach (5));

daher (6) r : cos h = tang C : cot B:

eine Gleichung zwischen den schiefen Winkeln und der Hypotenuse.

Zusatz 3. Mittelst jeder dieser 6 Proportionen wird unter den 3 Stücken des Dreieckes, auf welche sie spricht, wenn 2 gegeben sind, das dritte gefunden. Es sind daher mit Hülfe dieser Proportionen, oder der Gleichungen, die an die Stelle jener treten, im Ganzen 18 Fälle auflösbar. Da es aber in (4) und (2') hinsichtlich der 3 Stücke: Hypotenuse und 2 Perpendikel, oder 2 Winkel — gleichgültig ist, welches von beiden letzteren Stücken gesucht werde; so hat man nur 16 Hauptfälle zu resolviren.

Die vollständige Darstellung dieser Resolution begreift jedoch 10 Aufgaben, jede mit 3 Fällen, also im Ganzen mit 30 Fällen; weil nämlich, da der rechte Winkel ohnedieß immer gegeben oder bekannt ist, aus den übrigen 5 Stücken des Dreiecks nur jedesmal zwei zu geben sind, wodurch man $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ d. i. 10 Aufgaben erhält.

Diese vollständige Darstellung ist durch die nach dem Zus. 4. sogleich folgende Tafel gegeben, in welcher wir jene 16 Haupt-

fälle mit einem Sternchen bezeichnen, und statt der jedesmal citirten Proportion die daraus für den Halbmesser = 1 abgeleitete Gleichung setzen.

Zusatz 4. Zur Entscheidung der Zweideutigkeit, ob das Gesuchte > oder < Q zu nehmen sey, reichen in den meisten Fällen folgende Kriterien hin:

1. Jeder der schiefen Winkel ist gleichartig mit seinem opponirten Perpendikel (d. i. jener > oder < R, wenn dieses > oder < Q ist).

Es sey in dem in A rechtwinkel. Dreiecke ABC (Fig. 27.) z. B. das Perpendikel AB < Q; so ist auch der Winkel ACB < R. Denn verlängert man AB bis zum Quadranten (= BD) und legt durch D und C den größten Kreisbogen DC; so ist D der Pol von AC und der Winkel ACD = R (§. 57. 3.), demnach ACB < R. — Ist aber AB > Q; so sey AE der Quadrant, dann ist ACE = R, folglich ACB > R. — Und umgekehrt: ist z. B. Winkel ACB < R, so wird auch AB < Q seyn. Denn man lege einen größten Kreisbogen so, daß er senkrecht in C den Bogen AC schneidet; so ist der Punkt D, in welchem sich die auf AC senkrechten, verlängerten Bogen AB, CD schneiden, der Pol von AC (§. 57. 4.), folglich ist AD = Q und AB < Q. Eben so für den 4. Fall.

2. Sind entweder die Perpendikel oder die schiefen Winkel gleichartig; so ist die Hypotenuse < Q, und umgekehrt.

Es sey vorerst AB, wie AC < Q, demnach vermöge 1. auch Winkel BCA, wie ABC < R; so ist, wenn man ABD = Q macht und DC zieht, der Winkel CDB > R und im Dreiecke ADC der Winkel CDA < R, folglich im Dreiecke CBD die Seite CD > BC (§. 43.); aber CD = Q, also die Hypotenuse BC < Q.

Ist zweitens jedes der Perpendikel > Q, demnach auch jeder der schiefen Winkel > R; so beweist man, indem E zum Pol von AC gemacht wird, auf ähnliche Weise, daß abermals BC < Q sey.

Eben so leicht erhellt die Wahrheit des umgekehrten Satzes. Es sey die Hypotenuse z. B. < Q, aber AB > Q,

so wird auch $AC > Q$ seyn. Denn macht man den Theil $AE = Q$, so daß E der Pol von AC, auch $CE = Q$ und CA das Maß des Winkels CEA ist; so ist dieser Winkel mit dem Winkel CBA gleichartig, indem jeder mit dem Perpendikel AC gleichartig ist. Ferner ist der Winkel $BEC < CBE$, weil $BC < EC < Q$ ist. Aber der Winkel BEC nicht $> R$, weil sonst CEA, demnach auch $CBA < R$, folglich auch die Seite $CE < CB < Q$ seyn müßte. Also ist Winkel $BEC < R$, demnach CEA, wie $CBA > R$; aber AC mit CBA gleichartig, also ist $AC > Q$. — Auf ähnliche Art im 2. Falle.

3. Sind die Perpendikel, demnach auch die schiefen Winkel ungleichartig; so ist die Hypotenuse $> Q$.

Es sey wieder $AB > Q$, $AC < Q$, demnach der Winkel AEC, wie $ABC < R$; so ist der Winkel $BEC > R$, folglich im Dreiecke BCE die Seite $BC > CE$, d. i. die Hypotenuse $> Q$.

Und umgekehrt: Wenn nämlich $BC > Q$, und man setzt $AB < Q$; so wird $AC > Q$ seyn. Denn wird AB zum Quadranten verlängert, so daß D der Pol von AC, $DC = Q$ und AC das Maß des Winkels D wird, welcher mit ABC gleichartig ist; so ist im Dreiecke BCD der Winkel $D > DBC$ (weil ex hyp. $BC > Q > CD$ ist). Ist daher $DBC = R$, so ist $D > R$, folglich auch $AC > Q$; ist aber $DBC < R$, daher der Nebenwinkel $CBA > R$, so ist auch $D > R$, folglich auch $AC > Q$.

4. In denjenigen Fällen, für deren Resolution solche Proportionen oder Gleichungen anzuwenden sind, welche trigonometrische Funktionen von verschiedenen Zeichen enthalten, kann man auch die Zweideutigkeit dadurch heben, daß man jenen Funktionen die gehörigen Zeichen beigibt, um aus der Zusammensetzung dieser Zeichen das Zeichen der gesuchten Funktion, sohin die Größe des gesuchten Stückes selbst zu erkennen.

Beispiel 1. Man sucht h aus b und c mittelst (4), nach welcher Proportion $\cos h = \cos b \,.\, \cos c$ ist. Vermöge 2. und 3. bleibt in diesem Falle nichts Zweifelhaftes; eben so nicht bei Anwendung der Zeichen, indem man hat entweder $\pm\cos b \,.\, \pm\cos c = +\cos h$, oder $\pm\cos b \,.\, \mp\cos c = -\cos h$. Eben so wird h unzweifelhaft mittelst (6) gefunden.

Beispiel 2. Mittelst der Proportion (5) hat man, die Zeichen beigebend,

1) $+\sin C \cdot \pm\cos b = \pm\cos B$; 2) $\frac{\pm\cos B}{\pm\cos b} = +\sin C$;

3) $\frac{\pm\cos B}{+\sin C} = \pm\cos b$. Bei 1) und 3) bleibt keine Zweideutigkeit, wie auch schon vermöge 1. erhellt; aber bei 2) verschwindet das Zweifelhafte nicht, indem + sin. nicht erkennen läßt, ob $C >$ oder $< R$ zu nehmen sey.

Wenn daher bloß Sinusse in die Proportion oder Gleichung eingehen; so können die Zeichen nichts entscheiden, und das Zweideutige, wenn es zu heben ist, verschwindet nur mit Hülfe der vorigen 3 Kriterien; so z. B. ist der aus der Proportion (1), nämlich: $r : \sin B = \sin h : \sin b$ — gesuchte Winkel oder das gesuchte Perpendikel vermöge 1. unzweideutig; aber h bleibt zweifelhaft. In diesem und in ähnlichen Fällen müssen denn die Bedingungen der Aufgabe selbst entscheiden.

Tafel über die Resolution rechtwinkeliger Kugeldreiecke.

Gegeben	Gesucht	Gleichung	das Gesuchte ist $< Q$
I. h, c	c	$\sin c = \sin h \cdot \sin C$ (1).	wenn $C < R$.
		$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} h \cdot \cos C$ (2).	
	b	oder	
		$\cot b = \frac{\cot h}{\cos c}$ (2').	wenn h, C gleichartig.
	B	$\operatorname{tang} B = \frac{\cot C}{\cos h}$ (6).	
II. h, c	C*	$\sin C = \frac{\sin c}{\sin h}$ (1).	wenn $c < Q$.
	B*	$\cos B = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} h}$ (2).	wenn h, c gleichartig.
	b*	$\cos b = \frac{\cos h}{\cos c}$ (4.)	
III. B, c	h*	$\cot h = \cos B \cdot \cot c$ (2).	wenn B und c gleichartig.
	b*	$\operatorname{tang} b = \sin c \cdot \operatorname{tang} B$ (3).	wenn $B < R$.
	C*	$\cos C = \sin B \cdot \cos c$ (5).	wenn $c < Q$.

Gegeben	Gesucht	Gleichung		das Gesuchte ist $< Q$
IV. B, b	h	$\sin h = \frac{\sin b}{\sin B}$	(1).	zweifelhaft.
	c	$\sin c = \frac{\tang b}{\tang B}$	(3).	
	C	$\sin C = \frac{\cos B}{\cos b}$	(5).	
V. C, c	h*	$\sin h = \frac{\sin c}{\sin C}$	(1).	zweifelhaft.
	b*	$\sin b = \frac{\tang c}{\tang C}$	(3).	
	B*	$\sin B = \frac{\cos C}{\cos c}$	(5).	
VI. C, b	h	$\cot h = \cot b \cdot \cos C$	(2).	wenn C, b gleichartig.
	c	$\tang c = \tang C \cdot \sin b$	(3).	wenn $C < R$.
	B	$\cos B = \sin C \cdot \cos b$	(5).	wenn $b < Q$.
VII. B, h	b*	$\sin b = \sin B \cdot \sin h$	(1).	wenn $B < R$.
	c*	$\tang c = \tang h \cdot \cos B$	(2).	wenn B, h gleichartig.
	C*	$\cot C = \tang B \cdot \cos h$	(6).	
VIII. h, b	c	$\cos c = \frac{\cos h}{\cos b}$	(4).	wenn h, b gleichartig.
	C	$\cos C = \frac{\tang b}{\tang h}$	(2).	
	B	$\sin B = \frac{\sin b}{\sin h}$	(1).	wenn $b < Q$.
IX. b, c	h*	$\cos h = \cos b \cdot \cos c$	(4).	wenn b, c gleichartig.
	B*	$\tang B = \frac{\tang b}{\sin c}$	(3).	wenn $b < Q$.
	C	$\tang C = \frac{\tang c}{\sin b}$	(3).	wenn $c < Q$.
X. B, c	h*	$\cos h = \frac{\cot C}{\tang B}$	(6).	wenn B, C gleichartig.
	b	$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$	(5).	wenn $B < R$.
	c*	$\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$	(5).	wenn $C < R$.

c. Gesetze der Resolution schiefwinkeliger sphärischer Dreiecke.

§. 46. Analog der Resolutions-Weise ebener schiefwinkeliger Dreiecke bedient man sich auch hier der rechtwinkel. Dreiecke, die durch das Fällen des Lothes im gegebenen sphärischen Dreiecke entstehen. Dieses Loth fällt in das Dreieck, wenn die Winkel an der Basis gleichartig sind; im entgegengesetzten Falle außerhalb des Dreieckes. Hievon überzeugt man sich leicht, wenn man in Fig. 22. die größten Halbkreise Ee, Dd durch den Punkt C der Kugeloberfläche so auf den liegenden Kreis gezogen denkt, daß die Winkel rechts an d, E, D, e spitz, daher die links, gleichsam gegen B zu liegenden, stumpf werden; wo denn der senkrechte Kreisbogen BCA innerhalb des Dreieckes CED, dessen Winkel an ED spitz oder gleichartig sind, aber außerhalb der Dreiecke dCE, DCe fällt, in deren jedem die Winkel an dE und De ungleichartig sind (vergl. Geom. §. 50. Zus. 3.).

Die Proportionen aber oder Gesetze, die nebst der allgemeinen Proportion (§. 44.)

$$(1)\quad \sin B : \sin C = \sin b : \sin c$$

es möglich machen, mit Hülfe der so entstehenden rechtwinkel. Dreiecke das schiefwinkelige Dreieck selbst zu resolviren, sind folgende:

(2). Die Cosinusse der Segmente p, q der Basis, auf die das Loth trifft, verhalten sich, wie die Cosinusse der anliegenden Seiten.

Beweis. Man fälle im sphärischen Dreiecke ABC (Fig. 28.) das Loth AD auf BC; ziehe zum Kugelmittelpunkte M die Halbmesser BM, DM, CM; fälle aus A auf die Ebene des Bogens BC das Perpendikel AI; lege durch dieses die ebenen Dreiecke AGI, AHI so, daß BM, CM auf sie senkrecht sind, und ziehe die Senkrechten DE, DF; so ist nun, weil auch IG auf BM und IH auf CM senkrecht ist, $\triangle$ GIM $\sim$ $\triangle$ EDM und $\triangle$ MIH $\sim$ $\triangle$ MDF, daher

$$ME : MG = MD : MI \text{ und}$$
$$MF : MH = MD : MI$$
$$\text{folglich } ME : MF = MG : MH,$$

d. i. (2) $\cos q : \cos p = \cos AB : \cos AC$;

oder für Fig. 29., indem man CD und BD wieder resp. mit p und q bezeichnet,

(2′) $\cos p : \cos q = \cos b : \cos c$;

und für Fig. 30., in welcher $C <$ und $B > R$ seyn soll, folglich die Hypotenuse $AC > Q$ (§. 45. 3.) ist, und weil nun BD ($= q$) gegen DB in Fig. 29. eine entgegengesetzte Lage hat, erhält man

(2″) $\cos p : -\cos q = -\cos b : \cos c$.

(3). Die Sinusse der Segmente verhalten sich, wie die Cotangenten der anliegenden Winkel.

Beweis. In dem in I. rechtwinkl. △ AGI ist $\text{tang IAG} = \cot G = \cot B$; eben so im △ AHI ist $\text{tang HAI} = \cot H = \cot C$ (vergl. §§. 44. 45). Daher nach §. 26. 2.

$$\text{im △ AGI } r : \left\{\begin{matrix}\text{tang IAG}\\ \cot B\end{matrix}\right\} = AI : GI,$$

$$\text{im △ HAI } \left\{\begin{matrix}\text{tang HAI}\\ \cot C\end{matrix}\right\} : r = HI : AI.$$

$$\text{Also } \cot C : \cot B = HI : GI.$$

Aber weil, wie vorhin unter 2., $HI : GI = DF : DE = \sin p : \sin q$, so hat man auch für Fig. 29.

(3) $\sin p : \sin q = \cot C : \cot B$

oder (3′) $\sin p : \sin q = \text{tang } B : \text{tang } C$, und für Fig. 30., wie oben, (3″) $\sin p : -\sin q = -\text{tang } B : \text{tang } C$.

Aus (2′) wird nach allgem. Größenl. §. 115. abgeleitet:

$\cos p + \cos q : \cos p - \cos q = \cos b + \cos c : \cos b - \cos c$;

oder $\cot \frac{1}{2}(p+q) : \text{tang } \frac{1}{2}(p-q) = \cot \frac{1}{2}(b+c) : \text{tang } \frac{1}{2}(b-c)$.

nr. 99. Hieraus (4) $\text{tang } \frac{1}{2}(b+c) : \text{tang } \frac{1}{2}(p+q) = \text{tang } \frac{1}{2}(p-q) : \text{tang } \frac{1}{2}(b-c)$. Oder weil in Fig. 29. $\frac{1}{2}(p+q) = \frac{1}{2}a$ und in Fig. 30. $\frac{1}{2}(p-q) = \frac{1}{2}a$; so hat man allgemein und analog mit der Proportion im §. 30.

(5) $\text{tang } \frac{1}{2}a : \text{tang } \frac{1}{2}(b+c) = \text{tang } \frac{1}{2}(b-c) : \text{tang } \frac{1}{2}(p+q)$.

Es sey in Fig. 29. der W. $BAD = m$ und W. $DAC = n$; so ist nach §. 45. 2.

$$r : \cos m = \text{tang } c : \text{tang } AD,$$
$$\cos n : r = \text{tang } AD : \text{tang } b.$$

Also (6) $\cos m : \cos n = \text{tang } b : \text{tang } c$.

Ferner nach §. 45. Zuſ. 2. (5)

$$r : \sin m = \cos AD : \cos B,$$
$$\sin n : r = \cos C : \cos AD.$$

Daher (7) $\sin m : \sin n = \cos B : \cos C$. Für Fig. 30. wieder (7′) $\sin CAD : -\sin DAB = \cos C : -\cos B$.

Aus (7) leitet man auf dieſelbe Art, wie vorhin aus (2′) vermöge nr. 98. 99. die Proportion ab:

(8) $\cot \frac{1}{2}(B+C) : \tang \frac{1}{2}(B-C) = \tang \frac{1}{2}(m+n) : \tang \frac{1}{2}(m-n)$; oder

(8′) $1 : \tang \frac{1}{2}(B+C) . \tang \frac{1}{2}(B-C) = \tang \frac{1}{2}(m+n) : \text{t.} \frac{1}{2}(m-n)$. nr. 25.

Man findet auf gleiche Weiſe aus (1)

(9) $\tang \frac{1}{2}(B+C) : \tang \frac{1}{2}(B-C) = \tang \frac{1}{2}(b+c) : \text{t.} \frac{1}{2}(b-c)$.

Aus (3′) iſt

$\sin p + \sin q : \sin p - \sin q = \tang B + \tang C : \tang B - \tang C$; oder

(10) $\tang \frac{1}{2}(p+q) : \tang \frac{1}{2}(p-q) = \sin(B+C) : \sin(B-C)$. nr. 131. 132.

Oder (10′) $\sin \frac{1}{2}(B+C) . \cos \frac{1}{2}(B+C) : \sin \frac{1}{2}(B-C) . \cos \frac{1}{2}(B-C) = \tang \frac{1}{2}(p+q) : \tang \frac{1}{2}(p-q)$. nr. 146.

Endlich auf gleiche Weiſe und nach nr. 99. iſt aus (6)

(11) $\sin \frac{1}{2}(b+c) . \cos \frac{1}{2}(b+c) : \sin \frac{1}{2}(b-c) . \cos \frac{1}{2}(b-c) = 1 : \tang \frac{1}{2}(m+n) . \tang \frac{1}{2}(m-n)$.

Anmerkung. Daß dieſe Proportionen für den gewöhnlichen Gebrauch zur Reſolution der fraglichen Dreiecke hinreichen, werden wir unten bei Aufzählung der Hauptfälle nachweiſen. Hier erwähnen wir nur noch des beſondern Falles, daß, wenn eine Seite des ſchiefwinkel. Kugeldreieckes ein Quadrant, das entſprechende Polardreieck folglich rechtwinkelig iſt, durch Reſolution des letztern (nach §§. 44. 45.) auch die einzelnen Stücke des erſtern erkannt werden.

Beiſpiel. In Fig. 20. ſey A der Nordpol, B die von A um 90^0 entfernte Stadt Quito; An der Meridian von Würzburg und nB der zu beſtimmende Abſtand Würzburg's von Quito. Weil nun BC einen Aequatorbogen, daher Cn die Breite Würzburg's $= 49^0\ 46'$ vorſtellt; ſo kennt man im Dreiecke ABn die Seite $An = 90^0 - 49^0\ 46' = 40^0\ 14'$. Eben ſo

kennt man den Winkel A, weil BC, als dessen Maß, nur der Unterschied der Längen beider Städte, d. i. $= 299^0\,45' - 27^0\,35' = 272^0\,10'$; oder hinsichtlich der trigonometrischen Funktion ist $A = 360^0 - 272^0\,10' = 87^0\,50'$.

Statt nun ein Polardreieck A'B'n', in welchem wegen AB = Q der Winkel $n' = R$ ist, eigens zu konstruiren, setzt man kurz den Winkel $AnB = 90^0$; den Winkel $ABn = 180^0 - 40^0\,14' = 139^0\,46'$ und eben so $Bn = 180^0 - A = 180^0 - 87^0\,50' = 92^0\,10'$.

Nun kennt man in dem in n (oder n') rechtwinkel. Dreiecke ABn auch das Perpendikel Bn (oder B'n'), als das Supplement von A, mit dem daran liegenden Winkel ABn, folglich hat man den Winkel A (eigentlich A' (im Polardr.), dessen Supplement das gesuchte Bn ist) nach (5) im Zus. 2. §. 45., nämlich

$$r : \sin ABn = \cos Bn : \cos A,$$

und durch Rechnung:

$$\log \sin ABn = \log \cos 49^0\,46' = 9{,}8101666$$
$$\log \cos Bn = \log \cos 87^0\,50' = 8{,}5775660$$
$$\log \cos A = 8{,}3877326.$$

Also $A = 88^0\,25'$. Da aber cos Bn in der Proportion — cos Bn ist, folglich A stumpf $= 91^0\,37'$; so ist dessen Supplement, d. i. der gesuchte Abstand $= 88^0\,25' = 1325{,}75$ geogr. Meilen, wenn man 15 Meilen auf 1^0 rechnet.

§. 47. **Gleichung, in welche 2 Winkel B, C und 2 Seiten a, b eingehen, welche einen jener Winkel, nämlich C, einschließen, um daraus den andern Winkel B, oder die Seite b zu finden.**

Es sey wieder in Fig. 29. das Segment CD = p und DB = q. Man hat nach §. 45. (2), $r = 1$ gesetzt:

$$\text{tang } p = \text{tang } b \cdot \cos c. \quad \text{Ferner ist}$$

$$\sin q = \sin(a - p) = \sin a \cdot \cos p - \cos a \cdot \sin p. \quad \text{nr. 66.}$$

Oder Alles durch sin p dividirt:

$$\frac{\sin q}{\sin p} = \frac{\sin a}{\text{tang } p} - \cos a. \quad \text{nr. 18.}$$

Substituirt man den vorigen Werth von tang p und den Werth von $\frac{\sin q}{\sin p}$ aus (3) §. 46., so ist

$$\frac{\text{tang C}}{\text{tang B}} = \frac{\sin a}{\text{tang b} \cdot \cos C} - \cos a,$$ und mit tang B . tang b . cos C multiplizirt, dann tang B, oder tang b gesucht, hat man

$$(12)\ \text{tang B} = \frac{\text{tang b} \cdot \sin C}{\sin a - \cos a \cdot \text{tang b} \cdot \cos C}$$

$$= \frac{\sin C}{\sin a \cdot \cot b - \cos a \cdot \cos C}$$

$$\text{oder } (12')\ \cot B = \frac{\sin a \cdot \cot b}{\sin C} - \cos a \cdot \cot C. \text{ Und}$$

$$(13)\ \text{tang b} = \frac{\sin a \cdot \text{tang B}}{\sin C + \cos a \cdot \cos C \cdot \text{tang B}}$$

$$= \frac{\sin a}{\sin C \cdot \cot B + \cos a \cdot \cos C}.$$

$$\text{Oder } (13')\ \cot b = \frac{\sin C \cdot \cot B}{\sin a} + \cos C \cdot \cot a.$$

Weil in Fig. 30. sin BD oder sin q = sin (p—a) ist; so erhellt, daß auch für diese Figur die vorigen Gleichungen, aber mit verwechselten Zeichen gelten.

Zusatz. Um 1) die Formel (12') für die logar. trigonom. Rechnung bequemer einzurichten, setze man $p = \varphi$, demnach ist, wie oben,

tang p oder tang φ = tang b . cos C, oder $\cot\varphi = \frac{1}{\cos C \cdot \text{tang b}}$, und φ als bekannt zu betrachten. Ferner ist

$$\frac{\sin a \cdot \cot b}{\sin C} = \frac{\sin a}{\text{tang b} \cdot \sin C}; \text{ aber } \frac{1}{\sin C} = \frac{\cot C}{\cos C},$$

folglich $\frac{\sin a}{\text{tang b} \cdot \sin C} = \frac{\sin a \cdot \cot C}{\cos C \cdot \text{tang b}}$. Und durch Subst. in (12')

$$\cot B = \sin a \cdot \cot C \cdot \frac{1}{\cos C \cdot \text{tang b}} - \cos a \cdot \cot C.$$

$$= \sin a \cdot \cot C \cdot \cot\varphi - \cos a \cdot \cot C.$$

$$= \cot C \left(\sin a \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \cos a\right).$$

$$= \frac{\cot C}{\sin\varphi} (\sin a \cdot \cos\varphi - \cos a \cdot \sin\varphi); \text{ also}$$

$$(12'')\ \cot B = \frac{\cot C}{\sin\varphi} \cdot \sin (a - \varphi). \text{ nr. 66.}$$

2). Zur bequemeren Einrichtung der Formel (15') stelle man sich aus C ein Perpendikel CD' auf c gefällt vor, und setze den Winkel $BCD' = \varphi$; so hat man nach (6) im Zus. 2. des §. 45.

$\text{tang}\,\varphi = \frac{\cot B}{\cos a}$; woraus φ bekannt und $\cot B = \text{tang}\,\varphi \,.\, \cos a$ ist.

Also $\cot b = \frac{\sin C \,.\, \text{tang}\,\varphi \,.\, \cos a}{\sin a} + \cos C \,.\, \cot a.$

$= \sin C \,.\, \text{tang}\,\varphi \,.\, \cot a + \cos C \,.\, \cot a.$

$= \frac{\cot a}{\cos \varphi} (\sin C \,.\, \sin \varphi + \cos \varphi \,.\, \cos C)$; also

(13") $\cot b = \frac{\cot a}{\cos \varphi} \,.\, \cos(C - \varphi)$. nr. 70.

§. 48. Gleichung zwischen den 3 Seiten und 1 Winkel.

Weil (Fig. 29.) $\cos CD$ oder $\cos p = \cos(a - q) = \cos a \,.\, \cos q + \sin a \,.\, \sin q$ (nr. 70.), oder, durch $\cos q$ dividirt,

$\frac{\cos p}{\cos q} = \cos a + \sin a \,.\, \text{tang}\,q$, aber

$\text{tang}\,q = \text{tang}\,c \,.\, \cos B$ (§. 45. (2)), und $\frac{\cos p}{\cos q} = \frac{\cos b}{\cos c}$ (nach (2') ist; so hat man durch Substitution

$\frac{\cos b}{\cos c} = \cos a + \sin a \,.\, \text{tang}\,c \,.\, \cos B$, und hieraus

(14) $\cos b = \cos a \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos B$, und

(15) $\cos B = \frac{\cos b - \cos a \,.\, \cos c}{\sin a \,.\, \sin c}$.

Da für Fig. 30. $\cos p = \cos(a + q)$; so gelten zwar dieselben Formeln auch in diesem Falle, aber, wie nr. 69. zeigt, mit verwechselten Zeichen.

Zusatz. Man kann auf die, im Zus. des vorherg. Paragraphen eingehaltene, Weise die Formel (14) transformiren, indem man $\varphi = q$ oder $\text{tang}\,\varphi = \text{tang}\,c \,.\, \cos B$ setzt. Hieraus hat man

$\cos B = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{tang}\,c} = \frac{\text{tang}\,\varphi \,.\, \cos c}{\sin a}$, folglich

$\sin c \cdot \cos B = \tang \varphi \cdot \cos c = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \cos c$; also durch Substitution und Reduction

$\cos b = \frac{\cos c}{\cos \varphi} (\cos a \cdot \cos \varphi + \sin a \cdot \sin \varphi)$, oder nach nr. 70.

(14') $\cos b = \frac{\cos c}{\cos \varphi} \cos (a - \varphi)$.

Diese Formel dient, um aus 2 mit dem eingeschlossenen Winkel B gegebenen Seiten a, c sogleich die dritte Seite zu finden.

§. 49. **Gleichung zwischen den 3 Winkeln und 1 Seite.**

In Fig. 29. ist cot CAD oder $\cot n = \cos b \cdot \tang C$ (§. 45. Zusatz 2. (6)); aber sin BAD oder $\sin m = \sin (A - n) = \sin A \cdot \cos n - \sin n \cdot \cos A$ (nr. 66.), daher

$\frac{\sin m}{\sin n} = \sin A \cdot \cot n - \cos A$, oder nach §. 46. (7)

$\frac{\cos B}{\cos C} = \sin A \cdot \cos b \cdot \tang C - \cos A$ (durch Subst.).

Also (16) $\cos B = \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b - \cos A \cdot \cos C$, und

(17) $\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$.

Zusatz 1. Um die Formel (16)

$$\cos A = \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a - \cos B \cdot \cos C,$$

wie man sie gewöhnlich ausdrückt, zu transformiren, stelle man sich ein Perpendikel BD' aus B auf b gefällt vor, und setze den W. D'BC $= \varphi$; so ist nach (6) im Zus. 2. §. 45. $\tang \varphi = \frac{\cot C}{\cos a}$, daher $\cos a = \frac{\cot C}{\tang \varphi}$. Substituirt man diesen Werth in obiger Gleichung, so findet man auf ähnliche Weise, wie in den früheren Zusätzen:

(16') $\cos A = \frac{\cos C}{\sin \varphi} \cdot \sin (B - \varphi)$.

Diese Formel dient, um aus 2 mit der zwischenliegenden Seite a gegebenen Winkeln B, C den dritten zu finden.

Zusatz 2. Aus Formel (17) erhellt, daß, wenn jeder Winkel $< R$ ist, der Quotient nothwendig $+ \cos b$, d. i. $b < Q$ sey, daß demnach, indem b jede Seite vorstellt, in einem sphärischen Dreiecke, dessen jeder Winkel $< R$ ist, auch jede Seite $< Q$ sey.

§. 50. Die Neper'schen Analogien.

Erstens. Zur Auffindung der 2 ersten Analogien geben die 3 Proportionen (4), (9), (10') im §. 46. die Gleichungen:

1) $\tang \frac{1}{2}(b+c) . \tang \frac{1}{2}(b-c) = \tang \frac{1}{2}(p+q) . \tang \frac{1}{2}(p-q)$.

2) $\tang \frac{1}{2}(B+C) . \tang \frac{1}{2}(b-c) = \tang \frac{1}{2}(B-C) . \tang \frac{1}{2}(b+c)$.

3) $\sin \frac{1}{2}(B+C) . \cos \frac{1}{2}(B+C) . \tang \frac{1}{2}(p-q) = \sin \frac{1}{2}(B-C) . \cos \frac{1}{2}(B-C) . \tang \frac{1}{2}(p+q)$.

Multiplizirt man diese 3 Gleichungen mit einander, indem man zugleich den gemeinschaftlichen Faktor $\tang \frac{1}{2}(b+c)$ und $\tang \frac{1}{2}(p-q)$ wegläßt; ferner gemäß nr. 94. und nr. 95. $\sin \frac{1}{2}(B \pm C)$ statt $\tang \frac{1}{2}(B \pm C) . \cos \frac{1}{2}(B \pm C)$; dann statt der Quadrate nur die einfachen Faktoren des Produkts und $\frac{1}{2}a$ statt $\frac{1}{2}(p+q)$ nach Fig. 29. setzt; so erhält man die Gleichung:

4) $\sin \frac{1}{2}(B+C) . \tang \frac{1}{2}(b-c) = \sin \frac{1}{2}(B-C) . \tang \frac{1}{2}a$.

Multiplizirt man 1) und 3) mit einander und dividirt die erhaltene Gleichung durch 2); so hat man durch Reduktion nach nr. 94. 95. und Substitution von $\frac{1}{2}a$ statt $\frac{1}{2}(p+q)$ nach Fig. 29. die Gleichung:

5) $\cos \frac{1}{2}(B+C) . \tang \frac{1}{2}(b+c) = \cos \frac{1}{2}(B-C) . \tang \frac{1}{2}a$.

Für Fig. 30. läßt man B den Winkel ABD vorstellen, um in dieser Hinsicht vorerst nichts an den 3 ersten Gleichungen zu ändern. Allein die allgemeine Proportion (5) im §. 46. gibt nun, da $a = p - q$ ist, die Gleichung:

$\tang \frac{1}{2}(p-q) . \tang \frac{1}{2}(p+q) = \tang \frac{1}{2}(b+c) . \tang \frac{1}{2}(b-c)$.

Multiplizirt man daher diese Gleichung mit 2) und 3); so erhält man, wie oben, indem man zugleich $\tang \frac{1}{2}a$ statt $\tang \frac{1}{2}(p-q)$ setzt:

4') $\sin \frac{1}{2}(B+C) . \tang \frac{1}{2}a = \sin \frac{1}{2}(B-C) . \tang \frac{1}{2}(b+c)$.

Und nun weiter, wie vorhin, verfahren, bekommt man statt 5)

5') $\cos \frac{1}{2}(B+C) . \tang \frac{1}{2}a = \cos \frac{1}{2}(B-C) . \tang \frac{1}{2}(b-c)$.

Um nun statt B wirklich den wahren Winkel ABD, in 4') und 5') einzuführen, muß man statt B setzen 2R — ABD, was wir der Gleichförmigkeit wegen kurz durch 2R — B ausdrücken wollen. Demnach ist in Beziehung auf 4') $\sin\frac{1}{2}(B+C) = \sin\frac{1}{2}(2R-B+C) = \cos\frac{1}{2}(B-C)$, und $\sin\frac{1}{2}(B-C) = \sin\frac{1}{2}(2R-B-C) = \cos\frac{1}{2}(B+C)$; und eben so in Beziehung auf 5') $\cos\frac{1}{2}(B+C) = \sin\frac{1}{2}(B-C)$ und $\cos\frac{1}{2}(B-C) = \sin\frac{1}{2}(B+C)$. Also statt 4')

4'') $\cos\frac{1}{2}(B-C).\tang\frac{1}{2}a = \cos\frac{1}{2}(B+C).\tang\frac{1}{2}(b+c)$,

Und statt 5')

5'') $\sin\frac{1}{2}(B-C).\tang\frac{1}{2}a = \sin\frac{1}{2}(B+C).\tang\frac{1}{2}(b-c)$.

Man findet also $\tang\frac{1}{2}(b-c)$ sowohl aus 4) als 5''), und $\tang\frac{1}{2}(b+c)$ sowohl aus 5) als aus 4'') mit demselben Werthe, d. i. mit allgemeiner Gültigkeit die 2 ersten Neper'schen Analogien:

$$(\lambda)\ldots \tang\tfrac{1}{2}(b-c) = \tang\tfrac{1}{2}a.\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}.$$

$$(\mu)\ldots \tang\tfrac{1}{2}(b+c) = \tang\tfrac{1}{2}a.\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}.$$

Zweitens. Die 2 andern Analogien sind:

$$(\nu)\ldots \tang\tfrac{1}{2}(B-C) = \cot\tfrac{1}{2}A.\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}.$$

$$(\rho)\ldots \tang\tfrac{1}{2}(B+C) = \cot\tfrac{1}{2}A.\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}.$$

Man findet sie mit Hülfe der aus den Proportionen (9), (11) und (8') des §. 46. abgeleiteten Gleichungen:

1) $\tang\frac{1}{2}(B+C).\tang\frac{1}{2}(b-c) = \tang\frac{1}{2}(B-C).\tang\frac{1}{2}(b-c)$.

2) $\sin\frac{1}{2}(b-c).\cos\frac{1}{2}(b-c) = \sin\frac{1}{2}(b+c).\cos\frac{1}{2}(b+c).\tang\frac{1}{2}(m+n).\tang\frac{1}{2}(m-n)$.

3) $\tang\frac{1}{2}(m-n) = \tang\frac{1}{2}(B+C).\tang\frac{1}{2}(B-C).\tang\frac{1}{2}(m+n)$.

Man multiplizirt wieder diese 3 Gleichungen mit einander; dann auch 2) mit 3) und dividirt die hieraus gefundene Gleichung durch 1); setzt ferner $\frac{1}{2}A$ statt $\frac{1}{2}(m+n)$. Daß endlich die auf diese Weise für Fig. 29. erhaltenen Gleichungen (ν), (ρ) auch für Fig. 30., d. i. für den Fall gelten, wo das Perpendikel außerhalb des Dreieckes fällt, demnach $\frac{1}{2}(CAD-BAD)$ oder

$\frac{1}{2}(m-n) = \frac{1}{2}A$ ist, wird ebenfalls auf gleiche Art, wie oben, dargethan, indem man nämlich die Seiten der dritten Gleichung (wie oben der ersten Gleichung) verwechselt und zuletzt bemerkt, daß $\tang\frac{1}{2}(2R-B+C) = \cot\frac{1}{2}(B-C)$, u. s. w. sey.

Zusatz 1. Die Anwendung dieser Analogien zur Auffindung des dritten Winkels oder der dritten Seite, so wie überhaupt jedes Faktors — erhellt von selbst.

Zusatz 2. Da ist der Gleichung z. B. aus (μ)

$$\tang\tfrac{1}{2}(b+c).\cos\tfrac{1}{2}(B+C) = \tang\tfrac{1}{2}a.\cos\tfrac{1}{2}(B-C),$$

oder aus (ρ)

$$\tang\tfrac{1}{2}(B+C).\cos\tfrac{1}{2}(b+c) = \cot\tfrac{1}{2}A.\cos\tfrac{1}{2}(b-c)$$

die zweite Seite gewiß $+$, demnach auch die erste $+$ ist; so folgt, daß die halbe Summe zweier Seiten und die halbe Summe der denselben gegenüberliegenden Winkel immer gleichartig sind.

§. 51. Die Delambre'schen, oder Gauß'schen Gleichungen.*)

$$1.\ \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a}. \qquad 2.\ \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a}.$$

$$3.\ \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A}. \qquad 4.\ \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}A}.$$

Wir leiten sie aus den Neper'schen Analogien auf folgende sehr leichte Weise ab:

Aus (λ), dann aus (ρ) §. 50. hat man resp.

$$1)\ \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b-c)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C).\tang\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}(B+C)};\ \text{oder}\ 1')\ \frac{m}{n} = \frac{Q.\tang\frac{1}{2}a}{M}.$$

$$2)\ \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c).\cot\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(b+c)};\ \text{oder}\ 2')\ \frac{M}{N} = \frac{n.\cot\frac{1}{2}A}{q}.$$

Der Kürze wegen bezeichne man diese Gleichungen 1), 2), wie wir unter 1') und 2') thaten. In 2') versetze man die Seiten und multiplizire sie dann mit 1'); so hat man

$$\frac{m.\cot\frac{1}{2}A}{q} = \frac{Q.\tang\frac{1}{2}a}{N},\ \text{oder}\ \frac{m.\cos\frac{1}{2}A}{q.\sin\frac{1}{2}A} = \frac{Q.\sin\frac{1}{2}a}{N.\cos\frac{1}{2}a}.$$

*) Delambre stellte sie in „Connaissance des tems“ 1809. p. 45. und Gauß in „theoria motus corporum coelestium etc.“ Hamb. 1809, und zwar später, als Ersterer, und, wie dieser, ohne Beweis auf.

Diese Gleichung durch $\sin\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}A$ dividirt, und q und N versetzt, wird

$$\frac{mN}{\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}A} = \frac{qQ}{\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}A}, \text{ die in } \frac{Q}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{m}{\sin\frac{1}{2}a} \text{ u. } \frac{q}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{N}{\sin\frac{1}{2}A}$$

aufgelöst wird. Durch Substitution ist die erste dieser 2 letzten Gleichungen die obige Gleichung 2. und die zweite ist die obige Gleichung 4. Durch dasselbe Verfahren leitet man aus den Analogien (μ) und (ρ) die andern Gleichungen 1. und 3. ab.

Zusatz. Durch Aufhebung der Brüche wird aus 1. bis 4.

1. $\cos\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}(B+C) = \cos\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{1}{2}(b-c)$.
2. $\sin\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}(B-C) = \cos\frac{1}{2}A \cdot \sin\frac{1}{2}(b-c)$.
3. $\sin\frac{1}{2}A \cdot \sin\frac{1}{2}(b+c) = \sin\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}(B-C)$.
4. $\sin\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{1}{2}(b+c) = \cos\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}(B+C)$.

§. 52. Gleichungen zur unmittelbaren Auffindung α) der dritten Seite aus den mit dem eingeschlossenen Winkel gegebenen Seiten; β) des dritten Winkels aus den mit der zwischenliegenden Seite gegebenen Winkeln.

Erstens. Vertauscht man in (14) §. 48. b gegen a, so hat man den üblichen Ausdruck der Formel:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c\,(\sin\tfrac{1}{2}A^2 + \cos\tfrac{1}{2}A^2) \\ &\quad + \sin b \cdot \sin c\,(\cos\tfrac{1}{2}A^2 - \sin\tfrac{1}{2}A^2). \text{ nr. 151.}\end{aligned}$$

Und indem $1 = \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2$ ist, wird ferner

$$\begin{aligned}\cos a &= (\cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c)\sin\tfrac{1}{2}A^2 \\ &\quad + (\cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c)\cos\tfrac{1}{2}A^2 \\ &= \cos(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A^2 + \cos(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A^2. \text{ nr. 69. 70.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1-\cos a &= (\sin\tfrac{1}{2}A^2+\cos\tfrac{1}{2}A^2)-\cos(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A^2-\cos(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A^2. \\ &= \sin\tfrac{1}{2}A^2(1-\cos(b+c)) + \cos\tfrac{1}{2}A^2(1-\cos(b-c)), \text{ d. i.} \\ \sin\tfrac{1}{2}a^2 &= \sin\tfrac{1}{2}(b+c)^2\sin\tfrac{1}{2}A^2 + \sin\tfrac{1}{2}(b-c)^2.\cos\tfrac{1}{2}A^2. \text{ nr. 155.}\end{aligned}$$

Setzt man $\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)} \cdot \cot\frac{1}{2}A = \tang\varphi$, wo folglich nach ($\nu$) §. 50. $\varphi = \frac{1}{2}(B-C)$ ist; so hat man

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c).\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(b+c).\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}; \text{ also ist}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = \cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1;\ \text{oder}$$

$$\text{(m)}\ \sin\tfrac{1}{2}a = 1 = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}A}{\cos\varphi},\ \text{oder} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}A}{\sin\varphi}.$$

Eben so erhält man

$$1+\cos a \text{ oder } \cos\tfrac{1}{2}a^2 = \cos\tfrac{1}{2}(b+c)^2.\sin\tfrac{1}{2}A^2 + \cos\tfrac{1}{2}(b-c)^2.\cos\tfrac{1}{2}A^2.$$

Nimmt man wieder $\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}.\cot\frac{1}{2}A = \tang\psi$, daß also nach (ρ) §. 50. $\psi = \frac{1}{2}(B+C)$ ist; so hat man, wie vorhin,

$$\text{(n)}\ \cos\tfrac{1}{2}a = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c).\sin\frac{1}{2}A}{\cos\psi} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c).\cos\frac{1}{2}A}{\sin\psi}.$$

Diese Formeln dienen, a zu finden, ohne einen der Winkel B, C selbst zu kennen.

Zweitens. Da die Formel (16) §. 49.

$$\cos A = \sin B.\sin C.\cos a - \cos B.\cos C$$

auf ähnliche Weise, wie die vorige für cos a, zusammengesetzt ist; so findet man, wenn

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}.\tang\tfrac{1}{2}a = \tang v$$

und $\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}.\tang\frac{1}{2}a = \tang w$ gesetzt wird,

$$\text{(p)}\ \sin\tfrac{1}{2}A = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C).\cos\frac{1}{2}a}{\cos v} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C).\sin\frac{1}{2}a}{\sin v}\ \text{und}$$

$$\text{(q)}\ \cos\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}a}{\cos w} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C).\sin\frac{1}{2}a}{\sin w};$$

wo wieder nach den Neper'schen Analogien (λ) und (μ) die eingeführte Größe v die halbe Summe und w die halbe Differenz der Seiten b, c ist.

Dividirt man m durch n und substituirt statt cos φ seinen Werth $\cos\frac{1}{2}(B-C)$, und eben so $\cos\frac{1}{2}(B+C)$ statt $\cos\psi$; so findet man $\tang\frac{1}{2}a$ gerade so, wie es aus der Analogie (μ) entwickelt wird. Auf gleiche Weise (q) durch (p) dividirt, hat man $\cot\frac{1}{2}A$, wie aus der Analogie (ρ).

Zusatz. Mittelst vorstehender Gleichungen kann man die dritte Seite oder den dritten Winkel finden, wenn man die halbe Summe oder halbe Differenz der 2 andern Seiten oder Winkel

kennt. Soll aber auch diese Bedingung ausgeschlossen seyn; so entwickelt man die gewünschten Gleichungen auf folgende Weise:

1) Hinsichtlich der dritten Seite:

$\cos A . \sin b . \sin c = \cos a - \cos b . \cos c$ (nach (14) §. 48.),

Oder, wegen $\cos A = \cos\frac{1}{2}A^2 - \sin\frac{1}{2}A^2 = -1 + 2\cos\frac{1}{2}A^2$ (nr. 152.),

$(-1 + 2\cos\frac{1}{2}A)\sin b . \sin c + \cos b . \cos c = \cos a$, daher

$\cos(b+c) + 2\cos\frac{1}{2}A^2 . \sin b . \sin c = \cos a$ (nr. 69.).

Setzt man nun

$2 . \cos\frac{1}{2}A^2 . \sin b . \sin c = 2\sin n^2 = 1 - \cos 2n$ (nr. 152.);

so ist $\cos(b+c) + 1 - \cos 2n = \cos a = 1 - 2\sin\frac{1}{2}a^2$ (nr. 151.);

also $2\sin\frac{1}{2}a^2 = \cos 2n - \cos(b+c)$, folglich

(r) $\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\sin\left(\frac{b+c}{2} + n\right) . \sin\left(\frac{b+c}{2} - n\right)}$. nr. 100.

Substituirt man oben vermöge nr. 152. statt $\cos\frac{1}{2}A^2$; so hat man

$(1 - 2\sin\frac{1}{2}A^2)\sin b . \sin c + \cos b . \cos c = 1 - 2\sin\frac{1}{2}a^2$.

Nimmt man nun $2\sin\frac{1}{2}A^2 . \sin b . \sin c = 2\sin z^2 = 1 - \cos 2z$; so erhält man nach nr. 70.

$\cos(b-c) + \cos 2z = 2(1 - \sin\frac{1}{2}a^2) = 2\cos\frac{1}{2}a^2$. nr. 152.

Daher nach nr. 92.

(s) $\cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\cos\left(\frac{b-c}{2} + z\right) . \cos\left(\frac{b-c}{2} - z\right)}$.

2) Hinsichtlich des dritten Winkels:

Wird in der vorhin unter Zweitens angeführten Formel $1 - 2\sin\frac{1}{2}A^2$ statt $\cos A$, und $\cos\frac{1}{2}a^2 - \sin\frac{1}{2}a^2$ oder $-1 + 2\cos\frac{1}{2}a^2$ statt $\cos a$ gesetzt; so ist

$1 - 2\sin\frac{1}{2}A^2 = \sin B . \sin C\,(1 + 2\cos\frac{1}{2}a^2) - \cos B . \cos C$.

$= 2\cos\frac{1}{2}a^2 . \sin B . \sin C - \cos(B-C)$.

Setzt man $2\cos\frac{1}{2}a^2 . \sin B . \sin C = 2\sin v^2 = 1 - \cos 2v$; so hat man

$2\sin\frac{1}{2}A^2 = \cos 2v + \cos(B-C)$, und hieraus

(t) $\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\cos\left(\frac{B-C}{2} + v\right) . \cos\left(\frac{B-C}{2} - v\right)}$. nr. 92.

Oder im obigen Ausdrucke, nämlich in $\cos\frac{1}{2}a^2 - \sin\frac{1}{2}a^2$, nun statt $\cos\frac{1}{2}a^2$ substituirt, wird

$$1 - \sin\tfrac{1}{2}A^2 = (1 - 2\sin\tfrac{1}{2}a^2).\sin B.\sin C - \cos B.\cos C$$
$$= -\cos(B+C) - 2\sin\tfrac{1}{2}a^2.\sin B.\sin C.$$

Setzt man wieder $2\sin\frac{1}{2}a^2.\sin B.\sin C = 2\sin x^2 = 1 - \cos 2x$; so findet man

$$(u)\quad \cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\sin\left(\frac{B+C}{2} + x\right).\sin\left(\frac{B+C}{2} - x\right)}.$$

§. 55. Gleichungen 1) zwischen einem Winkel und den 3 Seiten; 2) zwischen einer Seite und den 3 Winkeln.

Erstens. Nach (15) §. 48. ist

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b.\cos c}{\sin b.\sin c}.$$ Daher

$$1 - \cos A = 2\sin\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin b.\sin c + \cos b.\cos c - \cos a}{\sin b.\sin c}$$
$$= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b.\sin c}.$$ nr. 70.
$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c).\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b.\sin c}$$ nr. 95.

Demnach

$$(w)\quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c).\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b.\sin c}}.$$

Setzt man $1 + \cos A = 2\cos\frac{1}{2}A^2$ (nr. 152.); so entwickelt man auf ähnliche Art

$$(x)\quad \cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c).\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b.\sin c}}.$$

Bezeichnet man den halben Umfang des Dreieckes durch s, so hat man durch Verbindung von (w) mit (x)

$$(\alpha)\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c).\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c).\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}}.$$
$$= \sqrt{\frac{\sin(s-c).\sin(s-b)}{\sin s.\sin(s-a)}}.$$

Zweitens. Nach (17) §. 49. ist

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B.\cos C}{\sin B.\sin C}.$$ Daher

$$1-\cos a = 2\sin\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\sin B\,.\,\sin C - \cos B\,.\,\cos C - \cos A}{\sin B\,.\,\sin C}$$

$$= \frac{\cos(B+C)-\cos A}{\sin B\,.\,\sin C} \text{ nr. 69.}$$

$$= \frac{-2\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\,.\,\sin C}$$

vermöge nr. 92. Also

$$(\gamma)\ \sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\,.\,\sin C}}.$$

Da die halbe Summe der Winkel $> R$ (§. 38. Zuſ. 1.), ihr Coſinus folglich $-$ iſt; ſo findet man $\sin\frac{1}{2}a$ immer $+$.

Setzt man $1+\cos a$, das $= 2\cos\frac{1}{2}a^2$ iſt; ſo entwickelt man ferner

$$(\zeta)\ \cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\,.\,\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B\,.\,\sin C}}.$$

Daher, wie oben,

$$(\beta)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\,.\,\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\,.\,\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}}.$$

§. 54. Bei Anwendung der aufgeſtellten Geſetze (Proportionen, Analogien, Gleichungen oder Formeln) auf die Reſolution ſchiefwinkeliger Dreiecke kommen im Ganzen zwölf Fälle in Betrachtung, wie wir ſie ſogleich anführen werden. Sechs derſelben, die wir mit H bezeichnen, können als Hauptfälle genommen werden, indem die Reſolution eines jeden der ſechs übrigen Fälle auf die des entſprechenden Hauptfalles mit Hülfe des Polardreieckes zurückgeführt werden kann, was wir hinſichtlich Fall 1. und 2. ausdrücklich nachweiſen wollen.

Fall 1. H. Aus 3 Seiten a, b, c einen Winkel z. B. C zu finden.

1) $\cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin s\,.\,\sin(s-c)}{\sin a\,.\,\sin b}}$. §. 53. (x).

2) $\sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\,.\,\sin(s-b)}{\sin a\,.\,\sin b}}$. §. 53. (w).

3) $\operatorname{tang}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\,.\,\sin(s-b)}{\sin s\,.\,\sin(s-c)}}$. §. 53. (α).

4) $\cos C = \frac{\cos c - \cos a\,.\,\cos b}{\sin a\,.\,\sin b}$. §. 48. (15).

5) Stellt

5) Stellt man sich (wie in Fig. 29. 30.) ein Perpendikel auf die Grundseite a gefällt vor, und nennt d die halbe Differenz der Segmente, und $b > a$; so hat man nach §. 46. (5)

$$\text{tang}\, d = \tan\tfrac{1}{2}(b+c) \cdot \tan\tfrac{1}{2}(b-c) \cdot \cot\tfrac{1}{2}a.$$

Das größere Segment ist dann $= \frac{1}{2}a + d$; das kleinere $= \frac{1}{2}a - d$ und nach §. 45. (2)

$\cos C = \text{tang.}$ des anliegenden Segments $\times \cot b$ (d. i. der anliegenden Seite, als der Hypotenuse). Hiebei wird das größere Segment immer zur größeren Seite genommen. In dem Falle, daß das kleinere Segment (wie in Fig. 30.) das Zeichen — hat und zugleich $< Q$ ist, setzt man dessen Tangente mit —.

Fall 2. Aus 3 Winkeln 1 Seite z. B. b zu finden.

1) $\sin\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos s \cdot \cos(s-B)}{\sin A \cdot \sin C}}$. §. 53. (γ), und indem s wieder die halbe Summe der 3 Winkel bezeichnet.

2) $\cos\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos(s-A) \cdot \cos(s-C)}{\sin A \cdot \sin C}}$. §. 53. (ζ).

3) $\text{tang}\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos s \cdot \cos(s-B)}{\cos(s-A) \cdot \cos(s-C)}}$. §. 53. (β).

4) $\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$. §. 49. (17).

5) Es sey A der Vertikalwinkel (Fig. 29. 30.); m und n seyen die 2 durch das Fällen des Perpendikels entstandnen Winkel oder Segmente; d sey ihr halber Unterschied und $B > C$; so ist nach §. 46. (8)

$$\text{tang}\, d = \tan\tfrac{1}{2}(B+C) \cdot \tan\tfrac{1}{2}(B-C) \cdot \tan\tfrac{1}{2}A,$$

woraus man denn die Winkel m und n selbst, dann nach §. 45. (6)

$\cos b = \cot.$ des anliegenden Segments $\times \cot. C$

findet. Ueberhaupt wird hier zum kleineren Winkel das größere Segment genommen, und wenn das kleinere Segment das Zeichen — hat und $< R$ ist, so setzt man die Cotangente des Segments mit demselben Zeichen.

6) Stellt man sich das Polardreieck konstruirt vor, bezeichnet mit $A'B'C'$; so kennt man aus den 3 gegebenen Winkeln A, B, C

die Seiten a', b', c' dieses Polardreieckes, nämlich $a' = 2Q - A$, u. s. w. kann daher nach Fall 1. z. B. den Winkel C' finden, wodurch man auch $c = 2Q - C'$ hat. — Und umgekehrt: es läßt sich eben die Auflösung des Falles 1. durch die des Falles 2. bewerkstelligen.

Fall 3. H. Aus 2 mit dem eingeschlossenen Winkel C gegebenen Seiten a, b, einen der übrigen Winkel z. B. B zu finden.

1) $\cot B = \frac{\cot C}{\sin \varphi} \cdot \sin(a - \varphi)$, wo nach §. 47. Zus. $\tang \varphi = \tang b \cdot \cos C$ ist.

2) $\tang \frac{1}{2}(A+B) = \cot \frac{1}{2}C \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}$, und

$$\tang \tfrac{1}{2}(A-B) = \cot \tfrac{1}{2}C \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}. \text{ §. 50. } (\rho), (\gamma).$$

Hieraus hat man zugleich den größeren und kleineren Winkel A und B.

3) Man fälle aus dem Scheitel des dritten Winkels A ein Perpendikel auf die Seite a und suche das an C liegende Segment K nach §. 45. (2), nämlich

$$\tang K = \cos C \cdot \tang b.$$

Mit Hülfe dieses Segments findet man, da a gegeben ist, sowohl für Fig. 29. als 30. auch das an B liegende Segment, daher denn z. B. für Fig. 29.

$$\sin q : \sin p = \tang C : \tang B.$$

Fall 4. H. Aus 2 mit dem eingeschlossenen Winkel C gegebenen Seiten a, b die dritte Seite c zu finden.

1) $\sin \frac{1}{2}c = \sqrt{\sin\left(\frac{a+b}{2} + n\right) \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2} - n\right)}$; oder

2) $\cos \frac{1}{2}c = \sqrt{\cos\left(\frac{a+b}{2} + z\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2} - z\right)}$.

Hiebei ist n aus $\cos \frac{1}{2}C^2 \cdot \sin a \cdot \sin b = \sin n^2$ und z aus $\sin \frac{1}{2}C^2 \cdot \sin a \cdot \sin b = \sin z^2$ nach (r) und (s) im §. 52. Zus. bekannt.

3) $\cos c = \frac{\cos b}{\cos \varphi} \cdot \cos(a-\varphi)$, wo (nach (14) im §. 48. Zuſ.) $\tang \varphi = \tang b \cdot \cos C$ iſt.

4) Man ſucht, wie bei Fall 3., die Segmente p, q und dann c nach §. 46. (2) durch die Proportion:

$$\cos p : \cos q = \cos b : \cos c.$$

5) Indem man im vorigen Falle 3. die 2 unbekannten Winkel nach den Delambre'ſchen Formeln (§. 51.) ſucht, findet oder berechnet man zugleich auch die dritte Seite.

Beiſpiel. Es ſey der eingeſchl. W. $A = 114^\circ\ 20'\ 16''$; $b = 56^\circ\ 19'\ 40''$; $c = 20^\circ\ 16'\ 38''$; daher $\frac{1}{2}A = 57^\circ\ 10'\ 08''$; $\frac{1}{2}(b+c) = 38^\circ\ 18'\ 09''$; $\frac{1}{2}(b-c) = 18^\circ\ 01'\ 31''$; ſo ſteht die Rechnung ſo:

d) l. $\sin\frac{1}{2}(b-c)$ . . . $= 9{,}4905716$
e) l. $\cos\frac{1}{2}A$ . . . . . $= 9{,}7341311$
f) l. $\cos\frac{1}{2}(b-c)$ . . . $= 9{,}9781441$
k) l. $\sin\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}(B-C) = 9{,}2247027$ aus d+e nach Form. 2.
i) l. $\sin\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}(B-C) = 9{,}7166810$ aus h+i " " " 3.
g) l. $\tang\frac{1}{2}(B-C)$ . . . $= 9{,}5080217$
$\frac{1}{2}(B-C) = 17^\circ\ 51'\ 17''{,}798$.
β) l. $\cos\frac{1}{2}(B-C)$ . . . $= 9{,}9785620$ aus g (vgl. §. 28. Zuſ. 2.)
h) l. $\sin\frac{1}{2}(b+c)$ . . . $= 9{,}7922609$
i) l. $\sin\frac{1}{2}A$ . . . . . $= 9{,}9244201$
k) l. $\cos\frac{1}{2}(b+c)$ . . . $= 9{,}8947309$
l. $\cos\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}(B+C) = 9{,}7122752$ aus e+f nach Form. 1.
γ) l. $\cos\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}(B+C) = 9{,}8191510$ " i+k " " " 4.
m) l. $\tang\frac{1}{2}(B+C)$ . . . $= 9{,}8931242$
$\frac{1}{2}(B+C) = 38^\circ\ 01'\ 12''{,}445$.
δ) l. $\cos\frac{1}{2}(B+C)$ . . . $= 9{,}8064129$

Daher aus $38^\circ\ 01'\ 12''{,}445$
$\pm\ 17\ 51\ 17{,}798$
$B = 55^\circ\ 52'\ 30''{,}243$
und $C = 20\ 09\ 54{,}647$.
Dritte Seite a
$= 66\ 20\ 44{,}120$
vermöge der Nebenrechnung.

l. $\sin\frac{1}{2}a = 9{,}7381190$ aus α) β) nach Form. 3.
l. $\cos\frac{1}{2}a = 9{,}9227581$ aus γ) δ) nach Form. 4.
l. $\tang\frac{1}{2}a = 9{,}8153809$
Alſo $\frac{1}{2}a = 33^\circ\ 10'\ 22''{,}060$.

Suchte man nun unmittelbar z. B. log sin 33° 10' .... und fände ihn entweder = 9,7381190, wie ihn obige Rechnung gibt, oder doch dieser Zahl sehr nahe gleich; so hätte man hieraus eine Verifikation der geführten Rechnung.

Fall 5. Aus 2 Winkeln B, C und der zwischen diesen liegenden Seite eine der übrigen Seiten z. B. b zu finden.

1) $\cot b = \frac{\cot a}{\cos \varphi} \cdot \cos(C-\varphi)$, wo $\tang \varphi = \frac{\cot B}{\cos a}$ ((15") §. 47.)

2) $\tang \frac{1}{2}(b+c) = \tang \frac{1}{2}a \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)}$ und

$$\tang \tfrac{1}{2}(b-c) = \tang \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}(B+C)}.$$ §. 45. (μ), (λ).

Hieraus findet man beide Seiten b, c auf einmal.

3) Man löst diesen Fall dadurch, daß man ihn auf Fall 3. mittelst des Polardreieckes zurückführt.

Fall 6. Aus 2 mit der zwischenliegenden Seite c gegebenen Winkeln A, B den dritten Winkel C zu finden.

1) $$\sin \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\cos\left(\frac{A-B}{2} + v\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2} - v\right)};$$ oder

$$\cos \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\sin\left(\frac{A+B}{2} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{A+B}{2} - x\right)},$$

wo denn v aus $\cos \frac{1}{2}c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B = \sin v^2$ und x aus $\sin \frac{1}{2}c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B = \sin x^2$ vermöge (t) und (u) §. 52. Zus. bekannt ist.

2) Man sucht die Segmente m, n des Winkels A; nämlich nach (6) im Zus. 2. des §. 45. ist (Fig. 29.)

$$\cot m = \cos c \cdot \tang B, \text{ und hieraus } n = A - m.$$

Daher nach (7) §. 46.

$$\cos C = \frac{\sin n \cdot \cos B}{\sin n}.$$

3) Die Resolution dieses Falles kann wieder auf die des Falles 4. (und umgekehrt) zurückgeführt werden.

4) Nach den Delambre'schen Formeln findet man auf ähnliche Weise, wie vorhin bei Fall 4., wenn B und C mit a

gegeben sind, auf einmal die 2 Seiten b, c und den dritten Winkel A.

Beispiel. Es sey $\frac{1}{2}a = 33^0\,10'\,22'',06$; $B = 55^0\,52'\,30'',245$; $C = 20^0\,09'\,54'',647$; daher $\frac{1}{2}(B+C) = 38^0\,01'\,12'',445$ und $\frac{1}{2}(B-C) = 17^0\,51'\,17'',798$; so steht die Rechnung so:

d) l. $\sin\frac{1}{2}(B-C)$ . . . $= 9{,}4865837$
e) l. $\sin\frac{1}{2}a$ . . . . . $= 9{,}7381190$
f) l. $\cos\frac{1}{2}(B-C)$ . . . $= 9{,}9785620$
l. $\cos\frac{1}{2}A \cdot \sin\frac{1}{2}(b-c) = 9{,}2247027 = d+e$ nach Form. 2.
α) l. $\cos\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{1}{2}(b-c) = 9{,}7122751 = h+i$ „ „ „ 1.
g) l. $\tan\frac{1}{2}(b-c)$ . . . $= 9{,}5124276$
$\frac{1}{2}(b-c) = 18^0\,01'\,31'',009$.
β) l. $\cos\frac{1}{2}(b-c)$ . . . $= 9{,}9781440$ aus g)
h) l. $\sin\frac{1}{2}(B+C)$ . . . $= 9{,}7895371$
i) l. $\cos\frac{1}{2}a$ . . . . . $= 9{,}9227380$
k) l. $\cos\frac{1}{2}(B+C)$ . . . $= 9{,}8964129$
l. $\sin\frac{1}{2}A \cdot \sin\frac{1}{2}(b+c) = 9{,}7166610 = e+f$ nach Form. 3.
m) l. $\tan\frac{1}{2}(b+c)$ . . . $= 9{,}8191509 = i+k$ „ „ „ 4.
$\frac{1}{2}(b+c) = 38^0\,18'\,09'',054$.
δ) l. $\cos\frac{1}{2}(b+c)$ . . . $= 9{,}8947309$.

Daher aus $38^0\,18'\,09'',034$
$\pm\ 18\ 01\ 31\ ,009$
$b = 56^0\,19'\,40'',043$
und $c = 20\ 16\ 38\ ,025$.
Drittel W. A
$= 114\ 20\ 16\ ,000$
vermöge der Nebenrechnung.

l. $\sin\frac{1}{2}A = 9{,}9244200$ aus γ) δ) nach Form. 4.
l. $\cos\frac{1}{2}A = 9{,}7341311$ aus α) β) nach Form. 1.
l. $\tan\frac{1}{2}A = 0{,}1902889$.
Also $\frac{1}{2}A = 52^0\,10'\,08''$.

Fall 7. Aus 2 Seiten a, b und 1 opponirten Winkel A, den der andern Seite b gegenüberliegenden W. B zu finden.

$$\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a}. \quad \text{§. 46. (1).}$$

In wiefern die Zweideutigkeit, ob $B >$ oder $< R$ zu nehmen sey, verschwinden kann, dient, nebst der im §. 50. Zus. 2. angeführten Regel, die Vorschrift:

Ein Winkel ist gleichartig mit der ihm opponirten Seite, wenn eine der an ihm liegenden Seiten einen Werth hat, welcher entweder zwischen die Werthe jener opponirten Seite und ihres Supplements fällt, oder welcher einem der zuletzt genannten Werthe gleich ist. Von der Richtigkeit dieser Vorschrift überzeugt man sich durch nähere Betrachtung der Gleichung (15) §. 48., nämlich:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c},$$

aus welcher erhellt, daß B mit b gleichartig sey, sobald $\cos b > \cos a \cdot \cos c$ ist. Dieses ist immer der Fall, sobald $a = b$, oder $a = 2Q - b$, oder der Werth von a zwischen dem von b und $2Q - b$ liegt, indem dann $\cos b$ entweder $=$ oder $> \cos a$, folglich jedesmal auch $> \cos a \cdot \cos c$ ist.

Der Vortheil, nach dieser Vorschrift sogleich aus der Aufgabe über die Größe des Gesuchten entscheiden zu können, tritt auch hinsichtlich Fall 8. und 9. ein.

Fall 8. H. Aus 2 Seiten a, b und 1 opponirten Winkel A den von den gegebenen Seiten eingeschlossenen Winkel C zu finden.

1) B als nach Fall 7. gefunden betrachtet, hat man nach (ρ) §. 50.

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+B).$$

So oft also B im Falle 7. zweifelhaft bleibt, bleibt auch der Werth von C unentschieden. Auch erhellt dieses, indem man

2) die durch das Fällen eines Perpendikels entstandnen Segmente m, n des Winkels C sucht. Nämlich nach (6) §. 45. Zus. 2. ist

$$\cot m = \operatorname{tang} A \cdot \cos b, \text{ und nach (6) §. 46.}$$

$$\cos n = \frac{\cos m \cdot \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}.$$

Allein nun bleibt $C = m \pm n$ zweifelhaft (vgl. Fig. 29. 30.). Wie bisweilen diese Zweideutigkeit zu heben sey, kommt vor bei folgendem

Fall 9. Aus 2 Seiten a, b und 1 opponirten Winkel A die dritte Seite c zu finden.

1) Fällt man wieder ein Perpendikel auf c und bezeichnet die entstandnen Segmente mit d und e; so ist

$$\text{tang } d = \cos A \,.\, \text{tang } b \text{ nach (2) §. 45.}$$

$$\text{und } \cos e = \frac{\cos d \,.\, \cos a}{\cos b} \text{ nach (2) §. 46.}$$

Hieraus aber ist $c = d \pm e$, d. i. zweifelhaft. Die Ungewißheit sowohl für diesen, als den vorigen Fall verschwindet zuweilen durch die aus unseren oben im §. 46., hinsichtlich der die Segmente betreffenden Proportionen, beigefügten Bemerkungen hervorgehende Regel, nämlich:

Wenn die Summe $(d+e)$ oder $(m+n) > 2Q$ ist; so ist der Unterschied $d-e = c$ und $m-n = C$; und wenn $d-e$ oder $m-n$ negativ ist, d. i. $e > d$ oder $n > m$; so ist $d+e = c$ und $m+n = C$.

2) Nähme man wieder B nach Fall 7. als gefunden an, so hätte man nach (μ) §. 50.

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}c = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos \tfrac{1}{2}(A-B)} \,.\, \text{tang } \tfrac{1}{2}(a+b).$$

Fall 10. Aus 2 Winkeln A, B und 1 opponirten Seite a die andere b zu finden.

$$\sin b = \frac{\sin B \,.\, \sin a}{\sin A}. \text{ §. 46. (1).}$$

Zur Hebung der Zweideutigkeit gelten auch hier die bei Fall 7. angeführten Regeln; nämlich: $\frac{1}{2}(a+b)$ ist immer gleichartig mit $\frac{1}{2}(A+B)$; ferner b ist mit B gleichartig, wenn der Werth von A entweder zwischen die Werthe von B und $2R-B$ fällt, oder einem dieser Werthe gleich ist, wie aus (17) §. 49. erhellt.

Fall 11. Aus 2 Winkeln A, B und 1 opponirten Seite a die zwischen jenen Winkeln liegende Seite c zu finden.

1). Suchte man b nach Fall 10., so hätte man auch c durch die Gleichung unter 2) Fall 9.

1) Ein Perpendikel auf c von C aus gefällt gedacht, ist

$$\text{tang } d = \text{tang } a \cdot \cos B. \quad \S. 45. (2).$$

$$\sin e = \frac{\sin d \cdot \cot A}{\cot B}. \quad \S. 46. (3).$$

Und nun $c = d \pm e$, und zwar gilt +, wenn A, B gleichartig (Fig. 29.) sind; im entgegengesetzten Falle aber (Fig. 30.) muß man in der letzten Gleichung sin e und cot B mit — setzen.

Fall 12. Aus 2 Winkeln A, B und 1 opponirten Seite a den dritten Winkel C zu finden.

1) b, wie vorhin, als gefunden betrachtet, hat man C aus der Gleichung unter 1) Fall 8.

2) Sind wieder m und n die 2 Segmente des Winkels C; so ist

$$\cot m = \cos a \cdot \text{tang } B. \quad \S. 45. \text{ Zus. } 2. (6).$$

$$\sin n = \frac{\sin m \cdot \cos A}{\cos B}. \quad \S. 46. (7).$$

Daher $C = m \pm n$. Hiebei gilt +, wenn A und B gleichartig sind. Ferner ist der größte Werth, den man aus sin n für n erhält, zu verwerfen, wenn derselbe $m + n > 2R$ macht.

Die 3 letzten Fälle gehören mit den 3 ihnen unmittelbar vorausgehenden Fällen an und für sich zu den zweifelhaften, und die Auflösung des Falles 10. 11. 12. kann auf die resp. des Falles 7. 8. 9. zurückgeführt werden.

Zusatz. Für sphärische gleichschenkelige Dreiecke werden unsere Formeln noch einfacher, wie folgendes Schema zeigt, in welchem a jeden der beiden (gleichen) Schenkel; A jeden der (gleichen) Winkel an der Basis b, und B den von den Schenkeln eingeschlossenen Winkel bezeichnet:

Gegeben	Gesucht	Formel zur Auflösung
1. a, b	A	$\text{tang } \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(a-\frac{1}{2}b)}{\sin(a+\frac{1}{2}b)}}$. §. 53. (α).
	B	$\sin \frac{1}{2}B = \frac{\sin \frac{1}{2}b}{\sin a}$. §. 44. (1).
2. a, A	b	$\text{tang } \frac{1}{2}b = \text{tang } a \cdot \cos A$. §. 45. (2).
	B	$\cot \frac{1}{2}B = \cos a \cdot \text{tang } A$ §. 45. (6).

Gegeben	Gesucht	Formel zur Auflösung
3. a, B	b	$\sin\frac{1}{2}b = \sin a \cdot \sin\frac{1}{2}B$. §. 44. (1).
	A	$\cot A = \cos a \cdot \tang\frac{1}{2}B$, wie unter 2.
4. A, b	a	$\cot a = \cot\frac{1}{2}b \cdot \cos A$. §. 45. (2) mit nr. 1.
	B	$\cot\frac{1}{2}B = \cos a \cdot \tang A$. Vergl. 2.
5. b, B	a	$\sin a = \frac{\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}B}$, wie A, zweifelhaft.
	A	$\sin A = \frac{\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}b}$. §. 45. (5).
6. A, B	a	$\cos a = \cot A \cdot \cot\frac{1}{2}B$. Vergl. 4.
	b	$\cos\frac{1}{2}b = \frac{\cos\frac{1}{2}B}{\sin A}$. Vergl. 5.

§. 55. Aufgabe. Den Flächeninhalt des sphärischen Dreieckes zu finden.

Auflösung. Bezeichnet $d = 2r$ den Durchmesser des Kreises, p dessen Peripherie und π die Ludolph'sche Zahl $= 3{,}1415\ldots$; so ist allgemein $p = d\pi = 2r\pi$ (Geom. §. 140. Zus.); daher (r als Einheit angenommen) $\frac{1}{2}p$ oder (nach der gewöhnlichen Sexagesimaleintheilung) $180^0 = \pi = 3{,}1415\ldots$ Ferner ist allgemein der Flächenraum des Kreises $= r^2\pi$ (Geom. §. 145.), und ist r der Kugelhalbmesser, so ist die Kugeloberfläche $F = 4r^2\pi$ (Geom. §. 176.) oder $\frac{1}{2}F = 2r^2\pi$.

Dieses vorausgesetzt, sey durch den größten Kreis ADBEA (Fig. 22.) die Kugel in die obere (gleichsam über der Papier-Ebene liegende) und in die untere Hälfte getheilt. Ferner seyen Dd und Ee die Peripherien von zwei größten, zur obern Hemisphäre gehörigen, Halbkreisen, deren Bogen CE, CD mit dem Bogen ED des liegenden Kreises das sphärische Dreieck CED begrenzen, dessen Winkel wir mit m, n, s und den gesuchten Flächeninhalt mit a, so wie (den Bogen ACB weggedacht) die 3 übrigen Dreiecke kurz mit t, t', t'' bezeichnen wollen. Demnach ist die halbe obere Kugelfläche oder

$$\frac{1}{2}F = a + t + t' + t'' = 2r^2\pi.$$

Endlich sey die zwischen den halben Peripherien DCd, DEd liegende Oberfläche des keilförmigen Kugelausschnittes, welcher durch die zu jenen Peripherien gehörigen und sich im Kugeldurchmesser Dd schneidenden Halbkreise entsteht, mit f bezeichnet. Die Größe dieser Fläche f hängt, wie schon oben im §. 57. unter 5) bemerkt wurde, von dem sphärischen Winkel n (= d) oder dem diesen Winkel messenden Bogen ab; d. h. der wievielste Theil dieser Winkel n von 4R, oder dieser Bogen s von der Peripherie p eines größten Kugelkreises oder von 360° ist; der ebensovielste Theil ist f von der ganzen Kugelfläche F; d. i. man findet f durch die Proportion:

$$p\ (=360^0) : n^0 = F\ (=4r^2\pi) : f$$

$$\text{oder } \tfrac{1}{2}p\ (=180^0) : n^0 = \tfrac{1}{2}F\ (=2r^2\pi) : f.$$

Also allgemein $f = \frac{n^0\pi}{180^0} \cdot 2r^2$.

Auf gleiche Weise wird die Größe f' der von den halben Peripherien ECe, EDe begrenzten Oberfläche des, von den sich im Kugeldurchmesser Ee schneidenden Halbkreisen gebildeten, keilförmigen Ausschnittes durch den sphärischen Winkel m (= e) bestimmt. — Stellt man sich ferner die Bogen Cd, Ce in der andern oder untern Kugelhälfte verlängert vor, bis sie sich in einem Abstande von 180° von ihrem Ursprunge, d. i. von C aus, oder in dem diesem Punkte C entgegengesetzten Punkte c des Kugeldurchmessers Cc nochmals schneiden; so begrenzen diese halben Peripherien die Oberfläche f'' eines dritten keilförmigen Kugelausschnittes, und die Größe f'' hängt vom W. dCe = s auf obige Weise ab. Zugleich erhellt nach §. 40., daß die Verlängerungen von Cd, Ce bis zu c, d. i. die Bogen cd, ce mit dem Bogen de des liegenden größten Kreises ein sphärisches, dem Dreiecke DEC symmetrisches oder entgegengesetztes, Dreieck einschließen, welches mit dem sphärischen Dreiecke deC (= t'') die ganze Fläche f'' ausmacht, und dessen Flächeninhalt ebenfalls = a, d. i. gleich dem unseres betrachteten Dreieckes DEC ist, indem jenes, wenn man es umwenden dürfte, mit diesem kongruirte.

Es ist also,

wie $f = \frac{n^0\pi}{180^0} \cdot 2r^2$, eben so $f' = \frac{m^0\pi}{180^0} \cdot 2r^2$ und $f'' = \frac{s^0\pi}{180^0} \cdot 2r^2$.

Wie ferner $f = t + a$ oder $t = f - a$; ebenso ist $t' = f' - a$ und $t'' = f'' - a$; daher $\frac{1}{2}F$ oder

$$2r^2\pi = a + \frac{n^0\pi}{180^0} \cdot 2r^2 - a + \frac{m^0\pi}{180^0} \cdot 2r^2 - a + \frac{s^0\pi}{180^0} \cdot 2r^2 - a.$$

Hieraus ist durch Reduktion und Versetzung

$$(1)\ a = r^2 \left(\frac{n^0\pi}{180^0} + \frac{m^0\pi}{180^0} + \frac{n^0\pi}{180^0} - \pi \right).$$

Allein $180^0 = \pi$ für den Halbmesser $= 1$; folglich, wenn man zugleich statt n, m, s die sphärischen Dreieckswinkel D, E, C, oder, der Gleichförmigkeit wegen, A, B, C setzt,

(2) $a = r^2 (A + B + C - 180^0)$; d. i. der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks ABC ist gleich dem Produkte aus dem Quadrate des Halbmessers der Kugel in den Ueberschuß der Summe der 3 Winkel des Dreiecks über 180^0 oder über 2R, diese $(= 3{,}1415\ldots)$, wie jene oder die Bogen, die ihre Maße sind, im Verhältnisse zum Halbmesser $= 1$ im Längenmaße ausgedrückt (rectificirt).

Beispiel. Es sey das Dreieck ABC ein Theil der Oberfläche der Erde, deren Halbmesser nahe $= 860$ geogr. Meilen ist; die Winkel A, B, C seyen resp. gleich 50^0; 60^0; 150^0. Die Rectification derselben oder der sie messenden Bogen geschieht nach einer der Formeln der Geom. §. 142. Zus. 1., in welchen unserer Voraussetzung gemäß der Halbmesser $= 1$ und $\pi = 3{,}1415\ldots$ ist. Man findet

$$50^0 = \frac{50^0}{180^0}\pi = \frac{5}{18} \cdot 3{,}1415\ldots = 0{,}873\ldots$$

$$60^0 = \ldots = \frac{1}{3} \cdot 3{,}141\ldots = 1{,}047\ldots$$

$$150^0 = \ldots = \frac{5}{6} \cdot 3{,}141\ldots = 2{,}618\ldots$$

Daher $A + B + C - 180^0 \ldots = 4{,}538 - 3{,}142 = 1{,}396$; folglich der Flächeninhalt $a = 860^2 \cdot 1{,}396 = 1032481{,}6$ geogr. Quadratmeilen.

Zusatz 1. Also der Flächenraum eines (in C)

rechtwinkel. Dreieckes $= r^2(A+B-90^0)$;
eines gleichschenkel. " " $= r^2(2A+B-180^0)$;
" gleichseitigen " " $= r^2(3A-180^0)$.

Zusatz 2. Setzt man $a = \delta r^2$, wo δ den fraglichen Ueberschuß bezeichnet; so ist

$$F : a = 4r^2\pi : \delta r^2 = 4\pi : \delta;$$

d. i. die ganze Kugelfläche verhält sich zum sphärischen Dreiecke, wie 4. 180° oder 720° zu δ^0.

Zusatz 3. Aus (1) dieses Paragraphen leuchtet sogleich ein, daß man auch setzen könne:

$$a = \frac{r^2\pi}{180^0}(A+B+C-180^0) = \frac{r^2\pi}{180^0}\cdot\delta.$$

Nach dieser Formel hat man bloß den in Graden ausgedrückten Ueberschuß δ mit $\frac{r^2\pi}{180^0}$ zu multipliziren. Ist aber dieser Ueberschuß, wie es häufig der Fall ist, in Sekunden gegeben; so muß man δ'' mit $\frac{r^2\pi}{180\cdot 60^2} = \frac{r^2\pi}{648000}$ multipliziten.

Nun findet man durch die Proportion

$$\pi : 1 = 648000'' : R''$$

den dem Kreishalbmesser $= 1$ gleichen und in Sekunden ausgedrückten Bogen $R'' = \frac{648000}{\pi}$; aber auch $R'' = \frac{1}{\text{arc}.1''}$ (was evident ist, indem der letzte Ausdruck dasselbe sagt, was schon R'' für sich bezeichnet, daß nämlich dieser Bogen so viel Sekunden habe, als wie oft der Bogen von 1" in dem Halbmesser $= 1$ enthalten ist) und $\text{arc}.1'' = \sin 1''$ (weil der Sinus eines so kleinen Bogens mit diesem selbst zusammenfällt); folglich $R'' = \frac{1}{\sin 1''}$ und $\sin 1'' = \frac{1}{R''} = \frac{\pi}{648000}$. Demnach kann man auch setzen:

$$a = r^2 \cdot \sin 1'' \cdot \delta'',$$

oder, weil $\log \sin 1'' = \log 3{,}141593 - \log 648000 = 0{,}6855749 - 6$ ist, diesem Logar. aber die Zahl $0{,}00000484813 =$

$\frac{1}{206265}$ oder näher $= \frac{1}{206264,8} + \left(= \frac{1}{648000} = \frac{\pi}{\sin R''} = \sin 1''\right)$

entspricht,

$$\delta = r^2 \cdot \delta'' \cdot \frac{1}{206264,8}.$$

Läßt man wieder r den Erdhalbmesser $= 859,5$ geogr. Meilen bedeuten; so ist $\log r^2 . \sin 1'' = 5,8684918 + 0,6855748 - 6 = 0,5540667$, und

$$\log \delta = 0,5540667 + \log \delta.$$

Zusatz 4. Aus der vorletzten Gleichung (§. 8.) hat man

$$\delta'' = \frac{a}{r^2} 206264,8.$$

Ist z. B. $a = 80$ geogr. Quadr. Meil. und r wieder $= 859,5$; so findet man diesen Ueberschuß der 3 Winkel über 2 Rechte $= 22'',28$ (sehr nahe). Da nun auf der Erde, wegen beschränkter Ausdehnung, das sphärische Dreieck, dessen 3 Winkel noch gemessen werden können, den Flächenraum a nicht beträchtlich übersteigen kann; so wird der Trigonometer, der denselben δ beträchtlich (z. B. um 2 + 3 Min.) größer aus der Messung findet, mit Recht schließen, daß die Winkelmessung unrichtig sey.

Nebst diesem Vortheile gewährt diese Gleichung für δ auch den, daß sie in dem Falle, wo ein auf der Erdfläche zu bestimmendes Dreieck wegen seiner beträchtlichen Größe nicht als ebenes gelten kann, die Korrektion der Winkel gibt, indem man nämlich von jedem Winkel des Dreiecks den dritten Theil des berechneten δ (obgleich dieses immer sehr klein ist) abzieht.

Zusatz 5. Der Ueberschuß δ läßt sich auch z. B. aus A und den umschließenden Seiten b, c finden. Nämlich wegen $\frac{1}{2}\delta = -[R - \frac{1}{2}(A+B+C)]$ ist

$$\cot\tfrac{1}{2}\delta = -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

$$= -\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A + \operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C)}{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}A \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C)} \cdot \text{ nr. 86.}$$

$$= -\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c) \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}A + \cot\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c) - \cos\frac{1}{2}(b-c)}.$$

§. 50. (ρ).

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}A^2 + \cos\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}A^2}{[\cos\frac{1}{2}(b-c) - \cos\frac{1}{2}(b+c)]\sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}A} \quad \text{nr. 18. 25.}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}b\,.\,\cos\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b\,.\,\sin\frac{1}{2}c\,(\cos\frac{1}{2}A^2 - \sin\frac{1}{2}A^2)}{\sin\frac{1}{2}b\,.\,\sin\frac{1}{2}c\,.\,\sin A}.$$

nr. 69. 70. 72. 146.

Daher, vermöge nr. 151. und indem man durch $\cos\frac{1}{2}b\,.\cos\frac{1}{2}c$ dividirt,

$$\cot\tfrac{1}{2}\delta = \frac{1 + \tang\frac{1}{2}b\,.\,\tang\frac{1}{2}c\,.\,\cos A}{\tang\frac{1}{2}b\,.\,\tang\frac{1}{2}c\,.\,\sin A}, \text{ oder}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}\delta = \frac{\tang\frac{1}{2}b\,.\,\tang\frac{1}{2}c\,.\,\sin A}{1 + \tang\frac{1}{2}b\,.\,\tang\frac{1}{2}c\,.\,\cos A}.$$

Oder auch, indem man die 2te Seite der vorigen Gleichung durch $\tang\frac{1}{2}b\,.\,\tang\frac{1}{2}c$ dividirt,

$$\cot\tfrac{1}{2}\delta = \frac{\cot\frac{1}{2}b\,.\,\cot\frac{1}{2}c + \cos A}{\sin A}.$$

Eben diese Formel gibt auch den Flächenraum a des sphärischen Dreieckes aus denselben Stücken A und b, c; denn den Halbmesser $r = 1$ gesetzt, ist auch

$$\cot\tfrac{1}{2}a = -\tang\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \cot\tfrac{1}{2}\delta.$$

II.

Höhere Algebra.

A.

Von den höheren Gleichungen überhaupt.

§. 56. 1. In wiefern man die erste Seite einer höheren Gleichung, die auf Null gebracht ist, als gleiches Produkt aus lauter Binomialfaktoren darstellen soll, macht es keinen Unterschied, die Werthe von x oder die Wurzeln der Gleichung seyen mögliche oder imaginäre Größen (vgl. allgem. Größenl. §§. 72. 82. Zus. 4.). Wie nämlich die Gleichung

$$x^2 = a^2 \text{ oder } x^2 - a^2 = 0 \text{ durch } (x+a)(x-a) = 0$$

dargestellt wird; eben so hat man, wenn a wieder eine + Größe bezeichnet, statt der Gleichung

$$x^2 = -a \text{ oder } x^2 - a = 0 \text{ diese: } (x+\sqrt{a}\sqrt{-1})(x-\sqrt{a}\sqrt{-1}) = 0,$$

wo $x = \pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}\sqrt{-1}$ ist (allgem. Größenl. §. 58.). Auf ganz gleiche Weise entwickelt man aus $x^{2n} = -a$ die Wurzeln $x = \pm\sqrt[2n]{-a} = \pm\sqrt[n]{(\sqrt{-a})} = \sqrt[n]{(\pm\sqrt{a}\sqrt{-1})}$, oder $x^n = \pm\sqrt{a}\sqrt{-1}$; daher hat man auch statt der Gleichung

$$x^{2n} + a = 0 \text{ diese: } (x^n + \sqrt{a}\sqrt{-1})(x^n - \sqrt{a}\sqrt{-1}) = 0.$$

Für $n = 2$ wird $x = \pm\sqrt{(\pm\sqrt{a}\sqrt{-1})}$, wo das wiederholte Zeichen $\pm$ zeigt, daß x vier imaginäre Werthe, oder jene Gleichung 4 imaginäre Wurzeln habe, folglich $x^4 + a = 0$ dargestellt werden könne durch

$$(x+\sqrt{(+\sqrt{a}\sqrt{-1})}).(x-\sqrt{(+\sqrt{a}\sqrt{-1})}).(x+\sqrt{(-\sqrt{a}\sqrt{-1})}) \\ .(x-\sqrt{(-\sqrt{a}\sqrt{-1})} = 0.$$

2. Aus dieser Geneſis imaginärer Wurzeln erhellt zugleich, daß ſie in einer Gleichung nur paarweiſe vorhanden ſeyen, daß folglich eine Gleichung von ungeradem Grade

wenigstens eine mögliche oder reelle Wurzel haben müsse, vorausgesetzt, daß (wie wir unten beweisen) sie eben so viele Wurzeln habe, als ihr Grad anzeigt. So ist z. B. von $x^3 = a^3$ die mögliche Wurzel $x = a$. Allein diese Gleichung, vollständig aufgelöst, wird 3 Wurzeln haben. Um daher die 2 andern Wurzeln zu finden, dividire man $x^3 - a^3 = 0$ durch $x - a = 0$, wodurch man den Quotienten $x^2 + ax + a^2 = 0$ (allgem. Größenl. §. 82. Zus. 5.) erhält. Aus dieser letzten Gleichung entwickelt man die beiden imaginären Wurzeln

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot a = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \cdot a,$$

und die gegebene Gleichung $x^3 - a^3 = 0$ wird dargestellt durch

$$(x-a)\left(x + \frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \cdot a\right)\left(x + \frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \cdot a\right) = 0.$$

3. Schon diese wenigen Formen unmöglicher Größen leiten darauf, daß jede unmögliche Größe auf den Ausdruck:

$$P \pm Q\sqrt{-1},$$

wo P und Q mögliche + oder − Größen bezeichnen und P auch $= 0$, $Q = 1$ seyn kann, gebracht werden könne, was allgemein so bewiesen wird:

Vorbereitung. Um den Ausdruck: $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})}$ einfacher zu machen, seyen $\sqrt{x}$ und $\pm\sqrt{y}$ die Wurzeln des Binomiums $A \pm \sqrt{B}$, oder es sey $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, daher

$$A \pm \sqrt{B} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = x \pm 2\sqrt{xy} + y.$$

Setzt man nun den rationalen Theil des Binomiums gleich dem rationalen Theile der andern Seite der Gleichung, nämlich $A = x + y$ und eben so den irrationalen $\pm\sqrt{B} = \pm 2\sqrt{xy}$; so ist auch $A^2 = x^2 + 2xy + y^2$ und $B = 4xy$, daher $A^2 - B = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$, oder $\sqrt{(A^2-B)} = x - y$, folglich (weil $A = x + y$) hat man $A + \sqrt{(A^2-B)} = 2x$ und $x = \frac{A + \sqrt{(A^2-B)}}{2}$ oder $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{(A^2-B)}}{2}}$. Eben so ist $2y = A - \sqrt{(A^2-B)}$ oder $\sqrt{y} = \sqrt{\frac{A - \sqrt{(A^2-B)}}{2}}$. Daher denn $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ oder

$$\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{(A^2-B)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{(A^2-B)}}{2}}.$$

Ist nun A^2-B ein vollkommnes Quadrat $= M^2$, daher $\sqrt{(A^2-B)} = M =$ einer Rationalzahl; so hat man den einfacheren Ausdruck:

$$\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = \sqrt{\frac{A+M}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-M}{2}}.$$

So ist z. B. $\sqrt{(7+\sqrt{13})}$, weil $A^2 = 7^2 = 49$ und $A^2-B = 49-13 = 36$, also $M = 6$ ist, einfacher ausgedrückt

$$= \sqrt{\frac{7+6}{2}} + \sqrt{\frac{7-6}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{26} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{26}+\sqrt{2}).$$

Wenn demnach z. B. $B = -b^2$, also $-B = b^2$ ist; so hat man $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = \sqrt{(A \pm \sqrt{-b^2})}$ oder

$$\sqrt{A \pm b\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2+b^2)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2+b^2)}}{2}}.$$

Aber dieses letzte Glied ist auch $= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(A^2+b^2)}-A}{2} \cdot -1\right)}$

$= \sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+b^2)}-A}{2}} \cdot \sqrt{-1}$; folglich ist

$$\sqrt{(A \pm b\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+b^2)}+A}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+b^2)}-A}{2}} \cdot \sqrt{-1}.$$

Setzt man nun das erste Glied, als mögliche Größe $= P$ und die Größe $\sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+b^2)}-A}{2}} = Q$; so ist auch

$$\sqrt{(A \pm b\sqrt{-1})} = P \pm Q\sqrt{-1}.$$

Dieses die (auch noch in anderer Rücksicht nützliche) Ableitung unseres obigen Ausdruckes, — und nun den Beweis, daß auf eben diese Form jede imaginäre gebracht werden könne.

Der Exponent $2n$ im allgemeinen Ausdrucke $\sqrt[2n]{-b}$ einer unmöglichen Größe ist entweder eine Potenz von 2, d. i. $2n = 2^m$, oder er ist ein Produkt aus einer solchen Potenz in in irgend eine ungerade Zahl p, d. i. $2n = 2^m \cdot p$. Im ersten Falle ist auch $\sqrt[2^m]{-a}$, und im zweiten Falle $\sqrt[2^m.p]{-b}$ ein Ausdruck einer unmöglichen Größe. Aber $\sqrt[2^m.p]{-b} = \sqrt[2^m]{(\sqrt[p]{-b})}$ und, weil p ungerade, $\sqrt[p]{-b}$ eine mögliche Größe, die wir $= -a$ setzen

können, folglich bekommt auch im zweiten Falle der Ausdruck $\sqrt[2^m]{-b}$ die Form $\sqrt[2^m]{-a}$, stimmend mit der des Ausdruckes $\sqrt[2^n]{-b}$.

Man kann also jede imaginäre Größe auch durch $\sqrt[2^m]{-a} = \sqrt[2^m]{a}\sqrt[2^m]{-1}$, oder, die mögliche Größe $\sqrt[2^m]{a} = A$ gesetzt, durch $A\sqrt[2^m]{-1}$ ausdrücken.

Nun ist $\sqrt[2^m]{-1} = \sqrt[2.2^{m-1}]{-1} = \sqrt[2^{m-1}]{\sqrt{(-1)}} = \sqrt[2^{m-1}]{\sqrt{(0+\sqrt{-1})}}$
$= \sqrt[2^{m-2}]{\sqrt{(\sqrt{(0+\sqrt{-1})})}}$.

Aber nach Obigem ist $\sqrt{(0+\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{\sqrt{(0+1)}+0}{2}}$
$+ \sqrt{\frac{\sqrt{(0+1)}-0}{2}}.\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{-1}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\sqrt{-1})$, und diese letzte Größe hat die Form $p'+q'\sqrt{-1}$, folglich ist auch $\sqrt[2^m]{-1} = \sqrt[2^{m-2}]{(p'+q'\sqrt{-1})}$.

Auf dieselbe Weise ist auch

$\sqrt[2^{m-2}]{(p'+q'\sqrt{-1})} = \sqrt[2^{m-3}]{(\sqrt{(p'+q'\sqrt{-1})})} = \sqrt[2^{m-3}]{(p''+q''\sqrt{-1})}$
$= \sqrt[2^{m-4}]{(\sqrt{(p''+q''\sqrt{-1})})} = \sqrt[2^{m-4}]{(p'''+q'''\sqrt{-1})}$, u. s. w., d. i. man kommt auf diese Weise sicher einmal auf den Ausdruck:

$\sqrt[2^{n-m}]{(p+q\sqrt{-1}} = \sqrt[2^0]{(p+q\sqrt{-1})} = p+q\sqrt{-1}$, so daß also auch $\sqrt[2^m]{-1} = p+q\sqrt{-1}$, demnach $A\sqrt[2^m]{-1} = Ap+Aq\sqrt{-1}$ ist. Setzt man nun $Ap = P$ und $Aq = Q$, und berücksichtiget, wie oben, das doppelte Zeichen $\pm$; so ist $\pm A\sqrt[2^m]{-1} = P \pm Q\sqrt{-1}$; d. i. von dieser Form ist jede imaginäre Größe.

4. Weil demnach je zwei zusammengehörige, imaginäre Wurzeln einer Gleichung durch

$$p+q\sqrt{-1} \text{ und } p-q\sqrt{-1}$$

allgemein ausgedrückt sind; so erhellt, daß ihre Summe eine mögliche Größe $= 2p$, aber ihre Differenz wieder eine unmögliche Größe $= \pm 2q\sqrt{-1}$ sey.

5. Wenn $+a$; $+b$ und $+c$ die 3 einzigen, ganz verschiedenen, möglichen und zwar rationalen Wurzeln einer Gleichung (α) sind; so sind diese durch

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

dargestellt, oder sie ist, das Produkt entwickelt, diese:

$$(\alpha)\ldots x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc\,x^0=0.$$

Jeder jener Faktoren, $=0$ gesetzt, macht, wie es seyn muß, die Gleichung zu 0, oder läßt einen Werth von x erkennen, der statt x in (α) substituirt, der Gleichung Genüge thut; man hat nämlich aus $x-a=0$ wieder $x=+a$, u. s. w.

Da die kubische Gleichung (α) auch dadurch entsteht, daß man die durch $(x-a)(x-b)=0$ dargestellte Quadratische $x^2-(a+b)x+ab=0$ noch mit $x-c$ multiplizirt; so entwickelt man aus

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$$

leicht die biquadratische (β) durch Multiplikation von (α) mit $x-d$; man erhält nämlich

$$(\beta)\ldots x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$
$$-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd\,x^0=0.$$

U. s. w.

6. Gleichungen, wie (α) und (β), heißen vollständige und nach den Potenzen der unbekannten Größe x geordnete Gleichungen.

Eine allgemeine Gleichung dieser Art wird demnach, wenn die Coefficienten der einzelnen Glieder mit ihren Zeichen unentwickelt bleiben, oder kurz durch $+A$; $+B$; $+C\ldots+P$ bezeichnet werden, die Form haben müssen:

$$(\gamma)\ldots x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots+Nx+P=0.$$

Diese Normgleichung, wie (α) und (β) vollständig auflösbar gedacht, kann in n Binomialfaktoren zerlegt werden. Denn man setze $+a$ sey eine Wurzel; so hat man durch Substitution dieses Werthes a statt x in (γ) den Werth:

$$P=-a^n-Aa^{n-1}-Ba^{n-2}-\ldots-Na,$$

wo a, als gemeinschaftlicher Faktor der rechten Seite der Gleichung, auch Faktor von P seyn muß. Diesen Werth von P in (γ) eingeführt, geht diese über in

$$(x^n-a^n)+A(x^{n-1}-a^{n-1})+B(x^{n-2}-a^{n-2})+\ldots+N(x-a)=0.$$

Da diese Gleichung durch den gemeinschaftlichen Faktor x—a theilbar ist, so erhält man durch diese Division eine ähnliche, aber um 1 Grad niedrigere Gleichung, die folglich, wie (γ), wenn +b eine andere Wurzel ist, abermals durch x—b theilbar ist. Da diese Schließart immer rekurrirt, so folgt, daß die erste Seite der Gleichung (γ) in n Binomialfaktoren, wie (x—a) (x—b) ... zerlegbar seyn müsse.

7. Vermöge 5. folgt hieraus weiter, daß auch jede Gleichung von jener allgemeinen Form n Wurzeln, d. i. so viel Wurzeln habe, als der höchste Exponent von x Einheiten habe.

8. Reflektirt man auf die Zeichen der Glieder von (α) und (β) unter 5., deren + Wurzeln wir als möglich annahmen; so sieht man leicht, daß der Zeichenwechsel nicht zufällig seyn könne. Nimmt man nämlich 3 oder 4 mögliche — Wurzeln an, bezeichnet durch —a; —b; —c; —d, und entwickelt nun aus

$$(x+a)(x+b)(x+c)=0$$

$$\text{oder } (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=0,$$

wie oben, die Gleichungen (i) und (k), in welchen die Coefficienten kurz durch m, n, p, q ausgedrückt sind; so ist

$$(i)\ldots x^3+mx^2+nx+px^0=0$$

$$\text{und } (k)\ldots x^4+mx^3+nx^2+px+qx^0=0$$

Gleichungen ohne allen Zeichenwechsel, oder mit lauter Zeichenfolgen (Wiederholungen desselben Zeichens).

Diese Betrachtung führte durch Induktion zur Regel: Eine vollständige Gleichung, deren Wurzeln möglich sind, hat, wie (α) oder (γ), so viel + Wurzeln, als Abwechslungen der Zeichen +—, und so viel — Wurzeln (wie (i) oder (k)), als Wiederholungen desselben Zeichens Statt finden.

Die allgemeine Gültigkeit dieser Regel erhellt kurz so: Die Normgleichung (γ) unter 6., deren Coefficienten A, B, ... + oder — Zahlen seyen, werde noch mit $x-a=0$ multiplizirt. Dadurch entsteht die neue

$$(\varepsilon)\ldots\left\{\begin{array}{l} x^{n+1}+Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Px \\ \quad -ax^n-aAx^{n-1}-aBx^{n-2}-\ldots-aNx-aP \end{array}\right\}=0.$$

Man setze, daß der Coefficient A des zweiten Gliedes des obern, mit (γ) in den Zeichen übereinstimmenden, Theiles, einen + Zahlwerth habe, der $>-a$ sey; so bleibt das Zeichen des zweiten Gliedes ungeändert +. Setzt man nun, der Coefficient $-aA$ im untern Theile von (ε) sey eine Zahl $>B$; so sieht man, daß das dritte Glied des obern Theiles (oder unserer Gleichung (γ)) nur dann das Zeichen — bekommen könne, wenn, wie im zweiten, so auch im dritten Gliede das Zeichen +, d. i. eine Zeichenwiederholung Statt findet. U. s. w. Angenommen endlich, daß man durch keine Zeichenwiederholung genöthigt werde, das Zeichen eines Gliedes des obern Theiles oder von (γ) in das entgegengesetzte zu ändern, oder daß dieses Theiles Zeichen dieselben, wie in (γ) bleiben; so findet doch in der Gleichung (ε) wènigstens ein Zeichenwechsel wegen des letzten zugehörigen Gliedes $-aP$ Statt. Haben daher schon mehrere Abwechslungen der Zeichen vermöge mehrerer Zeichenwiederholungen Statt gefunden; so wird, indem man mit $x-a$ multiplicirte, vermöge der letzten Zeichenwiederholung und wegen $-aP$ eine Zeichenabwechslung mehr entstehen, wie wir in (β) verglichen mit (α) sahen; d. i. eine Zeichenabwechslung mehr in (ε) läßt schließen, daß (ε) eine + Wurzel ($x=a$) mehr haben müsse, als (γ).

Wird ferner (γ) mit $x+a=0$ multiplizirt, so resultirt die neue Gleichung

$$(\lambda)\ldots\left\{\begin{array}{l} x^{n+1}+Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Px \\ \quad +ax^n+aAx^{n-1}+\ldots+aNx+aP \end{array}\right\}=0.$$

Auch in dieser Gleichung sind die von den Zahlwerthen der Coefficienten A, B, ... abhängigen Zeichen der Glieder des obern Theiles dieselben, wie in (γ), und man findet sich nur

dann genöthiget, eines dieser Zeichen in das entgegengesetzte zu verwandeln, wenn bei 2 unmittelbar aufeinander folgenden Gliedern eine Zeichenabwechslung Statt findet. Denn man setze wieder, es gelte $+A$, daher im untern Theile von (λ) auch $+aA$, dessen Zahlenwerth zugleich kleiner als B sey; so kann das dritte Glied $(B+aA)x^{n-1}$ nur dann das Zeichen — erhalten, wenn B dieses Zeichen hat, d. i. wenn eine Zeichenabwechslung, nämlich $+Ax^n - Bx^{n-1}$, im obern Theile oder in der Gleichung (γ) Statt findet. Nimmt man daher an, daß in (γ) oder im obern Theile von (λ) lauter Zeichenabwechslungen vorkommen; so hat doch (λ) wenigstens eine Zeichenwiederholung, indem aP mit Px nothwendig dasselbe Zeichen hat; oder man erhält, indem (γ) mit $x-a$ multiplizirt wird, in dem Produkte eine Zeichenwiederholung mehr, wie wir dieses oben in (k) verglichen mit (i) sahen.

In wiefern demnach eine Gleichung nten Grades, deren n Wurzeln mögliche Größen sind, aus der Entwicklung des Produktes der Binomialfaktoren von der Form $x \pm a$ entstanden betrachtet wird, geht aus dem Gesagten klar hervor, daß zu den $n+1$ Combinationen (Abwechslung und Wiederholung) der Zeichen ihrer Glieder nothwendig dadurch eine Zeichenabwechslung komme, daß man wegen Einführung einer neuen + Wurzel die Gleichung mit $x-a$ multiplizirt; daß hingegen zu jenen Combinationen eine Zeichenwiederholung kommen müsse, wenn man wegen Einführung einer — Wurzel $(x=-a)$ die Gleichung noch mit $x+a$ multiplizirt. Woraus denn folgt, daß der Zahl der Zeichenabwechslungen eine gleiche Zahl von + Wurzeln entspreche, daß dagegen die Gleichung nur so viel — Wurzeln habe, als sich unmittelbare Wiederholungen derselben Zeichen in ihr vorfinden.

9. Daß man aber mittelst dieser Regel nicht auch die Zahl der etwa in einer Gleichung vorhandenen 2 oder 4, ... imaginären Wurzeln erkennen könne, erhellt schon aus den unter 1. angeführten Beispielen. Stellt man sich nämlich eine Gleichung, die z. B. 2 imaginäre Wurzeln hat, in lauter Binomialfaktoren zerlegt vor, unter welchen sich demnach auch zwei von der Form $x \pm bi$ (wo bi die kurze Bezeichnung der imaginären

Wurzel ist) befinden; so verschwinden die imaginären Theile der Binomien bei Entwicklung des Produktes, auf welches daher obige Regel nicht weiter mit Zuverlässigkeit anzuwenden ist.

Sicherer schließt man auf das Vorhandenseyn imaginärer Wurzeln, wenn durch die Multiplikation einer Gleichung entweder mit $x+p$, z. B. mit $x+1$, die Anzahl der Wiederholungen desselben Zeichens, oder mit $x-p$, die Zahl der Zeichenabwechslungen *nicht* (wie es doch vermöge 8. seyn müßte) vermehrt wird. Ganz gewiß hat aber eine Gleichung imaginäre Wurzeln, wenn zwei Glieder derselben, zwischen welchen ein Glied x^m fehlt, dasselbe Zeichen haben. Es sey z. B. eine solche Gleichung diese kubische

$$x^3 + 20x - 144 = 0,$$

in welcher man das fehlende Glied mit gleichem Rechte durch $+0x^2$ und $-0x^2$ ergänzt denken kann. Allein im ersten Falle fänden 2 Wiederholungen desselben Zeichens $+$, und im andern Falle 2 Zeichenabwechslungen, demnach auch $2-$ und $2+$ Wurzeln zugleich Statt. Diese Ungereimtheit verschwindet nur durch das Daseyn imaginärer Wurzeln, indem bei dem vorhin bemerkten Verschwinden des imaginären Theiles der Binomialfaktoren der Uebergang von $+x^3$ zu $+20x$ erklärlich wird. So entwickelt man unsere kubische Gleichung, deren 3 Wurzeln sind: $-2+4\sqrt{-2}$; $-2-4\sqrt{2}$ und $+4$ ganz richtig aus

$$(x+2-4\sqrt{-2})\,(x+2+4\sqrt{-2})\,(x-4) = 0.$$

10. Aus dem Gesagten folgt zugleich, daß man, wenn ein Glied x^m einer Gleichung zwischen den Gliedern $+x^{m+1}$ und $-x^{m-1}$ fehlt, wegen $\pm 0x^m$ auf das Vorhandenseyn einer möglichen $+$ und $-$ Wurzel schließen dürfe.

11. Die gleichförmigen Entwickelungen vollständiger Gleichungen, wie (α) und (β) unter 5., zeigen klar, daß der Coefficient des zweiten Gliedes die Summe der Wurzeln, oder aller Unionen $(\overset{1}{c}(a, b, c, \ldots))$; der Coefficient des dritten Gliedes die Summe aller reinen Binionen $(\overset{2}{c}(a, b, c, \ldots))$; der Coefficient des vierten Gliedes die Summe aller reinen

Termionen, ... der Coefficient des letzten Gliedes, wenn man nämlich den Faktor x^0 hinzudenkt, oder das letzte Glied schlechthin das Produkt aller Wurzeln der betrachteten Gleichung, d. i. allgemein (in Beziehung auf n Wurzeln) $= {}^{n}c(a, b, c, \ldots)$ sey. Man kann daher Gleichungen, die n + Wurzeln haben, kurz durch

$$x^n - {}^{1}c\,x^{n-1} + {}^{2}c\,x^{n-2} - {}^{3}c\,x^{n-3} + \ldots \pm {}^{n-1}c\,x \mp {}^{n}c = 0,$$

und Gleichungen, wie (i) und (k) unter 8., mit lauter — Wurzeln kurz durch

$$x^n + {}^{1}c\,x^{n-1} + {}^{2}c\,x^{n-2} + {}^{3}c\,x^{n-3} + \ldots + {}^{n-1}c\,x + {}^{n}c = 0$$

allgemein darstellen. (Vgl. allg. Größenl. §. 158. Zus. 2.).

12. Hinsichtlich des Ordnens einer Gleichung (s. oben unter 6.) bemerken wir hier noch eigens, daß x^n, als erstes Glied (mit der höchsten Potenz von x), mit + und ohne ausgedrückten Coefficienten stehen müsse, die übrigen Glieder aber die Form ganzer Zahlen haben sollen.

Um 1) statt $-x^n$ zu haben $+x^n$, ändert man kurzweg die Zeichen aller Glieder in die entgegengesetzten; ist 2) fx^n gegeben und f ist gemeinschaftlicher Faktor; so verschwindet dieser durch Division. In jedem andern Falle macht man $x = \frac{y}{f}$, substituirt diesen Werth in der vorgegebenen Gleichung und hebt die Brüche durch Multiplikation auf, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es sey $\quad ax^3 - bx^2 - cx - p = 0$

die vorgegebene Gleichung. Für diese hat man, $x = \frac{y}{a}$ gesetzt,

$$\frac{y^3}{a^2} - \frac{by^2}{a^2} - \frac{cy}{a} - p = 0, \text{ oder } y^3 - by^2 - acy - a^2p = 0.$$

Wäre das letzte Glied $= 1$; so setzte man $x = \frac{1}{y}$. Z. B. in $10x^3 - 4x^2 - 5 - 1 = 0$ substituirt $\frac{1}{y}$ statt x, hat man $\frac{10}{y^3} - \frac{4}{y^2} - \frac{5}{y} - 1 = 0$, oder $10 - 4y - 5y^2 - y^3 = 0$, und nach den Potenzen von y geordnet, $y^3 + 5y^2 + 4y - 10 = 0$.

Erscheinen 3) mehrere Glieder der Gleichung unter der Bruchform, so sucht man hinsichtlich der Nenner nach §. 48. der allg. Größenl. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $= k$, setzt $x = \frac{y}{k}$ und verfährt, wie vorhin.

Sey z. B. gegeben

$$x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{n} + \frac{c}{p} = 0, \text{ wo } mnp = k \text{ ist;}$$

setzt man daher $x = \frac{y}{mnp}$; so hat man

$$\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^2n^2p^2} + \frac{by}{mn^2p} + \frac{c}{p} = y^3 + anpy^2 + bm^2np^2y + cm^3n^2p^2 = 0.$$

Sind 4) die Coefficienten Irrationalzahlen; so verwandelt man sie in Decimalzahlen, die jene so nahe, als man will, ausdrücken.

15. Hat eine so geordnete Gleichung lauter ganze Zahlen zu Coefficienten; so können die reellen Wurzeln derselben durch keine Art von Brüchen genau ausgedrückt werden, sind also entweder ganze oder Irrationalzahlen.

Denn in der allgemeinen Gleichung

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots + Tx + U = 0$$

sey der ächte oder unächte, auf den kürzesten Ausdruck gebrachte Bruch $\frac{a}{b} = x$, d. i. eine Wurzel; so geht jene Gleichung, wenn man zugleich mit b^n multiplizirt, in diese über:

$$a^n + Pa^{n-1}b + Qa^{n-2}b^2 \ldots + Tab^{n-1} + Ub^n = 0,$$

oder $a^n + b(Pa^{n-1} + Qa^{n-2}b \ldots + Tab^{n-2} + Ub^{n-1}) = 0.$

Nun ist das erste Glied a^n nicht eben so, wie das zweite, durch b meßbar, indem b kein Faktor von a ist; folglich sind beide Glieder nothwendig ungleich, bringen also die Gleichung nicht auf Null. Demnach kann $\frac{a}{b}$, durch dessen Substitution für x die Gleichung nicht zu Null wird, keine Wurzel derselben seyn.

14. Die Methode, die gleichen Wurzeln einer Gleichung zu erkennen, besteht wesentlich in Folgendem:

a) Man setze, die allgemeine Gleichung

$$(M)\ldots x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \ldots + Tx + U = 0$$

habe die Wurzeln a, b, c, ..., so daß also $x-a=0$; $x-b=0$; ... sey; so ist x, obgleich in jeder dieser Gleichungen eine verschiedene Größe ausdrückend, doch der allgemeine Repräsentant aller der Gleichung genugthuenden Werthe. Man setze ferner, von (M) sey eine Wurzel a gefunden, und der Unterschied zwischen a und jeder der übrigen Wurzeln sey y, so daß also $b-a=y$; $c-a=y$; ..., oder $a+y=b$; $a+y=c$; ... sey; so ist auch y Repräsentant aller jener Unterschiede.

Nun ist aber $x=b$ oder $x=a+y$; eben so $x=c$ oder $x=a+y$; ... folglich läßt sich $a+y$ als Repräsentant aller nebst a noch in (M) vorhandenen Werthe von x statt x im (M) substituiren. Thut man dieses und entwickelt nach der Binomialformel (allgem. Größenl. §. 65.) die Potenzen von $a+y$; so erhält man eine um einen Grad niedrigere Gleichung (N), nämlich:

$$x^m = a^m + ma^{m-1}y + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}y^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}y^3 + \ldots$$

$$Px^{m-1} = Pa^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2}y + \frac{m-1.m-2}{1.2}Pa^{m-3}y^2 + \ldots$$

$$Qx^{m-2} = Qa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3}y + \frac{m-2.m-3}{1.2}Qa^{m-4}y^2 + \ldots$$

$$Rx^{m-3} = Ra^{m-3} + (m-3)Ra^{m-4}y + \frac{m-3.m-4}{1.2}Ra^{m-5}y^2 + \ldots$$

. . . . . .

$$Tx = Ta + Ty$$

$$U = U$$

Da nun die Summe (V) der Glieder in der ersten Vertikalreihe, nämlich $a^m + Pa^{m-1} + \ldots$, $= 0$ ist, indem $(V)=0$ (da $x=a$ gefunden seyn soll) unsere Gleichung (M) ausdrückt; so kann (V) aus der neuen Gleichung (N) weggelassen werden. Wenn man ferner alle Coefficienten von y in den zweiten Gliedern mit A, die von y^2 mit B, u. s. w. kurz so bezeichnet; so ist

$$(N) \ldots Ay + \frac{B}{2}y^2 + \frac{C}{2.3}y^3 + \frac{D}{2.3.4}y^4 + \ldots y^m = 0,$$

oder, alle Glieder durch y dividirt,

$$(N') \ldots A + \frac{B}{2}y + \frac{C}{2.3}y^2 + \frac{D}{2.3.4}y^3 + \ldots y^{m-1} = 0.$$

b) Angenommen, (M) habe noch eine der a gleiche Wurzel, d. i. es sey entweder $a = b$ oder $a = c, \ldots$, folglich $b - a$, wie $c - a = 0, \ldots$, so muß auch, weil $y = b - a$ oder $= c - a$ ist, ein Werth von y in (N') $= 0$ seyn. Allein in diesem Falle verschwinden in (N') alle Glieder außer A, welches denn $= 0$ wird. Es thut also die Wurzel a sowohl der Gleichung (V) $= 0$, als der Gleichung $A = 0$ Genüge, indem jene Gleichung dadurch erhalten wurde, daß man die als wahre Wurzel angenommene Größe in (M) substituirte statt x, die letzte Gleichung $A = 0$ aber dadurch entstand, daß man abermals a als wahre Wurzel von (M) annahm.

Hieraus ist denn klar, daß, wenn die ursprüngliche Gleichung (M) 2 gleiche Wurzeln a, also $(x - a)(x - a)$ oder $(x - a)^2$ zum Faktor hat, auch die Gleichungen (V) $= 0$ und $A = 0$ eine Wurzel $= a$, folglich einen Faktor $x - a$ mit (M) gemein haben müssen.

c) Hat (M) 3 gleiche Wurzeln $a = b = c$; so muß noch ein Werth von y in (N') $= 0$ seyn; folglich wird auch $B = 0$. Denn wegen des ersten $y = 0$ wurde das erste Glied von (N'), nämlich $A = 0$. Dividirt man daher die übrigen Glieder durch y; so verschwinden sie wegen des zweiten $y = 0$ bis auf $\frac{B}{2}$, das $= 0$ wird, oder man hat $B = 0$.

Unter der Annahme also von 3 gleichen Wurzeln in (M) thut a den 3 Gleichungen (V) $= 0$; $A = 0$ und $B = 0$ Genüge, und (M) hat $(x = a)^3$ zum Faktor. U. s. w.

d) Man kann daher auch umgekehrt schließen, daß, wenn in (N') $A = 0$ ist, die ursprüngliche Gleichung (M) noch eine der a gleiche Wurzel habe, daß folglich, wenn (V) $= 0$ und $A = 0$ einen gemeinschaftlichen Faktor $x - a$ oder $(x - \alpha)(x - \beta)$ haben, der unbekannten Größe x in (M) 2 Werthe,

jeder $= a$, oder (im andern Falle) jeder $= \alpha$ und dann noch 2 andere Werthe, jeder $= \beta$ zukommen, (M) sonach im ersten Falle $(x-a)^2$ und im zweiten Falle $(x-a)^2 . (x-\beta)^2$ zum Faktor haben müsse. U. s. w.

c) Die Gleichung $A = 0$ oder (vermöge der dem A gegebenen Bedeutung) $ma^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2} + \ldots + T = 0$, die mittelst der Hypothese $x = a$ erhalten wurde, demnach mit $mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} \ldots + T = 0$ identisch ist, kann aus der Gleichung $(V) = 0$ oder aus $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Tx + U = 0$ leicht hergeleitet werden. Das Verfahren ist:

Man multiplizire jedes Glied der ersten Seite dieser letzten Gleichung mit dem Exponenten von x desselben Gliedes (x^m mit m; Px^{m-1} mit $m-1$; ..) und vermindere dann den Exponenten von x in jedem Gliede um die Einheit. Auf diese Weise hat man $mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + \ldots$ und da aus U oder Ux^0 wird $0 . U = 0$, aber aus Tx wird $1 . Tx^{1-1}$, d. i. T; so hat man auch das letzte Glied der abzuleitenden Gleichung $A = 0$.

Auf gleiche Weise wird aus $A = 0$ auch $B = 0$, und aus dieser $C = 0$, u. s. w. hergeleitet.

Beispiel. Es sey die Gleichung v. 5. gemischten Grade

(m) ... $x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0$

vorgegeben, aus welcher nach c) abgeleitet wird

(n) ... $5x^4 - 52x^3 + 201x^2 - 342x + 216 = 0$.

Man suche (nach allgem. Größenl. §. 47.) von (m) und (n) den gemeinschaftlichen Faktor. Zu diesem Ende dividire man die zuvor mit 5 multiplizirte (m) durch (n); man findet den Quotienten $x - 13$ mit dem Reste $-6x^3 + 48x^2 - 126x + 108$, oder (indem man durch -6 dividirt) $x^3 - 8x^2 + 21x - 18$. Hiedurch (n) dividirt, ist $5x$ der Quotient ohne Rest; also jener letzte Divisor gemeinschaftlicher Faktor von (m) und (n).

Dieser Faktor ist selbst $= 0$; denn wenn man die ersten Seiten von (m) und (n) mit m′ und n′, den ersten Quotienten

mit q, den erhaltenen unveränderten Rest mit r und den veränderten mit r' bezeichnet; so ist $\frac{m'}{n'} = q$, daher $m' = n'q + r$ oder $r = m' - n'q$; aber m' wie $n' = 0$, folglich auch $r = 0$ und auch $r' = x^3 - 8x^2 \ldots = 0$, d. i. man hat die Gleichung v. 3. Grade

$$(p) \ldots x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0,$$

welche vermöge 6. als Produkt aus 3 Binomialfaktoren vom 1. Grade zu betrachten ist.

Man entwickle nun aus (n) oder $A = 0$ die Gleichung $B = 0$ oder

$$(q) \ldots 20x^3 - 156x^2 + 402x - 342 = 0,$$

und dividire, wie vorhin, die zuvor mit 20 multiplizirte Gleichung (p) durch (q). Man findet $x - 3$ als letzten genauen Divisor, oder als gemeinschaftlichen Faktor von jenem ersten (p) und von $B = 0$ oder von (q).

Demnach hat die ursprüngliche Gleichung (m) drei gleiche Wurzeln, jede $= +3$ und daher zu einem ihrer Binomialfaktoren den Faktor $(x-3)^3$. Allein wenn man (p) durch $x - 3$ und den Quotienten $(x^2 - 5x + 6)$ abermals durch $x - 3$ dividirt; so findet man $x - 2$ als letzten Quotienten. Folglich hat (m) noch $+2$ zweimal zur Wurzel, indem dieser Faktor $x - 2$ den Gleichungen (m) und (n) (oder $A = 0$) gemeinschaftlich ist. Es wird also (m) durch

dargestellt. $$(x-3)^3 \cdot (x-2)^2 = 0$$

15. Um aus der allgemeinen Gleichung

$$(M) \ldots x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Nx + P = 0,$$

das zweite Glied wegzuschaffen, setze man $x = y + G$. Diesen Werth in (M) substituirt, wird

$$x^n = y^n + ny^{n-1}G + \frac{n.n-1}{2}y^{n-2}G^2 + \ldots$$

$$Ax^{n-1} = Ay^{n-1} + (n-1)Ay^{n-2}G + \frac{n-1.n-2}{2}Ay^{n-3}G^2 + \ldots$$

$$Bx^{n-2} = By^{n-2} + (n-2)By^{n-3}G + \frac{n-2.n-3}{2}By^{n-4}G^2 + \ldots$$

. . . . . .

Man hat daher statt (M) die Gleichung

$$y^n + (nG + A)y^{n-1} + \left(\frac{n.n-1}{2}G^2 + (n-1)AG + B\right)y^{n-2} + \ldots$$

Soll nun hieraus das zweite Glied wegfallen, so muß $nG + A = 0$, folglich $G = -\frac{1}{n}A$ seyn. Nun setzten wir $x = y + G$, demnach ist $x = y - \frac{1}{n}A$ und $y = x - G = x + \frac{1}{n}A$; — d. i. um aus jeder Gleichung das zweite Glied zu eliminiren, addire man zur Unbekannten x noch den soviel-sten Theil des Coefficienten des zweiten Gliedes, als der Grad der Gleichung ausdrückt, nämlich die Hälfte bei einer quadratischen, den dritten Theil bei einer kubischen Gleichung, u. s. w. und setze dann diese Summe, oder Differenz (wenn — A gilt), gleich einer andern unbekannten Größe.

Umgekehrt wird das zweite fehlende Glied in die Gleichung gebracht, wenn man zur Unbekannten x eine beliebige k addirt, oder davon subtrahirt, und die Summe oder Differenz $(x \pm k)$ gleich y setzt, so daß folglich $x = y \mp k$ ist.

16. Vermöge 11. ist das letzte Glied P oder U einer auf 0 gebrachten Gleichung das Produkt aus allen Wurzeln derselben. Um sich nun, wenn P oder U in einer großen Zahl gegeben ist, das Zerfällen derselben in ihre Faktoren und somit auch die Prüfung, welcher Faktor eine rationale Wurzel der Gleichung sey, zu erleichtern, kann man (ohne eine Tafel der einfachen Faktoren — vgl. allgem. Größenl. §. 44. Anm. — zur Hand zu nehmen) auf folgende Weise verfahren:

Es sey die numerische oder dafür die allgemeine kubische Gleichung

$$(S) \ldots x^3 - 124x - 240 = 0,$$

oder $(T) \ldots x^3 + px^2 + qx + r = 0,$

welche letztere die besondere Gleichung (S) unter der Bedingung ausdrückt, daß $p = 0$, $q = -124$ und $r = -240$ ist.

Es

Es sey ferner a eine Zahl, von der man mittelst eines leichten Versuches weiß, daß sie in (S) statt x gesetzt, das letzte Glied < 240, oder, in (T) substituirt, die Gleichung

$$(V) \ldots a^3 + pa^2 + qa + r = 0$$

hervorbringe. Substituirt man daher in diesem Falle $y + a$ statt x in (T), so erhält man die neue Gleichung

$$(Q) \ldots \left.\begin{array}{l} y^3 + 3a \\ \quad + p \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} y^2 + 3a^2 \\ \quad + 2pa \\ \quad + q \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} y + a^3 \\ \quad + pa^2 \\ \quad + qa \\ \quad + r \end{array}\right\} = 0,$$

deren letztes Glied immer $=$ (V) ist. Weil nun z. B. -3 statt x in (S) gesetzt, die Gleichung: $-27 + 372 - 240 = 150$ oder $-267 + 372 - 105 = 0$ gibt, deren letztes Glied < 240 ist; so setzt man $a = -3$; $x = y - 3$, und entwickelt aus (Q) die bestimmte Gleichung

$$(W) \ldots y^3 - 9y^2 - 97y + 105 = 0.$$

Die wenigen Faktoren von 105 sind, 1, 3, 5, 7, unter welchen $+1$, als Wurzel versucht, (W) zu Null macht, folglich eine wahre Wurzel von (W) ist. Daher denn $x = y + a = 1 - 3 = -2$ eine wahre Wurzel von (S). Auf gleiche Weise lässen die 2 andern Wurzeln von (W) die von (S) erkennen.

Diese, an und für sich allgemeine, Methode läßt sich auch leicht auf biquadratische Gleichungen anwenden. Es sey nun

$$(S) \ldots x^4 + 9x^2 - 20x - 320 = 0;$$
$$(T) \ldots x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0;$$

daher $(V) \ldots a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s = 0$,

und

$$(Q) \ldots \left.\begin{array}{l} y^4 + 4a \\ \quad + p \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} y^3 + 6a^2 \\ \quad + 3ap \\ \quad + q \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} y^2 + 4a^3 \\ \quad + 3a^2p \\ \quad + 2aq \\ \quad + r \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} y + (V) \end{array}\right\} = 0.$$

Weil nun -3, statt x in (S) gesetzt, die Zahl $-98 < -320$ gibt; so sey $a = -3$, und (T) mit (S) verglichen, ist $p = 0$; $q = 9$; $r = -20$ und $S = -320$. Diese Werthe in (Q) substituirt, ist

$$(W) \ldots y^4 - 12y^3 + 63y^2 - 182y - 98 = 0.$$

Setzt man aus den einfachen Faktoren des letzten Gliedes, nämlich 1, 2, 7, 7 den Faktor $7 = y$, so hat man, da (W) zu Null wird, auch eine Wurzel $x = y + a = 7 - 3 = +4$ unserer Gleichung (S).

17. Eine andere Methode, eine oder mehrere, und zwar rationale Wurzeln einer Gleichung zu entdecken, wollen wir an der dem Grade nach speziellen

$$(\varphi) \ldots x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

in welcher die Coefficienten ganze Zahlen sind, erörtern.

Substituirt man statt x die als wahre Wurzel von (φ) angenommene Zahl a, die ein Faktor von D ist, in (φ); so ist

$$D = -Ca - Ba^2 - Aa^3 - a^4$$

und $\frac{D}{a} = -C - Ba - Aa^2 - a^3 =$ einer ganzen Zahl, wie $\frac{D}{a}$.

Setzt man ferner die ganze Zahl $\frac{D}{a} + C = E$, so ist

$$\frac{E}{a} = -B - Aa - a^2 = \text{einer ganzen Zahl, wie } \frac{E}{a}.$$

Eben so $\frac{E}{a} + B = F$ gesetzt, ist $\frac{F}{a} = -A - a =$ einer ganzen Zahl. Endlich $\frac{F}{a} + A = G = -a$ durch a dividirt, ist

$$\frac{G}{a} = -1 \text{ und } \frac{G}{a} + 1 = 0.$$

Man kann nun auch umgekehrt schließen: a ist eine wahre rationale Wurzel von (φ), wenn die obigen Quotienten in den ersten Seiten der Gleichungen in einem gegebenen Falle ganze Zahlen, d. i. wenn die nachstehenden Gleichungen richtig sind:

1) $\frac{D}{a} + C = E$; 2) $\frac{E}{a} + B = F$; 3) $\frac{F}{a} + A = G$; 4) $\frac{G}{a} + 1 = 0$.

Hieraus geht die Regel klar hervor: Um zu prüfen, ob ein Faktor a des letzten Gliedes D einer gegebenen Gleichung eine wahre Wurzel derselben sey, dividire man 1) das letzte Glied durch a und addire zum Quotienten den Coefficienten von x; 2) eben diese Summe (= E) dividire man wieder durch a und addire zum Quotienten den Coefficienten von x^2, wodurch man den dritten Dividend hat; u. s. w.

Man kann übrigens ± 1 unter den einfachen Faktoren des letzten Gliedes unberücksichtigt lassen, weil leichte Substitutionen zeigen, ob $+$ oder -1 eine wahre Wurzel sey.

Beispiel 1. Man will prüfen, ob

$$(\psi)\ldots x^4-3x^3-7x^2+27x-18=0,$$

die vermöge 8. eine $-$ Wurzel und drei $+$ Wurzeln hat, den Faktor $+2$ unter den einfachen Faktoren von 18, nämlich: $\pm 2, 3, 6, 9$ zur wahren Wurzel habe. Nach der vorigen Regel ist 1) $\frac{-18}{2}=-9$ und $-9+27=+18$; 2) $\frac{+18}{2}=+9$ und $9-7=+2$; 3) $\frac{+2}{2}=+1$ und $1-3=-2$; 4) $\frac{-2}{2}=-1$ und $-1+1=0$; also $+2$ eine wahre Wurzel von (ψ).

Auch kann man diese Prüfung mit allen Faktoren des letzten Gliedes, dieses selbst mit dazu genommen, zugleich anstellen, wenn der Faktoren nicht zu viele sind.

Beispiel 2. Die Gleichung sey

$$x^3-7x^2+36=0.$$

Weil hier das dritte Glied fehlt, oder $\pm 0x$ verstanden wird; so ist der erste zu addirende Coefficient 0 und man erhält folgendes Schema, indem man die oben mit E, F, G bezeichneten Summen unter den entsprechenden Faktoren ansetzt:

$+36.18.12.9.6.4.3.2$	$-36.18.12.9.6.4.3.2$
$1.2.3.4.6.9.12.18$	$-1.-2.-3.-4.-6.-9.-12.-18$
$-.-.-.-.-6.-.-3.2$	$-.-.-.-.-6.-.-3.+2$
$-.-.-.-.-0.-.0.2$	$-.-.-.-.+2.-.+2.0$

Also sind die Faktoren $+6$; $+3$ und -2 die wahren Wurzeln unserer Gleichung, deren Darstellung ist: $(x+6)(x+3)(x+2)=0$.

18. Wenn eine Wurzel $\pm a$ fällt zwischen 2 Zahlen $\pm g$ und $\pm k$, so daß $\pm a<\pm g$, aber $\pm a>\pm k$ ist; so heißen die Zahlen g und k überhaupt die Grenzen der Wurzel a, und zwar g die größte, k die kleinste Wurzelgrenze. Aehnliches gilt hinsichtlich mehrerer oder aller Wurzeln einer Gleichung. Wenn z. B. -2, -10 und $+12$ die 3 Wurzeln einer

kubiſchen Gleichung ſind; ſo iſt (in Beziehung auf ganze Zahlen) — 1 die kleinſte — Grenze $= -k$, und — 11 die größte — Grenze $= -g$; aber + 13 die größte + Grenze $= +g$.

Es erhellt für ſich, daß die Prüfung, welcher der Faktoren des letzten Gliedes einer Gleichung eine reelle (rationale oder irrationale) Wurzel ſey, durch die Kenntniß dieſer Grenzen um ſo mehr erleichtert werde, je enger dieſe Grenzen ſind.

Bei kubiſchen Gleichungen entdeckt man die Wurzelgrenzen mittelſt leichter algebraiſcher Kunſtgriffe. Jede dieſer Gleichungen, in welcher das zweite Glied fehlt, oder nach 15. weggeſchafft iſt, hat eine der drei Hauptformen:

1) $x^3+mx-p=0$; 2) $x^3-mx-p=0$; 3) $x^3-mx+p=0$.

Aus 1) iſt $x^3+mx=p$, alſo x^3 für ſich $<p$ oder $x<\sqrt[3]{p}$, d. i. $\sqrt[3]{p}=g$ (größte Grenze). Weil nun $x<\sqrt[3]{p}$, daher auch $x^2<\sqrt[3]{p^2}$ und $x^3<x\sqrt[3]{p^2}$ iſt; ſo iſt nun $x\sqrt[3]{p^2}+mx>p$ oder $x(m+\sqrt[3]{p^2})>p$, oder $x>\frac{p}{m+\sqrt[3]{p^2}}$, d. i. $\frac{p}{m+\sqrt[3]{p^2}}=k$ (kleinſte Grenze). So iſt z. B. für die Gleichung

$$x^3+5x-42=0 \text{ (deren eine Wurzel } =+3 \text{ iſt)}$$

$g=\sqrt[3]{42}=3{,}476\ldots$ und $k=\frac{42}{5+12{,}08}=2{,}4\ldots$

Aus 2) iſt $g=x<\sqrt{(p+m)}$ und $k=x>\sqrt{m}$. Denn dividirt man nur die erſte Seite der Gleichung $x^3-mx=p$ durch x; ſo wird $x^2-m<p$, daher $x^2<p+m$ oder $x<\sqrt{(p+m)}$. Weil ferner x^3 für ſich $>mx$, ſo iſt auch $x>\sqrt{m}$. So ſind z. B. die Wurzelgrenzen hinſichtlich der Gleichung

$$x^3-31x-30=0$$

$x<\sqrt{61}<7{,}8\ldots$ und $x>\sqrt{31}>5{,}5\ldots$

Endlich für Gleichungen von der Form 3) iſt $g=x<\sqrt{m}$ und $k=x>\frac{p}{m}$. Denn weil $x^3+p=mx$, ſo iſt x^3 für ſich

$< mx$, d. i. $x < m$. Und weil $p - mx = -x^3$, so ist $mx > p$, d. i. $x > \frac{p}{m}$. So sind z. B. für

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

die Wurzelschranken $g = x < \sqrt{7} = 2{,}6\ldots$ und $k = x > \frac{6}{7} = 0{,}8\ldots$

Allein durch dergleichen allgemeine Ausdrücke lassen sich schon für biquadratische Gleichungen die Wurzelgrenzen nicht bestimmen. Man muß daher zur Anwendung anderer Methoden seine Zuflucht nehmen.

19. Fortsetzung. Diese allgemeineren Methoden bilden zugleich das Fundament der Auflösungen der wichtigen Aufgabe: eine irrationale, oder eine Wurzel überhaupt durch Näherung zu finden, so wie der Beantwortung der Frage über Zahl und Beschaffenheit der in einer Gleichung vorhandenen Wurzeln.

1. Methode. Vermöge 18. kennt man von

$$(L)\ldots\ x^3 - 30x - 60 = 0$$

die Wurzelgrenzen $x < \sqrt{90} < 9{,}48\ldots$ und $x > \sqrt{30} > 5{,}47\ldots$ Man setze daher $x = 5 + \beta$ und entwickle den Werth von β aus der neuen Gleichung, die man durch Substitution von $5 + \beta$ statt x in (L) erhält. Man hat nämlich

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 125 + 75\beta \\ -30x & = & -150 - 30\beta \\ -60 & = & -60 \\ \hline x^3 - 30x - 60 & = & -85 + 45\beta = 0, \end{array}$$

also $\beta = \frac{85}{45} = 1\frac{8}{9}$ und $x = 5 + 1\frac{8}{9} = 6\frac{8}{9} = \frac{62}{9}$. Allein dieser Werth statt x in (L) gesetzt macht 57 statt 0 finden. Daher ist $6\frac{8}{9}$ zu groß. Setzt man folglich $x = \frac{62}{9} - \beta$ und entwickelt β, wie vorhin; so findet man $\beta = 0{,}536\ldots$ und $x = \frac{62}{9} - 0{,}536\ldots$ $= 6{,}888 - 0{,}536 = 6{,}352\ldots$ u. s. w.

2. Methode, die zuweilen auch eine rationale Wurzel entdecken läßt. Es sey

$$(M) \ldots . \quad x^3 - 12x^2 - 109x + 720 = 0,$$

$x = m + \mu$ gesetzt, wird

$$x^3 = m^3 + 3m^2\mu + 3m\mu^2 + \mu^3$$
$$-12x^2 = -(12m^2 + 24m\mu + 12\mu^2)$$
$$+109x = -(109m + 109\mu).$$

Daher hat man statt (M):

$$(N) \ldots (m^3 - 12m^2 - 109m) + (3m^2 - 24m - 109)\mu + (3m - 12)\mu^2 + \mu^3 = +720.$$

Nun nehme man den Werth von m so, als sey nur $m^3 - 12m^2 - 109m = -720$; so ist, wenn man eben jene erste Größe von -720 abzieht, auch der Rest $D = (3m^2 - 24m - 109)\mu + (3m - 12)\mu^2 + \mu^3$. Diese letzte Größe, folglich auch μ ist $= 0$, wenn jener erste Rest $D = 0$ ist. Wenn man z. B. m so nimmt, daß $m^3 - 12m^2 - 109m$ die Zahl -720 nicht übersteigt, sondern ihr am nächsten kommt, daher $m = 5$ setzt; so wird $m^3 - 12m^2 - 109m = -720$, also $D = -720 + 720 = 0$, folglich auch $\mu = 0$ und $x = m + \mu = 5 =$ einer rationalen Wurzel unserer Gleichung (M).

Wird aber D nicht $= 0$, so sucht man zu der auf die genannte Weise genommenen Zahl m die zweite Wurzelziffer μ gerade so, wie man (nach allgem. Größenl. §. 68. 2.) die zweite Wurzelnote überhaupt findet. Der Kürze wegen sey

$$(P) \ldots . \quad x^3 - 2x = 5$$

die vorgegebene Gleichung. $x = m + \mu$ gesetzt, wird die neue Gleichung

$$(Q) \ldots (m^3 - 2m) + (3m^2 - 2)\mu + 3m\mu^2 + \mu^3 = 5,$$
$$(a^3 + 3a^2 . b + 3ab^2 + b^3)$$

in welcher die erste eingeschlossene Größe die Bedeutung der untergesetzten a^3, d. i. des Würfels der ersten Wurzelnote a (hier m), u. s. w. hat. Nimmt man nun wieder m so, daß dieses erste Glied $m^3 - 2m$ entweder $= 5$ oder dieser Zahl sehr nahe kommt, daher $m = 2$; so ist D oder $(3m^2 - 2)\mu + 3m\mu^2 + \mu^3 = 5 - (m^3 - 2m) = 1$ statt $= 0$. Um daher zu $m = 2$ noch eine Wurzelziffer μ zu finden, dividirt man jenen ersten Rest $D = 1$ durch $10 = 3m^2 - 2$ (welche Größe das dreifache

Quadrat der ersten Wurzelnote vorstellt). Der Quotient $\frac{1}{10}$ oder 0,1, wodurch man $x = 2{,}1$ erhielte, zeigt sich zu groß, indem jede ganze Zahl > 0, statt μ in jenem 3gliedrigen Reste $(3m^2 - 2)\mu + \text{&c.}$ substituirt, ein Resultat > 1 gibt. Daher ist $x = 2{,}0\ldots$ und μ kann nur dem 0,1 zunächst, z. B. $= 0{,}09$ genommen werden. Wirklich erhält man durch Substitution dieses Werthes in jener 3gliedrigen Größe nun ein Resultat < 1, nämlich 0,949529; daher hat man $x = 2{,}09$.

Will man nun noch mehrere Decimalen; so hat man, indem man diese Zahl 0,949... vom vorigen Reste $= 1$ abzieht, den neuen Rest 0,050671. Diesen wieder durch $3m^2 - 2 = 11{,}1043$ (indem nun $m = 2{,}09$ ist) dividirt, hat man den Quotienten $\mu = 0{,}004$, daher $x = 2{,}094$. Die Bestandtheile $(3m^2 - 2)\mu + 3m\mu^2 + \mu^3$ wieder nachgebildet, die gefundene Summe $=$ 0,044517... vom vorigen Reste $= 0{,}050671$ abgezogen und den neuen Rest $= 0{,}00615$ durch $3m^2 - 2 = 11{,}154503$ dividirt, findet man $\mu = 0{,}0005$, folglich $x = m + \mu = 2{,}0945\ldots$, als Wurzel durch Näherung.

3. Methode. Grundsatz. Wenn zwei Zahlen, die nach und nach in einer Gleichung statt x substituirt werden, Resultate mit entgegengesetzten Zeichen geben; so kann man schließen, daß zwischen jenen zwei Zahlen wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.

So gibt z. B. in

$x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0$, oder $+(x^3 + 7x) - (13x^2 + 1) = 0$,

die Substitution von $+1$ das Resultat -6 und die Substitution von $+21$ das Resultat $+3673$; die Summe dieser entgegengesetzten Resultate ist 3667. Es ist sohin im ersten Falle der $+$Theil $x^3 + 7x$ gegen den $-$Theil der Gleichnng zu klein, oder $x > 2$, aber im zweiten Falle ist jener Theil gegen diesen zu groß, oder $x < 21$. Werden $+2$ und $+20$ statt x substituirt; so wird nun die Summe der entgegengesetzten Resultate (-51 und $+2939$) kleiner, als die vorige, d. i. der $+$Theil der Gleichung, welcher auch jetzt wieder für $x = 2$ kleiner, und für $x = 20$ größer als der $-$Theil ist, hat sich doch nun dem letzteren mehr, als vorhin, genähert, nach-

dem auch engere Grenzen gewählt wurden. Denkt man sich diese Grenzen immer enger und enger genommen; so wird auch die Summe der entgegengesetzten Resultate, oder die Differenz des + und — Theiles der Gleichung immer kleiner, d. i. es wird zwischen je 2 Grenzen, die jene entgegengesetzten Resultate hervorbringen, wenigstens eine Zahl liegen müssen, welche die genannte Differenz verschwinden, oder die Gleichung zu Null macht, folglich dieser als reelle Wurzel genugthut.

Anwendung. Um eben diese Zahl zwischen den aufgefundenen Grenzen oder Zahlen, welche jene entgegengesetzten Resultate hervorbringen, entweder vollständig oder genähert, d. i. als reelle rationale, oder irrationale Wurzel zu suchen, nimmt man z. B. das arithmetische Mittel a als ersten genäherten Werth von x. Zu diesem eine kleine Größe w addirt und $a+w$, als zweiten genäherten Werth, in der vorgegebenen Gleichung substituirt, erhält man, die höheren Potenzen von w weglassend, eine Gleichung von der Form $A+Bw=0$, aus welcher man w bestimmt. Vermehrt man dieses wieder um w', und bestimmt dieses w', wie vorhin; so bekommt man einen dritten genäherten Werth von x. U. s. w.

Beispiel. Der Kürze wegen sey die vorgegebene Gleichung

$$(R)\ldots x^3-8x+8=0.$$

Substituirt man +1 und +1,5 statt x; so werden die Resultate +1 und −0,625; es liegt also zwischen 1 und 1,5 eine Wurzel von (R). Setzt man diese genähert $=1,2=a$ und substituirt $1,2+w$ statt x in (R); so hat man, sich nur auf die ersten Potenzen von w beschränkend, für x^3 nur $(1,2)^3+3.(1,2)^2.w$, dann für $-8x$ die Größe $-8(1,2+w)$ zu berechnen und 8 zu addiren. Die Reduktion gibt

$0,128-3,68w=0$; also $w=0,035$ und der zweite genäherte Werth von $x=1,2+0,035=1,235$.

Man setze ferner $x=1,235+w'$, so findet man auf die vorige Weise

$0,00365-3,42431w'$; also $w=0,001066$ und die dritte genäherte Wurzel oder $x=1,255+0,001066=1,236066$. In der That sind die 3 Wurzeln von (R) $x=-1+\sqrt{5}=1,236068\ldots$; $x=-1-\sqrt{5}$ und $x=2$.

4. Methode. Grundsatz. In jeder Gleichung

$$y = x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots Tx + U = 0$$

gibt es immer einen Werth von x, der das erste Glied $x^m >$ als die Summe der übrigen Glieder macht.

Denn man setze, unter den Coefficienten P, Q ... T, U sey S der größte; noch mehr, jeder der übrigen Coefficienten sey gleich diesem größten; so ist in diesem ungünstigsten Falle die Differenz

$$D = x^m - S(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1);$$

oder $D = x^m - \frac{S(x^m - 1)}{x - 1}$ (allg. Größenl. §. 132. Zus. 1.)

oder $D = x^m - \frac{Sx^m}{x-1} + \frac{S}{x-1}$.

Man hat also + D, wenn man $x^m = \frac{Sx^m}{x-1}$, d. i. wenn man macht, daß $\frac{Sx^m}{x-1}$ in x^m übergeht, welches geschieht, wenn man $x = +(S+1)$ setzt. Dagegen hat man — D für $x = -(S+1)$. Setzt man also statt x den um 1 vermehrten größten Coefficienten der Gleichung; so hat man die Zahl, welche statt x in x^m gesetzt, dieses erste Glied größer, als die Summe der übrigen Glieder gibt.

Zusatz. Hieraus folgt: 1) jede Gleichung $y = 0$, deren höchster Exponent m eine ungerade Zahl ist, hat wenigstens eine mögliche Wurzel (vergl. oben 2.); 2) diese mögliche Wurzel ist +, wenn das letzte Glied U das Zeichen — hat, und umgekehrt. Denn für + U erhält man auch + y, wenn $x = 0$ gesetzt wird. Setzt man dann $x = -(S+1)$, so hat man, wie — D, so auch — y. Es fällt also eine Wurzel zwischen 0 und $-(S+1)$. Gilt hingegen — U, so hat man auch — y für $x = 0$, aber für $x = +(S+1)$ hat man + y, folglich fällt eine Wurzel zwischen 0 und $+(S+1)$. 3) Wenn m eine gerade Zahl ist, so wird, wenn — U gilt, und man für x nach und nach setzt $+(S+1)$; 0; $-(S+1)$ der Werth von y resp. mit +, mit — und mit + erhalten. Eine solche Glei-

chung hat daher wenigstens 2 mögliche Wurzeln, deren eine zwischen $+(S+1)$ und 0, und die andere zwischen 0 und $-(S+1)$ liegt.

Anwendung. Will man bloß den + Theil einer Gleichung größer, als den — Theil (wie oben $(x^3+7x) > -(13x^2+1)$) haben; so genügt, daß man, statt $x = S+1$ zu nehmen, $x = S'+1$ setzt, wo S' den größten — Coefficienten der Gleichung, (im vorigen Beisp. — 13) bezeichnet. Die + Wurzeln fallen dann zwischen 0 und $S'+1$, oder $S'+1$ (im Beisp. $= 14$) ist die Grenze der + Wurzeln.

Um auch die Grenze der — Wurzeln zu finden, transformirt man die in x vorgegebene Gleichung in eine andere mit y, indem man $-y$ statt x in der ersten substituirt (wobei, wenn m ungerade ist, $-y^m$ nach 12. unter 1) in $+y^m$ umgeändert wird). In dieser durch Umwandlung erhaltenen Gleichung stellen die + Werthe von y gleiche — Werthe von x der ersten Gleichung, und umgekehrt, vor. Ist daher R der größte — Coefficient der neuen Gleichung, folglich $R+1$ die Grenze ihrer + Wurzeln; so ist $-(R+1)$ die Grenze der — Wurzeln der vorgegebenen Gleichung, d. i. die Grenze der — Werthe von x.

Beispiel. In der Gleichung

$$(\alpha) \ldots x^4 - 4x^3 - 5x + 27 = 0$$

ist wegen des größten — Coefficienten $4+1$ oder 5 die Grenze der + Wurzeln, d. i. die möglichst größte + Wurzel von (α), liegend zwischen 0 und 5, ist < 5.

In (α) $-y$ statt x gesetzt, hat man

$$(\beta) \ldots y^4 + 4y^3 + 3y + 27 = 0.$$

Da diese Gleichung vermöge 8. lauter — Wurzeln hat; so hat (α) lauter + Wurzeln, deren Grenzen die genannten Zahlen 0 und 5 sind. Zur Bestimmung engerer Grenzen nach und nach $x = 1, = 2, = 3, = 4$ in (α) substituirt, erhält man resp. die Resultate $+21; +5; -9; +15$; also liegt nach der 3. Methode eine Wurzel zwischen 2 und 3 und eine andere zwischen 3 und 4, die man nun nach eben jener Methode durch Näherung finden kann.

Vergl. unten §. 75. und §. 87.

Besondere Methoden, höhere Gleichungen aufzulösen.

a. Auflösung kubischer Gleichungen.

§. 57. 1) **Cardan's Regel.** Es sey die allgemeine Gleichung

$$(S) \ldots x^3 + ax + b = 0.$$

Durch Substitution von $y+z$ statt x hat man

$$(T) \ldots y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + ay + az + b = 0.$$

Setzt man ferner in (T)

$$(Q) \ldots y^3 + z^3 + b = 0,$$

und dividirt den Rest durch $y+z$; so wird

$$3yz + a = 0, \text{ daher } y = -\frac{a}{3z}.$$

Diesen Werth in (Q) substituirt und gehörig geordnet, hat man

$$(U) \ldots z^6 + bz^3 - \frac{a^3}{27} = 0,$$

und hieraus (nach allgem. Größenl. §. 83. Zus. 2.)

$$z = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{27}a^3)}]};$$

folglich aus (Q) $y^3 = -z^3 - b = -\frac{1}{2}b \mp \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3)}$, und

$y = \sqrt[3]{[-\frac{1}{2}b \mp \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3)}]}$. Also $y+z$ oder

$$x = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{27}a^3)}]} + \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}b - \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{27}a^3)}]}$$

$$= \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}b\sqrt{\left(1 + \frac{4a^3}{27b^2}\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\left(1 + \frac{4a^3}{27b^2}\right)}\right]}.$$

2) Um sich die Berechnung dieses Werthes von x zu erleichtern, bedient man sich mit größtem Vortheile der Einführung der Hülfswinkel oder der goniometrischen Formeln. Setzt man nämlich

$$\sqrt{\left(1 + \frac{4a^3}{27b^2}\right)} = \sqrt{(1 + \operatorname{tang}\alpha^2)} = \frac{1}{\cos\alpha} \text{ (nr. 15.), oder } \frac{4a^3}{27b^2} = \operatorname{tang}\alpha^2,$$

so hat man

1. $x = \sqrt[3]{\left[-\frac{1}{2}b\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}\right)\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{1}{2}b\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\right]}$, und

2. $\tang\alpha = \frac{a}{3b}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$. Der Kürze wegen sey

$2\sqrt{\frac{1}{3}a} = m$, daher $a = \frac{3}{4}m^2$ und $\tang\alpha = \frac{m^3}{4b}$, also $\frac{1}{2}b = \frac{m^3}{8\tang\alpha}$, so hat man durch Substitution in 1.

$$x = \sqrt[3]{\left[-\frac{m^3}{8\tang\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha-1}{\cos\alpha}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{m^3}{8\tang\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right]}$$

$$= \frac{1}{2}m\sqrt[3]{\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}-\sqrt[3]{\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}}\text{)}$$ (§. 11. nr. 18.)

$$= \frac{1}{2}m\sqrt[3]{(\tang\tfrac{1}{2}\alpha} - \sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\alpha})$$ (§. 22. Zus. nr. 176. 177.)

$$= \frac{-m(\sqrt[3]{\cot\frac{1}{2}\alpha}-\sqrt[3]{\tang\frac{1}{2}\alpha})}{2}.$$

Nun ist nach nr. 171. $\cot 2\alpha' = \frac{\cot\alpha'-\tang\alpha'}{2}$; setzt man daher

3. $\tang\alpha' = \sqrt[3]{\tang\frac{1}{2}\alpha}$;

so wird $\cot 2\alpha' = \frac{\sqrt[3]{\cot\frac{1}{2}\alpha}-\sqrt[3]{\tang\frac{1}{2}\alpha}}{2}$, folglich

4. $-x = m\,.\cot 2\alpha' = \cot 2\alpha'\,.\,2\sqrt{\frac{1}{3}a}$.

Beispiel. Es sey $a = 8$; $b = 264$; so ist nach 2.

$\tang\alpha = \frac{1}{99}\cdot\sqrt{\frac{32}{3}} = \sqrt{\frac{32}{29403}}$, oder $\log\tang\alpha$

$= \frac{C.\log 29403+\log 32}{2} = 8{,}5183792+5 = 8{,}5183792$; also

$\alpha = 1^0\,53'\,22'',16\ldots$ und $\frac{1}{2}\alpha = 56'\,41'',08$. Daher nach 3.

$\log\tang\alpha' = \log\sqrt[3]{\tang\frac{1}{2}\alpha} = \frac{8{,}2172309}{3} = 9{,}4057436$;

also $\alpha' = 14^0\,16'\,49'',47$ und $2\alpha' = 28^0\,33'\,38'',94$. Daher nach 4.

$\log x = \log\cot 2\alpha'+\log\sqrt{\frac{32}{3}} = 10{,}2641371+0{,}5140143 = 0{,}7781514$.

Da diesem Logar. die Zahl 6 entspricht; so ist $-x = 6$ oder $x = -6$, d. i. -6 eine Wurzel der Gleichung (S). Diese daher durch $x+6 = 0$ dividirt, findet man aus dem Quo-

tienten $x^2-6x+44=0$ die zwei andern imaginären Wurzeln $x=3\pm\sqrt{35}\sqrt{-1}$; (S) wird sohin dargestellt durch

$$(x-3-\sqrt{35}\sqrt{-1})(x-3+\sqrt{35}\sqrt{-1})(x+6)=0.$$

Zusatz 1. Ist $(S)=x^3+ax-b=0$; so erhält man bei der Entwicklung $+\frac{1}{2}b$ statt $-\frac{1}{2}b$, daher nun $x=+\cot 2\alpha\cdot 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$.

Ist ferner $(S)=x^3-ax+b=0$, so gibt die Entwicklung

$$(\alpha)\ldots\ x=\sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}b+\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2-\tfrac{1}{27}a^3)}]}+\sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}b-\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2-\tfrac{1}{27}a^3)}]}$$

$$(\beta)\ldots\ =\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}b\sqrt{\left(1-\frac{4a^3}{27b^2}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}b\sqrt{\left(1-\frac{4a^3}{27b^2}\right)}\right]}.$$

Der Berechnung wegen setze man wieder

$\sqrt{\left(1-\frac{4a^3}{27b^2}\right)}=\sqrt{(1-\sin\varphi^2)}=\cos\varphi$ (§. 10. nr. 11.), oder $\frac{4a^3}{27b^2}=\sin\varphi^2$; so hat man

1. $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b(1-\cos\varphi)}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b(1+\cos\varphi)}$;

2. $\sin\varphi=\frac{a}{3b}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$. Eben so sey wieder $2\sqrt{\frac{1}{3}a}=m$; daher $a=\frac{3}{4}m^2$; $\sin\varphi=\frac{m^3}{4b}$; $\frac{1}{2}b=\frac{m^3}{8\sin\varphi}$; so wird durch Substitution in 1.

$$x=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{8}m^3\cdot\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{8}m^3\cdot\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}}$$

$$=-\frac{m\cdot\sqrt[3]{\tan\tfrac{1}{2}\varphi}+\sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\varphi}}{2}\ \text{(wie oben)}.$$

Nun ist (nach §. 22. Zus. nr. 180.) $\frac{1}{\sin 2\varphi'}=\frac{\tan\varphi'+\cot\varphi'}{2}$; daher

3. $\tan\varphi'=\sqrt[3]{\tan\tfrac{1}{2}\varphi}$ gesetzt, wird

4. $-x=\frac{m}{\sin 2\varphi'}=\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}a}}{\sin 2\varphi'}$.

In dem Falle, daß das letzte Glied auch $-b$ ist, hat man

$$x=\frac{m}{\sin 2\varphi}.$$

Wenn übrigens in einer vorgegebenen Gleichung das zweite Glied vorhanden ist; so muß man es, um Cardan's Regel anwenden zu können, nach §. 56. 15. wegschaffen.

Zusatz 2. Der irreductible Fall.

Wenn in (β) des vorigen Zusatzes $\frac{4a^3}{27b^2} > 1$ ist; so kann man diese Zahl nicht $= \sin\varphi^2$ setzen, indem kein Sinus (für den Halbmesser $= 1$) > 1 oder $>$ sin. tot. ist; mit andern Worten: wenn $4a^3 > 27b^2$ oder nach (α) $\frac{1}{27}a^3 > \frac{1}{4}b^2$ ist; so erscheint der Ausdruck $\sqrt{\left(1 - \frac{4a^3}{27b^2}\right)}$ oder $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3)}$ als unmöglich oder imaginär. Weil nun die kubische Gleichung, in welcher bei fehlendem zweiten Gliede das dritte das Zeichen — hat, vermöge 10. des §. 56. drei mögliche Wurzeln haben muß; so entsteht eine Schwierigkeit für die Anwendung der Cardan'schen Regel auf diesen Fall, welchen die Analysten casum irreducibilem darum nannten, weil sie ihn nicht, wie die übrigen Fälle, durch bloße Substitution in Cardan's analytischer Formel, sondern mittelst unendlicher Reihen aufzulösen vermochten. Eine solche unendliche Reihe entspringt, wenn man $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})}$ oder $(A+B\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ sowohl, als $(A-B\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ nach der Binomialformel (mit Berücksichtigung des Zus. 1. §. 59. der allgem. Größenl.) entwickelt und dann beide Reihen addirt; wobei denn die noch mit dem Faktor $\sqrt{-1}$ behafteten Glieder wegen ihrer entgegengesetzten Zeichen wegfallen, die resultirende Reihe daher lauter mögliche Größen enthält. Die möglichen Werthe von x oder die möglichen Wurzeln der kubischen Gleichung, wie $x^3 - ax + b = 0$, sind also im irreducibeln Falle durch die Form des Imaginären im Ausdrucke lediglich verschleiert.

Schneller jedoch, als das Mittel unendlicher Reihen, führt die trigonometrische Auflösung in eben diesem Falle zum Ziele, wie Folgendes zeigt:

Macht man die Gleichung $\sin 3a = 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3$ (§. 22. nr. 162.) gleichartig, indem man mit Hülfe des Halbmessers

= r jedem Gliede eine gleiche Anzahl von Faktoren gibt; so hat man

$$r^2 . \sin 3a = 3r^2 \sin a - 4\sin a^3$$

oder (P) ... $\sin a^3 - \frac{3}{4}r^2 \sin a + \frac{1}{4}r^2 \sin a = 0$,

(P) mit $x^3 - ax + b = 0$.

verglichen, werden beide Gleichungen identisch, wenn man 1) $x = \sin a$; 2) $a = \frac{3}{4}r^2$; 3) $b = \frac{1}{4}r^2 \sin a$ setzt. Aus 2) ist daher der Halbmesser der Gleichung $r = 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$, folglich, da hieraus $\frac{1}{4}a = \frac{1}{4}r^2$, durch Substitution in 3) auch $b = \frac{1}{4}a \sin 3a$.

Eben hieraus ist zwar $\sin 3a = \frac{3b}{a}$; allein, um a zu finden, muß man sich erinnern, daß nach §. 4. Zus. 2, $\frac{\sin a}{r} = \frac{\sin a}{r}$ ist, daß man folglich, um $\sin 3a$ mittelst der Tafeln zu finden, diesen Sinus durch den Halbmesser r unserer Gleichung dividiren müsse; weßwegen man hat

$$(Q) \ldots \sin 3a = \frac{3b}{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}a}} = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Hiedurch findet man denn $\sin 3a$, daher auch a, folglich auch $x = \sin a$ (nach 1)). Es wird aber $\sin a$ aus der für den Halbmesser = 1 berechneten Tafel genommen, es muß daher dieser, um dem auf den Halbmesser r unserer Gleichung bezogenen Sinus gleich zu seyn, vermöge des vorigen Zitats mit r multiplizirt werden; d. i. man hat

$$(S) \ldots x = \text{sin. nat. } a \cdot 2\sqrt{\tfrac{1}{3}a}.$$

Um nebst diesem aus (S) zu findenden Werthe von x noch einen zweiten zu finden, setze man statt $3a$ den Werth $360 + 3a$, so daß $a = 120^0 + a$ wird. Weil nun (nach §. 18. nr. 65.)

$\sin(360^0 + 3a) = \sin 360^0 . \cos 3a + \cos 360^0 . \sin 3a$, aber $\sin 360^0 = 0$; $\cos 360^0 = +1$ ist; so hat man $\sin(360^0 + 3a) = \sin 3a$; d. i. die vorige Gleichung (Q) gilt auch für diesen Fall. Allein weil $60 - a$ das Supplement von $120^0 + a$, folglich $\sin(120^0 + a) = \sin(60^0 - a)$ ist; so erhält man statt (S)

$$(T) \ldots x = \text{sin. nat. } (60^0 - a) . 2\sqrt{\tfrac{1}{3}a},$$

aus welcher Gleichung ein zweiter Werth von x gefunden wird.

Will man einen dritten Werth von x suchen, so setze man statt 3α in (P) den Werth 720° + 3α, wodurch man statt α erhält 240° + α. Aber sin(720° + 3α) ist, wie vorhin, = sin 3α, folglich bleibt auch (Q) für diesen Fall. Aber sin(240° + α) = sin(180° + (60 + α)) = sin(2R + y) = — sin y (§. 5. Zus. 2.) = — sin(60° + α); daher statt (S)

$$(Z) \ldots x = -\text{sin. nat.}(60^\circ + \alpha) \cdot 2\sqrt{\tfrac{1}{3}a}.$$

Würde man die Peripherie verdreifachen, vervierfachen, ... so würde man entdecken, daß keine von den Gleichungen (S), (T), (Z), durch die unsere identische Gleichung (P) aufgelöst wird, abweichenden Gleichungen weiter zu finden seyen; was denn zur Bestätigung der Theorie über die Zahl der Wurzeln einer kubischen Gleichung dient.

Beispiel. Die vorgegebene Gleichung sey

$$x^3 - \frac{403}{441}x + \frac{46}{147} = 0.$$

Weil hier $4a^3 = 4\left(\frac{403}{441}\right)^3$, deren Logar. = 0,485... und $27b^2 = 27\left(\frac{46}{147}\right)^2$, deren Logar. = 0,422..., folglich $4a^3 > 27b^2$ ist; so hat man den irreducibeln Fall; daher nach (Q)

$$\sin 3\alpha = 3 \cdot \frac{46}{147} \cdot \frac{441}{403} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{403}{3 \cdot 441}}} = \frac{414}{403} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1612}{1323}}},$$

und die logarithmische Rechnung steht so:

log 1612	= 3,2073650
C. log 1323	= 6,8784402
	0,0858052
: 2	0,0429026 = log. const.
C. log. const.	= 9,9570974
log 414	= 2,6170005
C. log 403	= 7,3946950
log sin 3α	= 9,9687927

also 3α = 68° 32′ 18″,59 und α = 22° 50′ 46″,19;
60° — α = 37° 09′ 13″,81 und 60° + α = 82° 50′ 46″,19.

Daher

Daher 1) $x = \text{sin. nat. } \alpha \cdot \sqrt{\frac{1612}{1323}}$, oder

$$\begin{aligned} \log \sin \alpha &= 9,5891206 - 10 \\ \log. \text{ const.} &= \underline{0,0429026} \\ \log x &= \overline{9,6320232} - 10, \end{aligned}$$

also $x = 0,4285714 = \frac{4285714}{10^7} = \frac{1}{2,33\ldots} = \frac{3}{7}$ sehr nahe.

2) $x = -\text{sin. nat. } (60^0 - \alpha) \cdot \sqrt{\frac{1612}{1323}}$, oder

$$\begin{aligned} \log \sin (60^0 - \alpha) &= 9,7810061 - 10 \\ \log. \text{ const.} &= \underline{0,0429026} \\ \log x &= \overline{9,8239087} - 10, \end{aligned}$$

also $x = 0,6666\ldots = \frac{2}{3}$.

3) $x = \text{sin. nat. } (60^0 + \alpha) \cdot \sqrt{\frac{1612}{1323}}$, oder

$$\begin{aligned} \log \sin (60^0 + \alpha) &= 9,9966060 - 10 \\ \log. \text{ const.} &= \underline{0,0429026} \\ \log x &= \overline{10,0395086} - 10, \end{aligned}$$

also $x = -1,0952380$.

Da in der vorgegebenen Gleichung das zweite Glied $= 0x^2$ ist; so muß vermöge 11. des §. 56. die Summe der 3 Wurzeln $= 0$, oder der letzte — Werth von x gleich der Summe der gefundenen zwei + Werthe seyn, wie es sich zur Verifikation unserer Rechnung wirklich zeigt. Man kann daher das letzte x auch durch den vulgären Bruch $-\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{3}\right) = -\frac{23}{21}$ ausdrücken.

Anmerkung. Ist $x^3 - ax - b = 0$ zu resolviren; so wird, weil nun sin 3α das Zeichen — bekommt, und sin $3\alpha = -\sin(180^0 + 3\alpha)$ ist, die entsprechende Gleichung erhalten

$$(P) \ldots \sin \alpha^3 - \tfrac{3}{4}r^2 \sin \alpha - \tfrac{1}{4}r^2 \sin 3\alpha = 0.$$

Man muß folglich auch $60 + \alpha$ statt α setzen und das Zeichen der zweiten Seite der vorigen Formeln in das entgegengesetzte ändern. Man erhält denn statt (S) $x = +\sin(60^0 + \alpha) \cdot 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$; statt (T) $x = -\sin\alpha \cdot 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$; statt (Z) endlich die Formel $x = -(\sin 60^0 - \alpha) \cdot 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$.

b. Auflösung biquadratischer Gleichungen.

§. 58. 1. Lodovico Ferrari's oder Bombelli's Methode, wesentlich darin bestehend, eine kubische Hülfsgleichung zu suchen, durch deren Auflösung auch die der vorgegebenen biquadratischen Gleichung gefunden wird.

Es sey die allgemeine, vollständige Gleichung

$$(\alpha)\ldots\ x^4+mx^3+nx^2+px+q=0,$$

in welcher m, n, ... + oder − Zahlen bedeuten können. Man setze, (α) sey mit

$$(x^2+\tfrac{1}{2}mx+A)^2-(Bx+C)^2=0,$$

oder, entwickelt, mit

$$x^4+mx^3+\tfrac{1}{4}m^2\left.\begin{matrix}\\+2A\\-B^2\end{matrix}\right\}x^2+mA\left.\begin{matrix}\\-2BC\end{matrix}\right\}x+A^2\left.\begin{matrix}\\-C^2\end{matrix}\right\}=0,$$

d. i. mit

$$(\beta)\ldots\ x^4+mx^3+(\tfrac{1}{4}m^2+2A-B^2)x^2+(mA-2BC)x+A^2-C^2=0$$

identisch; so ist

1) $n=\tfrac{1}{4}m^2+2A-B^2$; 2) $p=mA-2BC$; 3) $q=A^2-C^2$.

Aus 1) ist 4) $B^2=\tfrac{1}{4}m^2+2A-n$, oder $4B^2=m^2+8A-4n$; daher mit $C^2=A^2-q$ (aus 3)) multiplizirt, hat man

$$4B^2C^2=8A^3+(m^2-4n)A^2-8Aq-q(m^2-4n).$$

Aber $4B^2C^2=(mA-p)^2$ aus 2); daher diesen entwickelten Werth substituirt und die Gleichung auf Null gebracht, hat man

$$(\gamma)\ldots\ 8A^3-4nA^2+(2mp-8q)A-m^2q+4nq-p^2=0,$$

welche Gleichung die gesuchte kubische Hülfsgleichung mit einer einzigen Unbekannten A ist. Kennt man die 3 Werthe von A, so hat man auch die von B und C, indem

$$B=\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2+2A-n)}\text{ aus 4)}$$

$$\text{und } C=\frac{mA-p}{2B}\text{ aus 2) ist.}$$

Man findet denn auch aus

$$x^2+\tfrac{1}{2}mx+A=\pm\sqrt{(Bx+C)^2}=\pm(Bx+C)$$

oder aus $x^2+(\tfrac{1}{2}m-B)x=-A+C$

und $x^2+(\tfrac{1}{2}m+B)x=-A-C$,

deren jede zwei Wurzeln gibt, die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung (α).

Beispiel. Es sey aufzulösen

$$(\alpha) \ldots x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 40 = 0.$$

Hier ist $4 = m$; $2 = n$; $4 = p$; $40 = q$. Daher geht nun (γ), indem man zugleich durch 8 dividirt, in

$$(\beta) \ldots A^3 - A^2 - 36A - 42 = 0$$

über, welche Gleichung (vermöge §. 56. 19. 4. Methode Zus.) wenigstens eine mögliche + Wurzel hat. Diese Wurzel wird entweder nach §. 57., oder, da das letzte Glied nur aus den wenigen einfachen Faktoren 1, 2, 3, 7 besteht, auf leichte Weise $= +7$ gefunden. Demnach $A = 7$ gesetzt, hat man weiter

$B = \sqrt{(4 + 14 - 2)} = \sqrt{16} = 4$ und $C = \frac{28-4}{8} = 3$; also

1) $x^2 - 2x = -4$ und 2) $x^2 + 6x = -10$. Woraus denn die 4 Wurzeln von (α), nämlich

$x = \quad 1 + \sqrt{-3}$ und $x = \quad 1 - \sqrt{-3}$ aus 1)
$x = -3 + \sqrt{-1}$ und $x = -3 - \sqrt{-1}$

sämmtlich imaginär gefunden werden.

§. 59. 2. Descartes's Methode.

Es sey die Gleichung mit fehlendem oder weggeschafftem zweiten Gliede

$$(F) \ldots x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Die erste Seite von $(F) = (x^2 + mn + n)(x^2 - mx + r)$ gesetzt, hat man statt (F)

$$(G) \ldots x^4 + (n + r - m^2)x^2 + m(r + n)x + nr = 0.$$

Sollen beide Gleichungen identisch seyn, so muß

$A = n + r - m^2$; $B = m(r + n)$; $C = nr$; daher auch

$$n + r = A + m^2 \text{ und } r - n = \frac{B}{m} \text{ seyn.}$$

Durch Addition und Subtraction dieser zwei letzten Gleichungen hat man

$$(H) \ldots 2r = A + m^2 + \frac{B}{m} \text{ und } 2n = A + m^2 - \frac{B}{m}.$$

Diese 2 Gleichungen mit einander multiplizirt und statt $4rn$ den Werth $4C$ substituirt, entwickelt man

$$(I) \ldots \; m^6 + 2Am^4 + (A^2 - 4C)m^2 - B^2 = 0,$$

welche Gleichung durch Substitution von $y = m^2$ auf die kubische

$$(K) \ldots \; y^3 + 2Ay^2 + (A^2 - 4C)y - B^2 = 0$$

zurückgeführt wird. Die Auflösung von (K) gibt den Werth von m, durch dessen Substitution in (H) auch die Werthe von n und r in den bekannten Größen von (F), folglich nun auch mittelst der vorausgesetzten Gleichungen

$$x^2 + mx + n = 0 \text{ und } x^2 - mx + r = 0$$

die 4 Werthe von x unserer Gleichung (F) gefunden werden; nämlich (unter Vergl. mit (H)):

$$x = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - n)} = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}m^2 + \frac{B}{2m}\right)}, \text{ und}$$

$$x = +\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - r)} = +\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}m^2 - \frac{B}{2m}\right)}.$$

Will man die Rechnung wieder, wie oben im §. 57. mittelst Einführung von Hülfswinkeln vollenden; so schafft man aus (K) das zweite Glied weg, indem man $y = z - \frac{2}{3}A$ setzt. Man bekommt

$$(L) \ldots \; z^3 - (\tfrac{1}{3}A^2 + 4C)z + (\tfrac{2}{3}AC - \tfrac{2}{27}A^3 - B^2) = 0.$$

(L) ist mit (S) d. i. mit $x^3 - ax + b = 0$ (§. 57. Zus. 1.) identisch, wenn man setzt

$$a = \tfrac{1}{3}A^2 + 4C \text{ und } b = \tfrac{2}{3}AC - \tfrac{2}{27}A^3 - B^2.$$

Diese Werthe in dem Ausdrucke (β) in jenem Zus. gehörig substituirt, entwickelt man

$$z = \sqrt[3]{\left[-\tfrac{2}{3}AC + \tfrac{2}{27}A^3 + \frac{B^2}{2} + \left(\tfrac{2}{3}AC - \tfrac{2}{27}A^3 - \frac{B^2}{2}\right)\times \sqrt{\left(1 - \frac{4(\frac{1}{3}A + 4C)^3}{27(\frac{2}{3}AC - \frac{2}{27}A^3 - B^2)^2}\right)}\right]} + \sqrt[3]{[\text{etc.}}$$

Ferner findet man I. durch Substitution im dortigen 2. nun für unsern Fall

$$1) \; \sin\varphi = \frac{\frac{1}{3}A^2 + 4C}{8AC - \frac{2}{3}A^3 - 5B^2} \cdot 2\sqrt{(\tfrac{1}{3}A^2 + \tfrac{1}{3}C)}$$

$$= \frac{A^2 + 12C}{24AC - \frac{2}{3}A^3 - 9B^2} \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}.$$

2) $\text{tang}\,\varphi' = \sqrt[3]{\text{tang}\,\frac{1}{3}\varphi}$ (wie oben unter 3.).

3) $z = -\frac{\frac{3}{4}\sqrt{(AC+12C)}}{\sin 2\varphi'}$ (wie oben unter 4.).

Diese Werthe gelten denn wieder, wie im citirten Zuſ. 1., wenn im Werthe von z $4(\frac{1}{3}AC+4C)^3 < 27(\frac{1}{3}AC-\frac{2}{27}A^3-B^2)^2$ iſt.

Iſt aber II. die erſte Größe $>$ oder $=$ der zweiten Größe, oder, was daſſelbe iſt, wenn unter 1) $\sin\varphi$ oder deſſen Werth >1 iſt; ſo hat man den irreduciblen Fall des Zuſ. 2. §. 57. Demnach wird in (Q) dieſes cit. Zuſatzes

$\sin 3\alpha = \frac{1}{\sin\varphi}$; ferner ſtatt (S) nun $z = \pm\sin\alpha \cdot \frac{2}{3}\sqrt{(A^2+12C)}$;

ſtatt (T) $z = \pm\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(A^2+12C)}$; und endlich

ſtatt (Z) $z = \mp\sin(60+\alpha)\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(A^2+12C)}$;

wo die untern Zeichen gelten, wenn das letzte Glied in (L) das Zeichen — hat (vergl. den Schluß des Zuſ. 3. im §. 57.).

Um die Gleichungen (K) und (L) zu bekommen, ſetzten wir $m^2 = y$ oder $m = \pm\sqrt{y}$ und $y = z-\frac{1}{3}A$; daher iſt auch $m = \pm\sqrt{(z-\frac{1}{3}A)}$, d. i. in jedem der gefundenen Werthe von z bekannt, folglich können die obigen 4 Wurzeln von (F) auch ſo ausgedrückt werden:

$$x = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}z+\frac{B}{2m}\right)} \text{ und}$$

$$x = +\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}z-\frac{B}{2m}\right)};$$

und zwar gelten dieſe Werthe von m und x allgemein, d. i. auch für I. und II.

Wenn III. das letzte Glied in (F) $= C$ und zugleich nun im obigen Zähler des Faktors $\sqrt{\left(1-\frac{4(\frac{1}{3}A^2-4C)^3}{27(\frac{1}{3}AC-\frac{2}{27}A^3-B^2)^2}\right)}$ das letzte Glied $4C > \frac{1}{3}A^2$ oder $12C > A^2$ iſt; ſo muß in den obigen Formeln geſetzt werden $-(A^2+12C)$; ferner $\text{tang}\,\varphi$ ſtatt $\sin\varphi$ und $\text{tang}\,2\varphi'$ ſtatt $\sin 2\varphi'$, weil ſich unter beiden zugleich ſtattfindenden Bedingungen die frühere Form $\sqrt{(1-f)}$ jetzt in $\sqrt{(1+f)}$ umwandelt.

Beispiel zu I. Es sey

$$x^4 + 3x^2 + 50x + 32 = 0.$$

Hier ist $A = 3$; $B = 30$; $C = 32$, daher

$$\sin\varphi = \frac{9+12.32}{24.96-18-9.900} \cdot \sqrt[3]{(9+12.32)} = \frac{131}{-1938} \cdot \sqrt[3]{393}.$$

Das Zeichen — im letzten Werthe von $\sin\varphi$ zeigt bloß, daß man zu dem spitz gefundenen φ noch 2R oder 180° addiren müsse. Diesen Umstand vorerst nicht weiter beachtend, steht die Rechnung so:

$\frac{\log 393}{2} = 1{,}2971963$	also $\varphi = 243^\circ\ 17'\ 51'',04$
$\log 2 = 0{,}3010300$	$\frac{1}{2}\varphi = 121\ \ 38\ \ 55\ ,52$
$\text{C.}\log 3 = 9{,}5228787$	$\frac{\log - \tan g \frac{1}{2}\varphi}{3} = \frac{0{,}2101530}{3}$
$\log \sqrt[3]{393} = 1{,}1211050$	$\log \tan g\, \varphi' = 0{,}0700510$
$\log 131 = 2{,}1172713$	$\varphi = 130^\circ\ 23'\ 56'',58$
$\text{C.}\log 1938 = 6{,}7126462$	$2\varphi' = 260\ \ 47\ \ 53\ ,16$
$\log \sin\varphi = 9{,}9510225$	$\log \sqrt[3]{393} = 1{,}1211050$
	$\text{C.}\log \sin 2\varphi' = 0{,}0056252$
	$\log z = 1{,}1267302;$

daher $+z = 13{,}388446$ und $m = \sqrt{(z - \frac{1}{3}A)} = \sqrt{(13{,}38\ldots - 2)} = 3{,}374677$; folglich

$$x = -1{,}687339 \pm \sqrt{\left(-1 - 3{,}347111 + \frac{30}{6{,}749354}\right)}$$

$$= -1{,}68\ldots \pm \sqrt{0{,}097757} = -1{,}687339 \pm 0{,}312661,$$

also $x = -2$ und $x = -1{,}374678$. Die 2 andern Werthe von x sind, wie die Substitution in der zweiten obigen Formel für x zeigt, unmöglich.

Beispiel zu II. Es sey

$$x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0.$$

Hier ist $A = -12$; $B = 12$ und $C = -3$. Der hieraus für $\sin\varphi$ leicht zu entwickelnde Werth $= \frac{144 - 36}{24.36 + 8.144 - 9.144} \times \sqrt[3]{108} = \frac{108}{720} \cdot \sqrt[3]{108} = \frac{3}{20} \cdot 4\sqrt{3}$ ist > 1; demnach hat man $\sin 3\alpha = \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{5}{3.\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{27}} = 0{,}9622504,$

daher $3\alpha = 74^0\ 12'\ 24'',69$; $\alpha = 24^0\ 44'\ 8'',23$ und $\sin\alpha = 0{,}4184518$. Hieraus findet man, da das letzte Glied in (L) nach unserem Beispiele + wird, vermöge der ersten Formel unter II.

1) $z = +\ 0{,}4184518 \cdot 6{,}9282032 = 2{,}89898$ und
$m = +\ 3{,}301361$; eben so nach den 2 andern Formeln

2) $z = 4$;
$m = 3{,}4641016$;
oder $= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

3) $z = -\ 6{,}89898$
$m = \quad 1{,}049295$.

Hieraus entwickelt man endlich und zwar mittelst der Werthe von z und m unter 2)

erstens $x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(4 - 1 + \frac{12}{4\sqrt{3}}\right)} = -\sqrt{3} \pm \sqrt{(3 + \sqrt{3})}$

d. i. $x = +\ 0{,}4432768$ und $x = -\ 3{,}9073784$;

zweitens $x = +\sqrt{3} \pm \sqrt{(3 - \sqrt{3})}$, demnach

$x = +\ 2{,}3580881$ und $x = +\ 0{,}6060185$.

Dieselben 4 Werthe von x oder Wurzeln unserer Gleichung finden sich auch mit Hülfe der Werthe von z und m sowohl unter 1) als unter 3).

Beispiel zu III. Sey

$$x^4 - 3x^2 - 30x - 88 = 0.$$

Hier ist $A = -3$; $B = -30$; $C = -88$ und zugleich $12C > A^2$. Folglich $\text{tang}\,\varphi = \frac{12.88 - 9}{24.3.88 + 18 - 9.900} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{(12.88 - 9)} = \frac{349}{-582} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{1047}$.

Hieraus ist φ, welcher wegen des — Werthes der Tangente stumpf zu nehmen ist, $= 94^0\ 25'\ 13'',94$ und $\frac{1}{2}\varphi = 47^0\ 12'\ 36'',97$.

Also $\log \text{tang}\,\varphi' = \log \sqrt[3]{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi} = \frac{30{,}0335405}{3} = 10{,}0111801$;

folglich $\varphi' = 45^0\ 44'\ 14'',66$ und $2\varphi' = 91^0\ 28'\ 29'',32$.

Weil demnach (in der Formel für z) $\text{tang}\,2\varphi'$ als Divisor, oder $\cot 2\varphi'$ als Faktor das Zeichen — bekommt; so hat man

$z = +\cot 2\varphi' \cdot \frac{1}{3}\sqrt{-(A^2 + 12C)} = \cot 2\varphi' \cdot \frac{1}{3}\sqrt{1047} = 0{,}555382$ und $m = \sqrt{2{,}555382} = 1{,}598558$.

Also $x = 0{,}799278 \pm \sqrt{10{,}244625} = 0{,}79\ldots \pm 3{,}200722$; d. i. $x = 4$ und $x = -2{,}401444$. Die 2 andern Wurzeln der vorgegebenen Gleichung sind imaginär.

§. 60. 3. Euler's Methode. — Die kubische Gleichung

$$(M)\ldots\ y^3 + fy^2 + gy - h = 0$$

habe die 3 Wurzeln p, q, r, deren Summe also $p+q+r = f$; $pq+pr+qr = g$ und deren Produkt $pqr = h$ ist (§. 57. 11.).

Man setze $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; so hat man

$$x^2 = (p+q+r) + 2(\sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr})$$

oder $x^2 - f = 2(\sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr})$; dieses nochmals quadrirt, wird

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4(pq+pr+qr) + 8(\sqrt{p^2qr} + \sqrt{pq^2r} + \sqrt{pqr^2})$$
$$= 4g + 8(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{h};$$

oder $(N)\ldots\ x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0.$

Gleichwie nun diese biquadratische Gleichung vermöge ihres Ursprunges die Wurzeln $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ hat, welche mittelst der angenommenen Wurzeln p, q, r von (M) bekannt sind; eben so muß eine gegebene biquadratische Gleichung von der Form (N) die Wurzeln, vorgestellt durch $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ haben, und zwar werden diese Wurzeln bekannt, sobald man die Wurzeln p, q, r von (M) unter der Bedingung gefunden hat, daß man zuvor die in (M) beliebig angenommenen Coefficienten f, g, h in den Coefficienten der gegebenen Gleichung bestimmt; was allgemein so geschieht: Sey

$$(O)\ldots\ x^4 - Ax^2 - Bx + C = 0.$$

Diese Gleichung ist mit (N) identisch, wenn

1) $2f = A$; 2) $8\sqrt{h} = B$; 3) $f^2 - 4g = C$ ist.

Aus 1) folgt $f = \frac{1}{2}A$; aus 2) $h = \frac{1}{64}B^2$; aus 3) $g = \frac{A^2}{16} - \frac{C}{4}$.

Der Auflösung von (O) dient also, statt (M), die Hülfsgleichung

$$(M')\ldots\ y^3 - \tfrac{1}{2}Ay^2 + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}A^2 - C)y - \tfrac{1}{64}B^2 = 0.$$

Aus jeder der 3 Wurzeln von (M') die Quadratwurzel ausgezogen, hat man die 4 Wurzeln von (O) unter der Form $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

Allein die Wurzeln von (M') können + und — seyn, wodurch man aus $\pm\sqrt{p}; \pm\sqrt{q}; \pm\sqrt{r}$ acht verschiedene Summen oder Wurzeln von (O) erhielte, unter welchen jedoch nur vier gelten können. Um diese Geltenden zu unterscheiden, dient Folgendes:

In (M) ist $h = pqr$ oder $\sqrt{h} = \sqrt{pqr}$; aber aus 2) ist auch $\sqrt{h} = \frac{1}{2}B$. Wenn daher $\frac{1}{2}B$ das Zeichen + hat, so hat auch $\sqrt{h}$ dieses Zeichen, d. i. das Produkt aus jenen 3 Wurzeln der kubischen Hülfsgleichung muß + seyn, folglich können in diesem Falle nur die vier Wurzeln gelten:

$$x = +\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r} \text{ und } x = -\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \mp \sqrt{r}.$$

Findet aber $\sqrt{h} = -\frac{1}{2}B$ Statt; so gelten die 4 andern Werthe

$$x = +\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \mp \sqrt{r} \text{ und } x = -\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}.$$

Auch erhellt, daß, weil $h = \pm\left(\frac{B}{8}\right)^2 = +\frac{B^2}{64}$, d. i. das Produkt aus den 3 Wurzeln von (M) oder (M') + ist, die mögliche Wurzel z. B. p, welche immer vorhanden ist (§. 56. 2.), $= +p$ seyn müsse, im Falle die 2 übrigen Wurzeln imaginär sind. Wenn ferner (M) lauter mögliche + Wurzeln hat; so sind auch die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung (N) oder (O), vorgestellt durch $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, mögliche, dagegen unmögliche Größen, wenn (M) eine — Wurzel hat. Endlich in dem Falle, daß (M) oder (M') neben + p zwei imaginäre Wurzeln $\sqrt{q}$ und $\sqrt{r}$ habe, hat auch (N) 2 imaginäre Wurzeln, indem sich wohl in der Summe dieser Wurzeln, nämlich in $\pm\sqrt{q} \pm \sqrt{r}$ das Unmögliche hebt, keineswegs aber im Unterschiede $\pm\sqrt{q} \mp \sqrt{r}$ (§. 56. 4.).

Beispiel. Es sey aufzulösen

$$x^4 - 220x^2 + 240x + 8064 = 0.$$

Hier ist $f = 110$; $h = 900$; $g = 1009$ folglich die kubische Hülfsgleichung (M) oder (M') bestimmt diese:

$$y^3 - 110y^2 + 1009y - 900 = 0,$$

deren 3 Wurzeln sind $+1; +100; +9$. Daher sind die durch $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ vorgestellten 4 Wurzeln unserer

gegebenen Gleichung lauter mögliche Größen, und zwar, weil der Coefficient des dritten Gliedes in (N) nämlich $-3\sqrt{h} = 240 = B$, d. i. $\sqrt{h} = -\frac{1}{3}240 = -\frac{1}{3}B$ ist; so gelten die vorhin zuletzt angeführten Werthe, nämlich

1. $x = 1+\sqrt{9}-\sqrt{100} = -6$; 2. $x = 1-\sqrt{9}+\sqrt{100} = +8$;
3. $x = -1+\sqrt{9}+\sqrt{100} = +12$; 4. $x = -1-\sqrt{9}-\sqrt{100} = -14$.

c. Auflösung noch höherer numerischer Gleichungen nach Cagnoli.

§. 61. 1. Jede geordnete Gleichung kann durch

$$x^m + Ax^{m-n} + Bx^{m-n-p} + \ldots Z = 0$$

vorgestellt werden, wo die Exponenten ganze + Zahlen sind, und A, B, ... Z ganze oder gebrochene + oder — Zahlen bedeuten können.

Zur Auffindung der Grenzen der Wurzeln setze man statt x nach und nach alle natürlichen Zahlen von $-\frac{1}{2}m$ bis $+\frac{1}{2}m$. Ist aber m ungerade und gilt $+Z$; so beginne man mit $x = -\frac{m+1}{2}$ und ende mit $+\frac{m-1}{2}$; im entgegengesetzten Falle, wo $-Z$ gilt, mache man erst $x = -\frac{m-1}{2}$ und zuletzt $x = +\frac{m+1}{2}$.

2. Macht einer dieser Werthe von x die Gleichung zu Null, d. i. gibt eine solche Substitution das Resultat $y = 0$; so ist jener Werth selbst eine Wurzel der Gleichung. Aber 2 nächste Resultate, das eine mit +, das andere mit —, lassen erkennen, daß zwischen den angenommenen Werthen von x, die jene entgegengesetzte Resultate hervorbrachten, eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln der vorgegebenen Gleichung vorhanden sey. Denn vom Resultate $+y$ zu $-y$ ist nur durch $0y$ der Uebergang möglich; also muß zwischen jenen Werthen von x, die diese entgegengesetzten Zahlenresultate geben, ein Werth vorhanden seyn, der $0y$ hervorbringt; d. i. es findet zwischen jenen Werthen wenigstens eine reelle Wurzel Statt. Nimmt man aber an, daß noch eine zweite reelle Wurzel zwi-

schen denselben Grenzen liege; so müßte ein $+y'$ in ein $-y$, liegend zwischen $+y$ und $-y$, verwandelt worden seyn, ohne es bemerkt zu haben. Dann aber müßte auch noch eine dritte Wurzel der Gleichung zwischen denselben Grenzen liegen, welche jenes $+y$ in das aufgefundene $-y$ verwandelte; u. s. w. Es muß daher entweder eine, oder es müssen 3, 5,... d. i. eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln zwischen jenen Grenzen oder Werthen von x liegen, durch deren Substitution in der Gleichung 2 nächste entgegengesetzte Resultate erhalten wurden. (Vergl. oben §. 56. 19. 3. Meth.)

Beispiel. Es sey gegeben

$$(\psi)\ldots\ x^5-9x^4+4x^3+66x^2-12x-99=0.$$

Wegen $m=5$ und $-Z$ mache man zuerst $x=-\frac{m-1}{2}=-2$ und zuletzt $x=+\frac{m+1}{2}=+3$. Setzt man die erste Seite der Gleichung $=y$, so drückt y jedes Resultat aus, das man dem statt x substituirten Werthe entsprechend bekommt, wie das Schema zeigt:

$x=-2;\ -1;\ \ 0;\ +1;\ +2;\ +3;\ldots.$
$y=-19;\ -35;\ -99;\ -49;\ +61;\ +81;\ldots.$

Es liegt also zwischen $+1$ und $+2$ wenigstens eine mögliche Wurzel unserer Gleichung; man findet nach der vorhin cit. Methode 1,439873, als genäherte Wurzel.

3. Um noch eine Wurzel zu finden, werden mittelst der gefundenen Resultate y, indem man immer das Vorhergehende von dem unmittelbar Folgenden abzieht, die ersten, dann aus diesen die zweiten,... Differenzen nach dem Schema erzeugt:

Resultate y;	-19;	-35;	-99;	-49;	$+61$;	$+81$,...
Differenzen, erste;	-16,	-64,	$+50$,	$+110$,	$+20$,	
" " zweite;	-48,	$+114$,	$+60$,	-90		
" " dritte;	$+162$,	-54,	-150			
" " vierte;	-216,	-96				
" " fünfte	$+120$.					

Diese letzte Differenz E (= 120), wie Euler (im 1. Kap. der Differenr. rechn.) beweist, durch die Formel

$$E = D^m \cdot m(m-1)(m-2)\ldots(m-(m-1))$$

ausgedrückt, wo D den Exponenten oder die Differenz der Reihe der Werthe von x (in unserem Beisp. den Exp. 1.) bezeichnet, ist in Beziehung auf jede Gleichung vom 5. Grade = 120, dient folglich zur Prüfung der richtigen Bildung der Differenzreihen.

4. Will man die Resultate y für die weiter abnehmenden Werthe von x (im Beisp. für $-3, -4, \ldots$) haben; so entwickelt man sie sehr leicht dadurch, daß man die letzte Differenz 120 von der 4. Initialdifferenz (−216), dann die eben gefundene von der 3. Initialdiff. (+162),.... abzieht; was so angesetzt wird:

+120, −216, +162, − 48, − 16; y = − 19; x = −2!
+120, − 336, +498, −546, +530; y = −549; x = −3.

Wie man nämlich das Resultat −19 (für x = −2) dadurch bekommt, daß man die erste Differenz −16 im obigen Schema von dem Resultate −35 (für x = −1) abzieht; eben so findet man das Resultat y = −549 (für x = −3), indem man die entwickelte letzte Differenz +530 von dem Resultate y = −19 (für x = −2) abzieht. Weil übrigens diese für − Werthe von x gefundnen Resultate y immer in demselben Sinne (mit −) wachsen, wie schon das Alterniren der Zeichen der vorigen Differenzen zeigt; so ist klar, daß für noch größere − Werthe von x weiter keine Wurzelgrenzen zu finden sind.

Um die Resultate y für noch größere + Werthe von x leicht zu finden, wählt man jetzt die Enddifferenzen im obigen (ersten) Schema und verfährt mit ihnen durch Addition, wie vorhin mit den Initialdifferenzen durch Subtraction, indem man setzt:

+120, −96, −150, − 90, + 20; y = + 81; x = +3.
+120, +24, −126, −216, −196; y = −115; x = +4.

Die entgegengesetzten Resultate y = + 81; − 115 lassen erkennen, daß zwischen den Grenzen +3, +4 wenigstens eine reelle Wurzel (+3,566774) liege. Setzt man dieselbe Opera-

tion für $x = +7 = +8$ fort; so bekommt man abermals 2 nächste Resultate -379 und $+1961$, und man findet wirklich zwischen jenen Wurzelgrenzen den genäherten Werth von $x = +7{,}266274$.

5. Angenommen, daß für noch größere $+$ Werthe von x lauter zunehmende $+$ Resultate gefunden werden, sohin auch auf dieser Seite keine weiteren Wurzelgrenzen zu entdecken seyen, verfahre man, da unsere Gleichung noch 2 Wurzeln hat, auf folgende Weise:

Auf der geraden Linie Ss (der Axe oder Abscissenlinie) Fig. 31. schneide man von dem Punkte O (dem Ursprunge der Abscissen) an z. B. rechts Theile wie O1, O2,... (die Abscissen) ab, welche die angenommenen $+$ Werthe von x ($+1$, $+2$,...), so wie die links O abgeschnittenen Theile die $-$ Werthe von x vorstellen. In O, wie in den Endpunkten 1, 2,... der Abscissen errichte man für die gefundenen $-y$ oberhalb, und für $+y$ unterhalb der Axe Ss Perpendikel (Ordinaten), die durch ihre verhältnißmäßige Länge die gefundenen Resultate $+y$, $-y$ vorstellen. Zieht man nun eine, die Endpunkte dieser Ordinaten verbindende Linie; so hat man die Curve, welcher unsere vorgegebene Gleichung angehört.

Da diese Curve die Axe so oft schneidet, als sie von dem Endpunkte eines unterhalb der Axe gezogenen Perpendikels (einer $-$ Ordinate) zum Endpunkte einer $+$ Ordinate gehen muß; so bezeichnet die Zahl dieser Durchschnitte der Axe die Zahl der reellen Wurzeln der zugehörigen Gleichung. In unserem Falle geschieht der Uebergang zwischen $+1$ und $+2$ im Punkte A, für den also die Ordinate Oy, d. i. keine Ordinate Statt findet, wie es seyn muß, indem für einen zwischen $+1$ und $+2$ liegenden Werth von x das Resultat y oder die gegebene Gleichung zu Null gemacht wird. Es stellt demnach OA die von uns oben zuerst gefundene Wurzel vor. Die 2 andern gefundenen $+$ Wurzeln liegen in der rechtshin verlängerten Axe Ss.

Links kann die Curve, vom Punkte n zu m geführt, entweder die punktirte Linie verfolgen, oder die Axe in B und C schneiden, oder die Axe als Tangente nur in einem Punkte be-

führen. Im zweiten Falle finden die zwischen —1 und —2 liegenden Wurzeln —BO, —CO, d. i. eine gerade Anzahl von Wurzeln, wie es seyn muß, Statt. Im ersten Falle sind die auch Statt findenden Wurzeln imaginär, indem die Axe weder durchschnitten noch berührt wird; im dritten Falle sind sie gleich.

Es erhellt, daß die, die Erwägung dieser 3 Fälle herbeiführenden, Konstruktionen der Curve nur möglich seyen zwischen den 2 kürzesten Ordinaten, welche einerlei Zeichen haben, und den der Nulle am nächsten liegenden Resultaten y (hier —35 und —19) entsprechen. Daher die Regel: „wenn die successiven Resultate y ohne Zeichenänderung sich 0 nähern, dann aber von 0 entfernen; so ist dieses ein Zeichen, daß eine gerade Anzahl von Wurzeln vorhanden sey, liegend zwischen den Werthen von x, die jene der Nulle nächsten Resultate hervorbringen; diese Wurzeln seyen nun entweder reell oder imaginär, gleich oder ungleich."

6. Um zu erfahren, welche Art von Wurzeln in einem solchen Falle vorhanden sey, darf man nur prüfen, ob irgend ein angenommener Zwischenwerth von x einen Werth von y mit entgegengesetztem Zeichen hervorbringe, oder nicht. Im ersten Falle werden reelle, im andern imaginäre Wurzeln vorhanden seyn. In unserem Beispiele, wo sich's davon handelt, ob —OB, —OC wirklich 2 reelle Wurzeln unserer Gleichung seyen, wie sich aus der doppelten Wiederholung desselben Zeichens vermuthen läßt, substituire man in der Gleichung den zwischen —2 und —1 liegenden Werth $-\frac{3}{2}$ statt x. Die Rechnung gibt das Resultat $y = +\frac{37}{32}$; d. i. einen + Werth zwischen —35 und —19. Also hat die Gleichung 2 reelle Wurzeln, die eine zwischen den Grenzen —1 und $-\frac{1}{2}$ und die andere zwischen $-\frac{3}{2}$ und —2. In der That sind —1,478091 und —1,794829 sehr genäherte Wurzeln unserer Gleichung.

Anmerkung. Die Anwendung dieser schnell zum Ziele führenden Methode setzt als einzige Bedingung voraus, daß die vorgegebene Gleichung von Irrationalgrößen befreit sey. Es zeichnet sich daher diese Methode vor der Buban'schen („Nou-

velle Meth. pour la resol. des équat. numer. d'un degré quelc." — Paris 1807) vortheilhaft aus. Letztere Methode findet man gut dargestellt in „Dr. Crelle's Lehrbuche der Arithm. und Algebra" S. 664—678.

C.

Eliminations-Methoden.

§. 62. 1. Methode durch Substitution (vergl. allgem. Größenl. §. 86.)

Es sey x zu eliminiren aus den Gleichungen

$$(F)\ldots\ x^3-7x-7=0.$$
$$(G)\ldots\ 5x^2+3xy+y^2-7=0.$$

Aus (G) ist $x^2+xy=\frac{7-y^2}{3}$; daher

$$x=-\frac{y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{7-y^2}{3}+\frac{y^2}{4}\right)}=-\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{28-y^2}{12}};\ \text{folglich}$$

$$x^3=-\frac{y^3}{8}\pm\frac{3y^2}{4}\sqrt{\frac{28-y^2}{12}}-\frac{3y}{2}\cdot\frac{28-y^2}{12}\pm\frac{28-y^2}{12}\sqrt{\frac{28-y^2}{12}}$$
$$=-\frac{y^3}{8}+\left(\frac{3y^2}{4}+\frac{28-y^2}{12}\right)\cdot\pm\sqrt{\frac{28-y^2}{12}}-\frac{3.28y+3y^3}{2.3.4},$$
$$=\frac{2y^2+7}{3}\cdot\pm\sqrt{\frac{28-y^2}{4.3}}-\frac{7y}{2}=\frac{2y^2+7}{6}\cdot\pm\sqrt{\frac{28-y^2}{3}}-\frac{7y}{2}.$$

Diese Werthe für x und x^3 in (F) substituirt, hat man

$$\frac{2y^2+7}{6}\cdot\pm\sqrt{\frac{28-y^2}{3}}-\frac{7y}{2}+\frac{7y}{2}\mp7\sqrt{\frac{28-y^2}{12}}-7=0,$$

oder $\left(\frac{2y^2+7}{6}-\frac{7}{2}\right)\cdot\pm\sqrt{\frac{28-y^2}{3}}=7$, woraus

$$\pm\sqrt{\frac{28-y^2}{3}}=7:\frac{y^2-7}{3}=\frac{21}{y^2-7},\ \text{und}$$

$$\frac{28-y^2}{3}=\frac{441}{y^4-14y^2+49}.$$

Hierin die Brüche aufgehoben und reduzirt, wird

$$\left.\begin{matrix}28\\+14\end{matrix}\right\}\begin{matrix}y^4-592\\-49\end{matrix}\left|\begin{matrix}y^2+1372-y^4\end{matrix}\right\}=1323;$$

hieraus die geordnete Gleichung:

$$y^6-42y^4+441y^2-49=0, \text{ oder } z=y^2 \text{ gesetzt,}$$
$$z^3-42z^2+441z-49=0.$$

§. 65. 2. Methode durch Einhüllung einer unbekannten Größe, nachdem die Gleichung nach der andern unbekannten Größe geordnet ist.

Beispiel 1. Sey

$$(H)\ldots\ x^2+axy+bx=cy^2+dy+e=0,$$

oder, um y einzuhüllen, die nach x geordnete Gleichung

$$(I)\ldots\ x^2+x(ay+b)-cy^2-dy-e=0.$$

Setzt man nun $ay+b=P$ und $cy^2-dy-e=Q$; so ist

$$(K)\ldots\ x^2+Px+Q=0$$

die Gleichung, in der die Unbekannte y durch die großen Buchstaben P, Q verhüllt ist.

Eine solche, wie (I), nach x geordnete Gleichung vom mten Grade mit 2 Unbekannten, dargestellt durch

$$x^m y^0+(a+by)x^{m-1}+(c+dy+ey^2)x^{m-2}$$
$$+(f+gy+hy^2+ky^3)x^{m-3}+\ldots+(p+qy+\ldots uy^{m-1})x$$
$$+(s+ty+uy^2+\ldots+wy^m)x^0=0,$$

hat, wenn man $a+by=P$, so wie die folgenden Coefficienten $=Q, R, T, \ldots U$ setzt, wieder die allgemeine Form:

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0.$$

Von dieser Form seyen nun die speziellen Gleichungen

$$(L)\ldots\ x^2+Px+Q=0,$$
$$(M)\ldots\ x^2+P'x+Q'=0.$$

(M) von (L) abgezogen, ist

$$(P-P')x+Q-Q'=0;$$

daher $x=-\frac{Q-Q'}{P-P'}$. Diesen Werth in (L) substituirt, ist

$$\frac{(Q-Q')^2}{(P-P')^2}-\frac{P(Q-Q')}{P-P'}+Q=0, \text{ oder}$$
$$(Q-Q')^2-P(Q-Q')(P-P)+(P-P')^2Q=0.$$

Hieraus

Hieraus wird entwickelt

$$(N)\ldots\ (Q-Q')^2+(P-P')(PQ'-P'Q)=0.$$

Man setze nun, (L) sey obige (K), entsprungen aus (I) oder (H); aber (M) sey entsprungen aus

$$x^2-mxy+ny^2=0,$$

so kennt man nebst den Werthen von P und Q auch $P'=-my$ und $Q'=ny^2$. Die Werthe dieser Größen in (N) substituirt, dann die Gleichung nach y geordnet, hat man, die Faktoren der Potenzen von y kurz mit f, g, h, i bezeichnend, die Gleichung

$$fy^4+gy^3+hy^2+iy+e^2=0,$$

welche, indem man Alles durch f dividirt und $y=\frac{z}{f}$ setzt,

$$\frac{z^4}{f^4}+\frac{gz^3}{f^4}+\frac{hz^2}{f^3}+\frac{iz}{f^2}+\frac{e^2}{f}=0,$$

woraus denn die geordnete Gleichung

$$z^4+gz^3+fhz^2+f^2iz+f^3e^2=0$$

entspringt, durch deren Auflösung auch y und x bestimmt wird.

Beispiel 2. Es seyen die 2 kubischen Gleichungen gegeben

$$(O)\ldots\ xy^2+2b^2y+x^2y+x^3=0,$$
$$(P)\ldots\ ay^2+xy^2+2x^2y+ax^2=0.$$

Um x vorerst einzuhüllen, y aber zu eliminiren, bezeichne man die Faktoren der Potenzen von y in (O) mit A, B, C und in (P) mit A', B', C', oder setze $A=x$; $B=2b^2+x^2$; $C=x^3$; $A'=a+x$; $B'=2x^2$ und $C'=ax^2$. Dadurch hat man die neuen Gleichungen:

$$(O')\ldots\ Ay^2+By+C=0,$$
$$(P')\ldots\ A'y^2+B'y+C'=0.$$

(O') mit A', dann (P') mit A multiplizirt und die letztere, neu entstandne Gleichung von der ersteren abgezogen, hat man

$$(Q)\ldots\ (A'B-AB')y+A'C-AC'=0.$$

Um noch eine Gleichung in y zu haben, multiplizire man (O') auch mit C', und (P') mit C; so ist, wie vorhin,

$$(AC'-A'C)y^2+(BC'-B'C)y=0,$$
$$\text{oder } (R)\ldots\ (AC'-A'C)y+BC'-B'C=0.$$

Indem man ferner (Q) mit $AC' - A'C$, und (R) mit $A'B - AB'$ multiplizirt und die neu entstandenen Gleichungen von einander abzieht, findet man

$$(S)\ldots (A'C - AC')(AC' - A'C) - (A'B - AB')(BC' - B'C) = 0.$$

In (S) die obigen Werthe für A, B,... A', B',... substituirt, entwickelt man die nach den Potenzen von x geordnete Gleichung

$$3x^8 - 3ax^7 + (a^2 - 4b^2)x^6 - 4ab^2x^5 + 4a^2b^2x^4 + 4ab^4x^3 + 4a^3b^6x^2 = 0.$$

Eine Gleichung vom 8. Grade, da wir höchstens auf eine vom 6. Grade hätten kommen sollen. Zwar kann man jene, durch Division mit x^2, auf eine Gleichung vom 6. Grade zurückbringen; allein wir sind nicht versichert, ob nicht die doppelte Wurzel $x = 0$ einer der gesuchten Werthe von x sey.

Anmerkung. Dieselbe Art, die eine unbekannte Größe durch Buchstaben zu verhüllen, hat Euler bei seiner in der Einleitung zur Analysis unendl. Größen aufgestellten Eliminationsmethode angewendet. Allein, auch abgesehen von dem vorhin berührten Umstande, machen es schon die angeführten Beispiele klar, daß diese Einhüllungs-Methode, wenn sie bei noch höheren Gleichungen zur Elimination dienen soll, nicht geringere Schwierigkeiten für die Rechnung mit sich führe, als die im vorigen Paragraphen erörterte Methode.

§. 64. 3. Newton's Regeln. (Vergl. dessen Arithm. univ. pag. 74.)

I. Regel. Aus den Gleichungen:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ und}$$
$$fx^2 + gx + h = 0$$

geht die Normgleichung hervor:

$$(ah - bg - 2cf)\,ah + (bh - cg)\,bf + (ag^2 + cf^2)\,c = 0.$$

II. Regel. Aus den Gleichungen

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ und}$$
$$fx^2 + gx + h = 0$$

hat man die Normgleichung:

$$(ah - bg - 2cf)\,ah^2 + (bh - cg - 2df)\,bfh + (ch - dg)(ag^2 + cf^2) + (3agh + bg^2 + df^2)\,df = 0.$$

III. Regel. Aus den Gleichungen:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \text{ und}$$
$$fx^2 + gx + h = 0$$

erhält man durch Elimination von x die Normgleichung:

$$(ah - bg - 2cf)ah^3 + (bh - cg - 2df)bfh^2 + (ag^2 + cf^2)$$
$$(ch^2 - dgh + eg^2 - 2efh) + (3agh + bg^2 + df^2)dfh$$
$$+ (2ah^2 + 3bgh - dfg + ef^2)ef^2 - (bg + 2ah)efg^2 = 0.$$

IV. Regel. Aus den Gleichungen:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$
$$fx^3 + gx^2 + hx + k = 0,$$

hat man die Normgleichung:

$$(ah - bg - 2cf)(adh^2 - achk) + (ak + bh - cg - 2df)bdfh$$
$$+ (bh + 2cg + 3df - ak)a^2k^2 + (cdh - d^2g - c^2k + 2bdk)$$
$$(ag^2 + cf^2) + (3agh + bg^2 + df^2 - 3afk)d^2f + (cg + df$$
$$- bh - 3ak)bcfk + (bk - 2dg)b^2fk - (b^2k + 3adh + cdf)agk = 0.$$

Eine kurze und leichte, von Newton ganz übergangene, Deduktion dieser Regeln oder Formeln, habe ich auf S. 197. meiner allgem. Größenlehre gegeben.

Beispiel zur I. Regel. Es seyen gegeben

$$x^2 + 5x - 3y^2 = 0$$
$$\text{und } 3x^2 - 2xy + 4 = 0.$$

Substituirt man in der dortigen Normgleichung

statt a, b, c; f, g, h;
1, 5, $-3y^2$; 3, $-2y$, 4;

so hat man mit genauer Beobachtung der Zeichen

$$(4 + 10y + 18y^2)4 + (20 - 6y^3)15 + (4y^2 - 27y^2)x - 3y^2 = 0,$$

oder $16 + 40y + 72y^2 + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$, d. i. eine nun leicht zu ordnende Gleichung mit einer einzigen Unbekannten.

Beispiel zur II. Regel. Um aus

$$y^3 - xy^2 - 3x = 0$$
$$\text{und } y^2 - xy - x^2 + 3 = 0$$

y zu eliminiren, substituire man in der treffenden Formel

statt a, b, c, d; f, g, h, x;
1, $-x$, 0, $-3x$; 1, x, $-x^2+3$, y;

so findet man

$$(3-x^2+x^2)(9-6x^2+x^4)+(-3x+x^3+6x)(-3x+x^3)$$
$$+3x^2.x^2+(9x-3x^3-x^3-3x)x-3x=0,$$

oder multiplizirt, reduzirt und geordnet

$$x^6+18x^4-45x^2+27=0.$$

Beispiel zur III. Regel. Um nach dieser aus

$$(\alpha)\ldots\ x^4-4lx-m=0$$

und

$$(\beta)\ldots\ x^3-Qx-nQ-l=0$$

x eliminiren zu können, multiplizire man erst (β) mit x und subtrahire die neue Gleichung von (α); dadurch hat man

$$(\gamma)\ldots\ Qx^2-(nQ+3l)x-m=0.$$

Man substituire nun in der treffenden Normgleichung

statt a, b, c, d, e; f, g, h; aus (α) und (γ)

die Werthe: 1, 0, 0, -4l, -m; Q, -(nQ+3l), -m;

so findet man durch Reduktion und Ordnen der Glieder

$$(4ln-n^4+m)Q^4-(8ln^3+4mn^2+4l^2)Q^3$$
$$-(18l^2n^2+12lmn+2m^2)Q^2+m^3+27l^4=0,$$

oder indem man c statt l und b statt m setzt,

$$b^3+27c^4=(n^4-4cn-b)Q^4+4(2cn^3+bn^2+c^2)Q^3$$
$$+2(10c^2n^2+6bcn+b^2)Q^2.$$

Da dieses so leicht und schnell zu gewinnende Resultat nicht ohne viele Schwierigkeiten nach der im §. 63. erörterten oder der Euler'schen Methode gefunden wird; so ist schwer einzusehen, wie Christmann eben diese Methode in seiner Schrift „aelas argentea cossae" (Tübingae 1818) als einzig genuin (?) erklären konnte.

§. 65. 4. Bezout's Methode. (Vergl. dessen „Théorie générale des équations algébriques").

In diesem Buche lehrt Bezout, wie man auf viel kürzerem Wege, als die, von mir in der allgem. Größenl. §. 87. Zus. und §. 95. Zus. dargestellten, Elemente seiner Methode gewähren, die gesuchten Resultate finden könne.

1) Es seyen die Gleichungen

$$ax+by+c=0$$
$$a'x+b'y+c'=0.$$

Man multiplizire die letzten Glieder (c, c′) mit einer unbekannten Größe t und verändere im Produkte xyt nach und nach x in a, y in b, t in c. Dadurch hat man, indem man dem 2ten Gliede das Zeichen — gibt, die erste Größe:

$$ayt - bxt + cxy.$$

In jedem Gliede dieser Größe ändere man auf's Neue x in a′, y in b′ und t in c′; so hat man unter Beobachtung der Zeichenänderung bei dem 2., 4., 6., ... Gliede die zweite Größe:

$$ab't - ac'y - a'bt + bc'x + a'cy - b'cx,$$

$$\text{oder } (ab' - a'b)t - (ac' - a'c)y + (bc' - b'c)x.$$

Vergleicht man diese Größe mit den auf gewöhnliche Weise gefundenen Werthen von x und y (man sehe den vorhin cit. §. 87. Zus.), nämlich

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} \text{ und } y = -\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b};$$

so ergibt sich, daß die Faktoren von x und y in jener Größe die Zähler dieser Werthe von x und y sind, daß ferner der Faktor von t in jener Größe den Nenner bilde in jedem dieser Werthe.

2) Es seyen die 3 Gleichungen:

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$
$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0.$$

Stellt man sich die letzten Glieder wieder mit t multiplizirt vor, und ändert im Produkte xyzt nach und nach x in a, y in b, z in c und t in d; so hat man beim Alterniren der Zeichen die erste Größe:

$$ayzt - bxzt + cxyt - dxyz.$$

In jedem Gliede dieser Größe ändere man x in a′, y in b′, z in c′ und t in d′ und lasse die Zeichen alterniren; so bekommt man die zweite Größe:

$$ab'zt - ac'yt + a'dyz - a'bzt + bc'xt - bd'xz$$
$$+ a'cyt - b'cxt + cd'xy - a'dyz + b'dxz - c'dxy,$$

oder reducirt:

$$(ab' - a'b)zt - (ac' - a'c)yt + (ad' - a'd)yz + (bc' - b'c)xt$$
$$- (bd' - b'd)xz + (cd' - c'd)xy.$$

Hierin wird ferner x in a″, y in b″, ... verwandelt. Wenn man endlich die Coefficienten von t zu einem Faktor, eben so für z, ... vereiniget; so resultirt:

$$+[(ab'-a'b)c''-(ac'-a'c)b''+(bc'-b'c)a'']t$$
$$-[(ab'-a'b)d''-(ad'-a'd)b''+(bd'-b'd)a'']z$$
$$+[(ac'-a'c)d''-(ad'-a'd)c''+(cd'-c'd)a'']y$$
$$-[(bc'-b'c)d''-(bd'-b'd)c''+(cd'-c'd)b'']x.$$

Es wird also, wie vorhin unter 1) seyn

$$x=\frac{-[(bc'-b'c)d''-(bd'-b'd)c''+(cd'-c'd)b'']}{(ab'-a'b)c''-(ac'-a'c)b''+(bc'-b'c)a''},$$

und auf gleiche Weise wird man den Werth von y und z haben, indem man den obigen Faktor von y und eben so den von z durch den Faktor von t dividirt. Man kann sich sowohl von der Richtigkeit dieser Resultate, als von der großen Leichtigkeit, mit der sie gefunden werden, durch die sehr beschwerliche Anwendung einer der gewöhnlichen Eliminationsmethoden auf die 5 gegebenen Gleichungen überzeugen.

Noch bemerken wir, daß, wenn ein Coefficient in den vorgegebenen Gleichungen das Zeichen — hat, oder wenn ein Glied mit einer Unbekannten (z. B. cx) fehlt, man nur nöthig habe, im ersten Falle bloß die Zeichen in denjenigen Gliedern jedes Endresultates, in welchen jener Coefficient als Faktor vorkommt, zu ändern, im andern Falle aber die Glieder zu tilgen, in welche jener Coefficient c als Faktor eingeht.

Anmerkung. Kurz und sehr gut dargestellt findet man sowohl diese, als Cramer's Methode (die auf die Combinationstheorie gegründet ist) in der Schrift: „specimen anal. de lin. curvis sec. ordinis. Auct. Rüdigero“ (Lips. 1784).

§. 66. 5. Lagrange's Methode, bestehend in Aufsuchung eines gemeinschaftlichen Faktors oder Divisors höherer Gleichungen, die den Bedingungen einer Aufgabe gemäß angesetzt sind. Denn wenn der Werth α für x und β für y z. B. zweier solcher Gleichungen Genüge thun; so haben diese die Faktoren $x-\alpha$, $x-\beta$ gemein. Daher kann man auch umgekehrt schließen, daß der gemeinschaftliche Faktor dieser Gleichungen eine Wurzel derselben seyn müsse.

Beiſpiel 1. In den nach x geordneten Gleichungen

$$(a)\ldots\ x^3+3x^2y+3xy^2-98=0,$$
$$(b)\ldots\ x^2+4xy\ \ -2y^2\ \ -10=0$$

ſey x zu eliminiren. Will man y wegſchaffen; ſo muß man (a) und (b), und eben ſo die folgenden Dividende und Diviſoren nach y ordnen. Die Operation ſelbſt aber, die keine andere iſt, als das größte gemeinſchaftliche Maß zu finden, wird mit (a) und (b) und den entſpringenden Reſten ſo lange fortgeſetzt, bis ſich in einem Reſte die zu eliminirende Größe nicht mehr vorfindet.

In unſerem Beiſpiele gibt die Diviſion von (a) durch (b) den 1. Quotienten $x-y$ mit dem Reſte $(9y^2+10)x-2y^3-10y-98$. Durch dieſen Reſt den vorigen Diviſor (b) dividirt, wird der 2. Quotient $x+(38y^3+50y+98)$ mit dem letzten Reſte $=-86y^6-690y^4+3920y^3-1500y^2+5880y+8604$.

Da dieſer Reſt, wie der letzte Diviſor, $=0$ iſt (vergl. das Beiſpiel in 14. des §. 56.); ſo hat man, indem man den Reſt durch 2 dividirt und nach y ordnet, die 2 Gleichungen:

$$(c)\ldots\ 43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0,$$
$$(d)\ldots\ (9y^2+10)x-2y^3-10y-98=0.$$

Aus (d) iſt $x=\frac{2y^3+10y+98}{9y^2+10}$; folglich kennt man auch die Werthe von x, wenn man die von y aus (c) gefunden hat, mittelſt der Subſtitution. Macht dieſe jene Gleichung für x zu Null; ſo ſetzt man den Werth von y, der dieſes Reſultat gibt, in demjenigen Diviſor, in welchem x^2, oder in dem, in welchem x^3 vorkommt, nachdem er zuvor in eine Gleichung verwandelt iſt. Auch iſt klar, daß, wenn bei obigen Diviſionen kein Reſt bleibt, der letzte Diviſor, $=0$ geſetzt, den beiden Gleichungen genugthue.

Beiſpiel 2. Um dieſe Methode gegen andere, z. B. gegen die des §. 62., zu würdigen, ſey aus den daſelbſt aufgeſtellten, nach x geordneten Gleichungen, nämlich:

$$(e)\ldots\ x^5-7x-7=0$$
$$(f)\ldots\ 3x^2+5xy+y^2-7=0$$

x zu eliminiren. (e) zuerſt (zur Vermeidung der Brüche) mit

5 multiplizirt, dann durch (f) dividirt, gibt den Quotienten $x-y$ mit dem geordneten Reste $=(2y^2-14)x+y^3-7y-21$. Durch diesen Rest den vorigen Divisor (f) oder $5x(x+y)(2y^2-14)+(y^2-7)(2y^2-14)$ dividirt, ist das erste Glied des Quotienten $5(x+y)$, und, nachdem der Rest, wie vorhin (f) nach x geordnet und wieder mit $2y^2-14$ multiplizirt ist, das zweite Glied $=-5y^2+21y+63$, und der letzte Rest (ohne x), nach y geordnet, gibt die Endgleichung

$$y^6-42y^4+441y^2-49=0,$$

wie oben im §. 62. Da ferner auch der letzte Divisor $(2y^2-14)x+y^3-7y-21=0$ ist; so hat man hieraus

$$x=\frac{-y^3+7y+21}{2y^2-14}.$$

Daß diese Methode auch anzuwenden sey z. B. auf drei mit x, y, z gegebene Gleichungen, erhellt auf ähnliche Weise, wie hinsichtlich der gewöhnlichen Eliminationsmethoden (vergl. z. B. allgem. Größenl. §. 95.).

Schlußbemerkung über die reciproken Gleichungen.

Wir haben dieser Gleichungen oben nicht erwähnt, weil sie, wie gleich erhellen wird, keiner eigenen Auflösungsart bedürfen.

1. Reciproke Gleichung ist diejenige, deren Glieder rückwärts dieselben Coefficienten haben, wie vorwärts. Die allgemeine Form ist:

$$(1)\ldots x^n+\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}+\gamma x^{n-3}+\ldots\pm\gamma x^3\pm\beta x^2\pm\alpha x\pm 1=0.$$

Sie heißt reciprok, weil, wenn sie a zur Wurzel hat, auch $\frac{1}{a}$ eine Wurzel derselben Gleichung ist. Denn substituirt man in (1) a statt x und dividirt dann durch a^n; so erhält man

$$(m)\ldots 1+\alpha\cdot\frac{1}{a}+\beta\cdot\frac{1}{a^2}+\ldots\pm\beta\cdot\frac{1}{a^{n-2}}\pm\alpha\cdot\frac{1}{a^{n-1}}\pm\frac{1}{a^n}=0.$$

Allein man erhält auch (m), wenn man in (1) $\frac{1}{a}$ statt x setzt, das neue Polynom mit a^n multiplizirt und das Resultat durch $\pm a^n$ dividirt.

2. Ist n eine ungerade Zahl, so ist $+1$ eine Wurzel der reciproken Gleichung, je nachdem die obern oder untern Zeichen in (1) gelten, indem man z. B. durch Substit. von -1 statt x aus (1) erhält

$$-1+\alpha-\beta+\gamma\ldots-\gamma+\beta-\alpha+1=0.$$

3. Eine solche reciproke Gleichung von ungeradem Grade hat daher den Binomialfaktor $x\pm1$, wird folglich mittelst der Division durch diesen Faktor auf eine abermals reciproke, um einen Grad niedrigere Gleichung gebracht; so

$$x^5+7x^4+15x^3+15x^2+7x+1=0$$

$$\text{auf}\quad x^4+6x^3-3x^2+6x+1=0,$$

indem man ersteres durch $x+1$ dividirt.

4. Eine reciproke Gleichung vom $2n$ten Grade, deren Glieder gleiche Zeichen haben, nach der Form:

$$(2)\ldots x^{2n}\left(+\alpha x^{2n-1}+\beta x^{2n-2}+\ldots+\beta x^2+\alpha x+1\right)=0,$$

läßt sich auf eine Gleichung vom $n$ten Gr. bringen.

Denn (2) durch x^n dividirt, hat man

$$x^n+\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}+\ldots+\beta\frac{1}{x^{n-2}}+\alpha\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}=0,$$

oder (3)$\ldots\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\alpha\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\beta\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\ldots=0.$

$x+\frac{1}{x}=y$ gesetzt, entwickelt man

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=y^2$, oder $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$;

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3$, oder $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$;

eben so $x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2$; u. s. w.

Es wird daher allgemein seyn

$$(4)\ldots x^n+\frac{1}{x^n}=y^n-ny^{n-2}+\frac{n.n-3}{1}y^{n-4}-\frac{n.n-4.n-5}{2.3}y^{n-6}+\ldots$$

Denn (4) mit $x+\frac{1}{x}=y$ dividirt, hat man

$$(5)\ldots\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)=y^{n+1}-ny^{n-1}+\frac{n.n-3}{2}y^{n-3}-\ldots$$

Wenn nun die Gleichung (4) allgemein gilt; so muß man (5) auch dadurch erhalten, daß man die zwei Summen ihrer ersten Seite, die eine durch Subst. von n+1, die andere von n−1 statt x in (4) sucht und beide Werthe addirt. Man findet:

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=y^{n+1}-(n+1)y^{n-1}+\frac{n+1.n-2}{2}y^{n-3}-\frac{n+1.n-3.n-4}{2.3}y^{n-5}\ldots$$

$$x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}=y^{n-1}-(n-1)y^{n-3}+\frac{n-1.n-3}{2}y^{n-5}-\ldots$$

Beides addirt und reducirt, hat man wieder die Gleichung (5); also gilt (4) für jedes n.

Es geht demnach (3) durch Substitution nach (4) über in

$$y^n+ny^{n-2}+\frac{n.n-3}{2}y^{n-4}-\frac{n.n-4.n-5}{2.3}y^{n-6}+\ldots$$

$$+\alpha\left(y^{n-1}-(n-1)y^{n-3}+\frac{n-1.n-4}{2}y^{n-5}-\ldots\right)$$

$$+\beta\left(y^{n-2}-(n-2)y^{n-4}+\frac{n-2.n-5}{2}y^{n-6}-\ldots\right)$$

$$+\gamma\left(y^{n-3}-(n-3)y^{n-5}+\ldots\right)+\delta\left(y^{n-4}-\ldots\right)+\ldots=0;$$

oder man erhält durch Reduktion

$$(6)\ldots\ y^n+\alpha y^{n-1}+(\beta-n)y^{n-2}+(\gamma-(n-1)\alpha)y^{n-3}$$
$$+\left(\delta-(n-2)\beta\right)+\frac{n.n-3}{2}y^{n-4}+\ldots=0,$$

d. i. statt (2) eine Gleichung vom nten Grade, durch deren Auflösung, indem man y in $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ findet, man auch vermöge der Voraussetzung $y=x+\frac{1}{x}$ oder $xy=x^2+1$ (woraus $\alpha=\frac{1}{2}y\pm\sqrt{(\frac{1}{4}y^2-1)}$) die Unbekannte x der gegebenen Gleichung (2) vom 2nten Gr. kennt.

5. Es wird also eine solche reciproke Gleichung vom 9ten Gr. aufgelöst, indem sie nach 5. auf eine andere vom 8ten Gr. und nach 4. auf eine Gleichung vom 4ten Gr. gebracht, und letztere aufgelöst wird.

III.

Höhere Reihen.

A.

Arithmetiſche Reihen höherer Ordnung.*)

§. 67. Erklärungen. 1. Die Glieder der rückwärts (gegen die Linke hin) fortgeſetzten Reihe der natürlichen Zahlen ſind zugleich für die Glieder jeder andern, auf gleiche Weiſe vor- und rückwärts fortgeſetzten Reihe die Stellenzahlen (Zeiger, indices), indem man dem Anfangsgliede, d. i. demjenigen Gliede dieſer Reihe, von dem an ſie auf entgegengeſetzte Weiſe nach einerlei Geſetz fortgeht, die Nulle der erſten Reihe zum Zeiger gibt. Z. B.

Zeiger ... −4, −3, −2, −1, 0, +1, + 2, + 3, ...
1. Reihe ... −2, 0, +2, +4, +6, +8, + 10, +12, ...
2. Reihe ... +3, +1, −1, −3, −5, −7, − 9, −11, ...

In der 1. Reihe iſt +6, in der 2. −5 das Anfangsglied.

2. Eine Reihe (B), deren jedes nte Glied die Summe der n erſten Glieder einer andern Reihe (A) iſt, heißt in Beziehung auf (A) die ſummirende Reihe (ser. summatrix) und ein xtes (unbeſtimmtes) Glied von (B) heißt das ſummatoriſche Glied (terminus summatorius). Z. B.

(A) ... 1, 7, 19, 37, 61, ...
(B) ... 1, 8, 27, 64, 125, ...

wo z. B. das 4te Glied von (B) die Summe der 4 erſten Glieder von (A) iſt. In der arithmetiſchen Progreſſion (arithmetiſche Reihe erſter Ordnung) mit n Gliedern, begriffen unter der allgemeinen Form:

*) Vergl. allgem. Größenl. §. 126. mit Anm. 1. und §. 127. Wie die dort in Beiſpielen gegebenen Reihen, ſo auch hier ſollen die Reihen als ſteigend betrachtet werden.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots a_{n-1}, a_n,$$

wo jede unten beigefügte Zahl zugleich den Index jedes Gliedes und a_n das letzte oder allgemeine Glied der Reihe vorstellt, — ist die Summe der n ersten Glieder jener Reihe oder das summatorische Glied, bezeichnet mit S_n, $= (a_1 + a_n) \cdot \frac{1}{2}n$.

§. 62. Lehrsatz. Wenn A, B, C, ... R, S, T, ... die Glieder einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung vorstellen, und man bildet die Differenzreihen; so ist das erste (wie jedes folgende) Glied der nten Differenzreihe ein Polynom, dessen (n+1) Glieder dieselben Coefficienten mit alternirenden Zeichen haben, wie die Glieder der Entwickelung von $(-a+b)^n$.

Beweis. Die Erzeugung der Differenzreihen aus der Reihe A, B, C, ... gibt

1. $-A+B;\ -B+C;\ -C+D;\ -D+E;$... hieraus wird
2. $+A-2B+C;\ +B-2C+D;\ +C-2D+E;$... hieraus
3. $-A+3B-3C+D;\ -B+3C-3D+E;$... u. s. w.

Man sieht, daß in jeder Differenzreihe das folgende Glied aus dem unmittelbar vorhergehenden dadurch nothwendig gebildet werde, daß man in dem letzteren statt jeden Gliedes der gegebenen Hauptreihe das ihm unmittelbar Folgende einsetzt. Auch erhellt, daß jedes Glied jeder jener 3 gebildeten Differenzreihen dieselben Coefficienten mit alternirenden Zeichen habe, wie sie resp. in der Entwickelung 1) von $(-a+b)$; 2) von $(-a+b)^2$; 3) von $(-a+b)^3$ vorkommen.

Angenommen, Letzteres gelte von irgend einer nten Differenzreihe, daher z. B. für ein gerades n das erste Glied dieser Reihe

$$= +A - nB + \frac{n.n-1}{1.2}C - + \ldots + \frac{n.n-1}{1.2}P - nQ + R$$

sey; so müßte, wenn das Gesagte ein allgemein gültiges Gesetz wäre, auch dasselbe erste Glied der nächst höheren (n+1)ten (ungeraden) Differenzreihe erhalten werden, man möchte nun entweder bloß statt n substituiren (n+1) und die Zeichen entgegengesetzt alterniren lassen, oder man möchte dasselbe Glied durch Subtraction des ersten Gliedes der nten

Differenzreihe von dem zweiten eben dieser Reihe erzeugen. In der That erhält man auf jedem dieser Wege dasselbe erste Glied der (n+1)ten Differenzreihe, nämlich:

$$-A+(n+1)B-\frac{n+1.n}{1.2}C+\frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}D-\ldots+\frac{n+1.n}{1.2}Q-(n+1)R+S.$$

Nun gilt aber jenes Gesetz, wie wir sahen, wenn $n=2$ oder $=3$ ist; also gilt es auch für die (n+1)te, d. i. 4te Differenzreihe, daher auch, $n=4$ gesetzt, für die (4+1)te, d. i. 5te Differenzreihe, u. s. w. oder allgemein.

Zusatz 1. Wenn man also die Binomialcoefficienten kurz mit A, B, C,...; ferner das (n−1)te Glied der gegebenen Hauptreihe mit V, das nte mit X und das (n+1)te mit Y bezeichnet; so ist der allgemeine Ausdruck des ersten Gliedes der nten Differenzreihe

$$\pm(A-AB+BC-CD+\ldots\pm BV\mp AX\pm Y),$$

wo $\pm$ vor dem Einschlusse die Zeichen aller Glieder affizirt, und die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades n gelten.

Zusatz 2. Für die arithm. Reihe von der Ordnung

1. ist A−2B+C=0, ... d. i. es fehlt die 2. Diff.reihe
2. " A−3B+3C−D=0 . . " " " " 3. " "
3. " A−4B+6C−4D+E=0. " " " " 4. " "

. . . . . .

n... A−AB+BC...$\pm$CV$\mp$BX$\pm$AY$\mp$Z=0,

wenn nämlich wieder X das nte Glied der Hauptreihe, Y und Z, die 2 folgenden Glieder und A, B,... die Binomialcoefficienten der (n+1)ten Potenz von (a−b) bezeichnen.

Zusatz 3. Man kann daher auch sagen: Die arithm. Reihe z. B. der 2ten Ordnung sey diejenige, deren 3te Differenzreihe $=0$, oder für welche A−3B+3C−D=0 ist; und eben so sey die arithm. Reihe der 1sten Ordnung diejenige, deren 2te Differenzreihe $=0$, d. i. wie A−2B+C=0, auch B−2C+D=0 ist. Indem man aber diese Gleichung von der ersten abzieht, hat man auch A−3B+3C−D=0, wie für die Reihe der 2ten Ordnung; folglich kann man auch die arithm. Reihe

der 1sten Ordnung als eine der 2ten Ordnung u. s. w., d. h. die arithm. Reihe irgend einer Ordnung auch als Reihe einer höhern Ordnung betrachten.

§. 69. Lehrsatz. Drückt man eine arithmetische Hauptreihe statt durch A, B, C, ... X durch

a_1 (oder a), a_2, a_3, a_4, ... a_n

aus, und bezeichnet die ersten Glieder der 1. 2. 3.... Differenzreihe mit Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, ... so ist

I. das allgemeine Glied

$$a_n = a + (n-1)\Delta a + \frac{n-1.n-2}{1.2}\Delta^2 a + \frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3}\Delta^3 a + \ldots$$

bis die Reihe abbricht, weil ein Coefficient oder Differenzglied $= 0$ wird;

II. das summatorische Glied

$$S_n = na + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta a + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^2 a + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\Delta^3 a + \ldots$$

Beweis von I. Statt der Entwickelung im §. 68 hat man nun

Hptreihe a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...

		1.	2.	3.	4.
Diff.-	1.	$a_2 - a_1$;	$a_3 - a_2$;	$a_4 - a_3$;	$a_5 - a_4$; ...
reihe		Δa;	Δa_2;	Δa_3;	Δa_4; ...
	2.	$\Delta a_2 - \Delta a_1$;	$\Delta a_3 - \Delta a_2$;	$\Delta a_4 - \Delta a_3$;	$\Delta a_5 - \Delta a_4$; ...
		$\Delta^2 a$;	$\Delta^2 a_2$;	$\Delta^2 a_3$;	$\Delta^2 a_4$; ...
	3.	$\Delta^2 a_2 - \Delta^2 a_1$;	$\Delta^2 a_3 - \Delta^2 a_2$;	$\Delta^2 a_4 - \Delta^2 a_3$;	$\Delta^2 a_5 - \Delta^2 a_4$; ...
		$\Delta^3 a$;	$\Delta^3 a_2$;	$\Delta^3 a_3$;	$\Delta^3 a_4$; ...
		. . . . .			

In diesem Schema ist jedes Glied der 2ten untergesetzten Reihe der kurze Ausdruck des entsprechenden Gliedes der obern Reihe, oder $\Delta a = a_2 - a_1$; $\Delta^2 a = \Delta a_2 - \Delta a$; u. s. w. Hieraus ergeben sich mittelst leichter Substitutionen folgende Ausdrücke:

$a_1 = a$

$a_1 = a$

$a_2 = a + \Delta a$ (1. (1))

$a_3 = a_2 + \Delta a_2$ (1. (2)) $= a + \Delta a | + \Delta a + \Delta^2 a$ (2. (1))

$= a + 2\Delta a + \Delta^2 a$

$a_4 = a_3 + \Delta a_3 = a + 2\Delta a + \Delta^2 a | + \Delta a_2 + \Delta^2 a_2$ (2. (2))

$= \ldots\ldots | + \Delta a + \Delta^2 a$ (2. (1))

$| + \Delta^2 a + \Delta^3 a$ (3. (1))

$= a + 3\Delta a + 3\Delta^2 a + \Delta^3 a$, und eben so:

$a_5 = a + 4\Delta a + 6\Delta^2 a + 4\Delta^3 a + \Delta^4 a$

$a_6 = a + 5\Delta a + 10\Delta^2 a + 10\Delta^3 a + 5\Delta^4 a + \Delta^5 a$

. . . . . .

Es erhellt also, daß 1) jedes Glied der gegebenen Hauptreihe durch das erste Glied eben dieser Reihe und durch die ersten Glieder der Differenzreihen ausgedrückt werde; 2) die Coefficienten der Glieder dieser Ausdrücke keine andere, als die der Entwickelung von $(a+b)^{2-1}$, $(a+b)^{3-1}$, ... $(a+b)^{7-1}$ seyen, folglich 3) die allgemeine Gültigkeit des unter I. aufgestellten Ausdruckes auf ähnliche Weise, wie die des Lehrsatzes §. 68., bewiesen werden könne.

Beweis von II. Aus vorstehendem Schema sind weiter folgende Summirungen durch Substitution klar:

$S_1 = a_1 = a$

$S_2 = a_1 + a_2 = 2a + \Delta a$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a + 3\Delta a + \Delta^2 a$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a + 6\Delta a + 4\Delta^2 a + \Delta^3 a$

. . . . . .

Hieraus erhellt, wie vorhin für I., die Gültigkeit des allgemeinen Ausdruckes des summatorischen Gliedes S_n.

Zusatz 1. Man kann folglich auch das Xte Glied einer arithm. Hauptreihe, dessen Stellenzahl n ist, durch die Anfangsglieder (mit dem Zeiger =0) ausdrücken, wobei aber die Coefficienten der Glieder nun die der Entwickelung von $(a+b)$, $(a+b)^2$, ... $(a+b)^n$ werden.

Denn wenn man die Anfangsglieder kurz mit a°, b°, c°, d°, ... bezeichnet; so hat man nun, wie oben:

1.
$$\begin{array}{l|l} a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots & \text{wo denn} \\ \ldots\ldots\ldots & a_0 = a_0 \\ a_1 - a_0;\ a_2 - a_1;\ a_3 - a_2;\ldots & a_1 = a_0 + b_0 \\ b_0\ ;\ b_1\ ;\ b_2\ ;\ldots & a_2 = a_1 + b_1 = a_0 + b_0 + b_0 + c_0 \\ b_1 - b_0;\ b_2 - b_1;\ b_3 - b_2;\ldots & \quad = a_0 + 2b_0 + c_0 \\ c_0\ ;\ c_1\ ;\ c_2\ ;\ldots & \text{u. s. w. durch Substitution} \\ \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

gefunden wird. Daher wird allgemein seyn

$$X_n = a_0 + nb_0 + \frac{n.n-1}{1.2} c_0 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} d_0 + \ldots$$

Setzt man die Stellenzahl für $X = -n$ statt $+n$, so daß X nun nach §. 67. 1. ein vom Anfangsgliede um soviel Stellen gegen die Linke hin abstehendes Glied bedeutet, als n Einheiten hat; so gilt, wie von selbst klar ist, derselbe Ausdruck für X_n nur mit alternirenden Zeichen der Glieder.

Zusatz 2. Anwendung der Formel für S_n.

Beispiel 1. Die Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen 1, 4, 9, 16,... n^2 zu summiren.

Hier ist $a = 1$; $\triangle a = 3$; $\triangle^2 a = 2$ und $\triangle^3 a = 0$, daher

$$S_n = n + \frac{n.n-1}{1.2} \cdot 3 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \cdot 2 = \tfrac{1}{6} n(2n^2+3n+1)$$
$$= \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$ Vgl. allg. Größenl. §. 126. Anm.

Beispiel 2. Die Reihe der Würfel der natürlichen Zahlen 1, 8, 27,... n^3 zu summiren.

Hier ist $a = 1$; $\triangle a = 7$; $\triangle^2 a = 12$; $\triangle^3 a = 6$ und $\triangle^4 a = 0$; daher

$$S_n = n + \frac{n.n-1}{2} \cdot 7 + \frac{n.n-1.n-2}{2.3} \cdot 12 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4} \cdot 6$$
$$= \tfrac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2) = \tfrac{1}{4} n^2(n+1)^2.$$ Vgl. allg. Gr. §. 129. Zus.

Beispiel 3. Die Anzahl der Kugeln zu bestimmen, welche in einem länglichviereckigen, aus n Schichten bestehenden, Haufen geordnet sind, dessen jede Schichte demnach, die oberste oder erste ausgenommen, die Figur eines Rechteckes (Oblong's) hat.

Stellt man sich vor, daß in der ersten Schichte z. B. 2 Kugeln in einer Reihe liegen; so wird die zweite Schichte aus

6 Kugeln in 2 Reihen (der Länge nach) bestehen, indem jede jener 2 Kugeln zwar nur auf 4 Kugeln ruhen, aber doch nur 2 verschiedene Kugeln der Unterlage berühren kann. Eben darum wird die dritte Schichte nicht 4. 6, sondern nur 12 Kugeln in 3 Reihen (der Länge nach) fassen; u. s. w. Allgemein: es liegen in der obersten Schichte (in einer Reihe) a; in der zweiten 2(a+1); in der dritten 3(a+2); in der vierten Schichte 4(a+3) Kugeln, ... d. h. diese Zahlen bilden die Reihe a, 2a+2, 3a+6, 4a+12, ... d. i. eine arithm. Reihe der 2ten Ordnung, für welche $\triangle a = a+2$ und $\triangle^2 a = 2$ ist. Daher die Summe der Kugeln oder

$$S_n = na + \frac{n.n-1}{2}.(a+2) + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}.2.$$

Eben so leicht findet man a_n sowohl, als S_n für die figurirten oder Polygonal- und Pyramidalzahlen überhaupt (vergl. allg. Größenl. §§. 127. 128.) Denn da erstere unter Reihen der 2ten und letztere der 3ten Ordnung bilden; so darf man im ersten Falle in dem allgemeinen Ausdrucke für a_n und S_n nur die bestimmten Werthe von $a = 1$ und von $\triangle a$, $\triangle^2 a$ substituiren. So ist für die 5eckigen Zahlen 1, 5, 12, 22, 35, ...

$$a_n = \frac{3n^2-n}{2}, \text{ und } S_n = \tfrac{1}{6}n(n+1)(3+3(n-1)),$$

und für die xeckigen überhaupt

$$a_n = \frac{(x-2)n^2-(x-4)n}{2}, \text{ und } S_n = \tfrac{1}{6}n(n+1)(3+(x-2)(n-1)).$$

Im zweiten Falle ist a_n, was im ersten S_n ist, indem die Pyramidalzahlen nur Summen der Polygonalzahlen sind; z. B. die 3eckigen Pyramidalzahlen 1, 4, 10, 20, 35, ... sind Summen der Trigonalzahlen 1, 5, 6, 10, 15, ... Um aber S_n zu finden, bemerkt man leicht, daß die Werthe von $\triangle a$, $\triangle^2 a$, $\triangle^3 a$ einem gewissen Gesetze folgen. Es ist nämlich

	$\triangle a$;	$\triangle^2 a$;	$\triangle^3 a$
für die 3eck. Pyr.zahlen . . .	3 ;	3 ;	1.
" " 4eck. " " "	4 ;	5 ;	2.
" " 5eck. " " "	5 ;	7 ;	3.
" " 6eck. " " "	6 ;	9 ;	4.
also für die xeck. " " "	x ;	2x—3;	x—2.

Daher, da auch hier $a=1$,

$$S_n = n + \frac{xn(n-1)}{2} + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}.(2x+3) + \frac{n.n-1....}{2.3.4}.(x-2),$$

$$= \frac{n.n+1.n+2}{2.3.4}(4+(x-2)(n-1)).$$

Anmerkung 1. Jak. Bernoulli drückte die Summen der geraden Potenzen von 1 bis x (nämlich 1^{2n}, 2^{2n},... x^{2n}) durch eine gleiche Größe aus, deren Glieder die natürlichen Potenzen von x, von x^{2n+1} an bis zu x hinab, mit gewissen Coefficienten sind. Die Coefficienten dieses letzten Gliedes bekamen den Namen „Bernoullische Zahlen." So gilt für die Summe der Quadrate von 1 bis x die Größe $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$ und $\frac{1}{6}$ ist die erste Bernoullische Zahl; die Summe der Biquadrate ist = einer Größe, deren erstes Glied ist $\frac{1}{5}x^5$ und deren letztes $=-\frac{1}{30}x$; daher $\frac{1}{30}$ die zweite Bern. Zahl (vgl. Euler's 2. Th. des „Calc. differ." §. 123.). Anwendungen dieser Zahlen gehen, wie Euler zeigt, auf Vereinfachung verschiedener Reihen, besonders ihrer Summirungen, wie schon aus den vorigen Beispielen, vorzüglich aber rücksichtlich der höheren Potenzen, erhellt.

Anmerkung 2. Wie die Potenzen der natürlichen Zahlen, so bilden überhaupt die Potenzen, deren Wurzeln in einer arithm. Reihe fortgehen, eine arithm. Reihe höherer Ordnung, weil man bei Erzeugung der Differenzreihen auf eine konstante Differenz kommt. Solche Reihen sind z. B.

$$(a+b)^2,\ (a+2b)^2,\ (a+3b)^2,\ \ldots\ (a+nb)^2;$$

$$(a+b)^3,\ (a+2b)^3,\ (a+3b)^3,\ \ldots\ (a+nb)^3;\ \text{u. s. w.}$$

Für jene ist nämlich $2b^2$ in der zweiten, und für diese Reihe ist $6b^3$ in der dritten Differenzreihe die konstante Differenz.

Solche Reihen der 2ten, 3ten Ordnung erhält man auch durch die ähnlich gebildeten Produkte verschiedener Faktoren; z. B.

$$(a+b)(c+d),\ (a+2b)(c+2d),\ (a+3b)(c+3d);\ \ldots$$

$$(a+b)(c+d)(e+f),\ (a+2b)(c+2d)(e+2f);\ \ldots$$

Anmerkung 5. Reihen, wie $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ oder allgemein

$$\frac{c}{a}, \frac{c}{2a-b}, \frac{c}{3a-2b}, \ldots \frac{c}{na-(n-1)b}, \frac{c}{(n+1)a-nb}, \ldots$$

in welchen die Glieder Brüche mit konstantem Zähler sind, und die Renner eine arithm. Reihe der 1sten Ordnung bilden, heißen reciproke arithm. Reihen.*)

Das allgemeine Glied L für den Index n ist $\frac{c}{na-(n-1)b}$, daher das Anfangsglied (für den Zeiger $n=0$) $=\frac{c}{b}$ und das unmittelbar folgende (für den Zeiger $n=1$) $=\frac{c}{a}$. Setzt man aber $c=ab$, daher $L=\frac{ab}{na-(n-1)b}$; so ist das Anfangsglied $=a$ und das folgende $=b$. Sind nun

$$L=\frac{ab}{na-(n-1)b}, \quad M=\frac{ab}{(n+1)a-nb} \text{ und } N=\frac{ab}{(n+2)a-(n+1)b}$$

3 unmittelbar auf einander folgende Glieder einer reciproken arithmetischen Reihe; so hat man

$$L-M=\frac{(a-b)ab}{(an-(n-1)b)((n+1)a-nb)}=\frac{a-b}{ab}\cdot\frac{(ab)^2}{(an-(n-1)b)((n+1)a-nb}$$

$$=\frac{a-b}{ab}\cdot LM.$$

Eben so findet man $M-N=\frac{a-b}{ab}\cdot MN$. Folglich ist

$a-b : L-M = ab : LM$ und $a-b : M-N = ab : MN$,

und aus diesen Proportionen (nach allgem. Größenl. §. 114. Zus. 2.)

$L-M : M-N = L : N$; z. B. $\frac{1}{1}-\frac{1}{2} : \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ (oder $=4:2=2:1$). Weil ferner $(L-M)M = (M-N)L$ oder

*) Daher auch die Benennung „reciproke Potenzen" der natürlichen Zahlen, wie $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots$ oder „reciproke vieleckige Zahlen", wie $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \ldots$ Vergl. allg. Größenl. §. 127.

$(2L-M)N = ML$, oder auch $(2N-M)L = MN$ ist; so ist auch

$2L-M : M = L : N$, oder auch $2N-M : M = N : L$.

Hieraus erhält man (addendo)

$L+N : N = 2L : M$, und $N+L : L = 2N : M$.*)

B.

Wiederkehrende Reihen.

§. 70. Erklärung. Eine Reihe, deren jedes folgende Glied dadurch erzeugt wird, daß man eine gewisse Anzahl Vorderglieder mit bestimmten + oder — Größen immer in derselben Aufeinanderfolge Letzterer multiplizirt, heißt wiederkehrende oder rücklaufende Reihe (ser. revertens s. recurrens). Die Folge jener bestimmten Faktoren mit ihren Zeichen heißt die Verhältniß- oder Beziehungs-Skale (scala relationis), oder jene Faktoren sind die Glieder dieser Skale, und ihre Anzahl zeigt an, von der wievielsten Ordnung die wieder-

*) Proportionen, wie die obige: $L-M : M-N = L : N$, oder wie diese: $a-b : b-c = a : a$ zwischen 3 Größen a, b, c heißen stetige harmonische Proportionen; eine discrete zwischen den 4 Größen a, b, c, d ist $a-b : c-d = a : d$. Harmonisch heißen sie, weil die numerischen Werthe gewisser Töne, welche Werthe sich wie die Längen der Saiten (bei gleichen Umständen) verhalten, in solchen Proportionen stehen. So sind die Werthe des Haupttons, der Quarte und großen Sexte 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, oder 20, 15, 12 und es ist

$$20-15 : 15-12 = 20 : 12 \ (= 5 : 3).$$

Die reciproke arithmetische Reihe

$$1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \ldots$$

bildet zugleich eine harmonische Progression, indem jede 3, unmittelbar auf einander folgende Glieder eine stetige harmon. Proportion bilden. Die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ist die natürliche harm. Progression.

kehrende Reihe sey, so wie sie auch die Anzahl der Vorderglieder bestimmt, die bei gegebener Skale entweder willkührlich angenommen, oder den Bedingungen einer Aufgabe gemäß ausgedrückt werden.

Beispiele. 1. Die geometrische Progression ist eine rücklaufende Reihe der 1sten Ordnung; die Verhältnißskale hat ein Glied, den + oder — Exponenten, und das einzige Vorderglied kann beliebig gewählt werden.

2. Für die Verhältniß-Skale $(-1, +5)$ hat man die rücklaufende Reihe

entweder 1, 2, 5, 13, 34, 89, ... oder 1, 3, 8, 21, 55, 144, ...

je nachdem man 1, 2 oder 1, 3 zu Vorderglieder wählt. (Vergl. auch allgem. Größenl. S. 297. Anm.)

3. Da bei den arithmetischen Reihen die Binomialcoefficienten der Potenz $(a-b)$ die Glieder der Relations-Skale sind (§. 68); so gehören auch diese Reihen zu den wiederkehrenden. Z. B. für die Skale $(+2, -1)$ hat man eine der 2ten, für $(+3, -3, +1)$ der dritten und allgemein für die Skale

$$(+m, -\frac{m.m-1}{2}, +\frac{m.m-1.m-2}{2.3} - \ldots \pm\frac{m.m-1}{2}, \mp m, \pm 1)$$

eine arithm. rücklaufende Reihe der mten Ordnung.

§. 71. Entstehung der wiederkehrenden Reihen.

Diese Reihen nehmen ihren Ursprung aus einem Bruche, dessen Zähler ein rationaler Ausdruck (rationale Funktion) einer veränderlichen Größe x, und dessen Nenner ein ähnlicher Ausdruck ist, in welchem aber die höchste Potenz von x wenigstens um einen Grad höher ist, als im Zähler. Jener Bruch selbst heißt der erzeugende Bruch.

Es ist z. B. (nach allgem. Größenl. S. 65. Zus. 3.)

aus $\frac{x^0}{1-2x}$ oder $\frac{1}{1-2x}$ der Quotient $1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+\ldots$

eine solche rücklaufende Reihe der 1sten Ordnung; das einzige (hier bestimmte) Vorderglied ist $= 1$ oder $= x^0$ und das einzige Glied der Relationsskale $= +2x$.

Da man das Gesetz des Fortganges einer solchen Reihe hinsichtlich der variablen Größe kennt, folglich der Quotient aus dergleichen Divisionen durch

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 x \ldots$$

ausgedrückt werden kann; so fragt es sich eigentlich nur nach dem Gesetze, oder der Relations-Skale der Coefficienten A, B, C, ... jener Potenzen von x.

§. 72. **Aufgabe.** Es sey der erzeugende Bruch

$$(1) \ldots \frac{a+bx}{1-\alpha x+\beta x^2}, \text{ oder } (2) \ldots \frac{a+bx+cx^2}{1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3}$$

gegeben; man soll die Beziehungs-Skale für die Coefficienten der Glieder der aus jenen Brüchen entstehenden, rücklaufenden Reihen finden.

Auflösung mit Beweis. Man setze sowohl (1), als (2) $= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ und multiplizire diese Reihe mit dem Nenner des erzeugenden Bruches; so hat man für (1)

$$a+bx = A+B \left| \begin{matrix} x+C \\ -A\alpha \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} x^2+D \\ -B\alpha \\ +A\beta \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} x^3+E \\ -C\alpha \\ +B\beta \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} x^4+\ldots. \\ -D\alpha \\ +C\beta \end{matrix} \right|$$

Es ist also, wenn diese Gleichung gelten soll, $A = a$; $B - A\alpha = b$; $C - B\alpha + A\beta = 0$, u. s. w.; d. i. man hat

1) $A = a$; 2) $B = A\alpha + b$; 3) $C = B\alpha - A\beta$; 4) $D = C\alpha - B\beta$;
5) $E = D\alpha - C\beta, \ldots$ Also sind die Glieder der fraglichen Skale $+\alpha$, $-\beta$.

Für (2) hat man eben so:

$$a+bx+cx^2 = A+B \left| \begin{matrix} x+C \\ -A\alpha \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} x^2+D \\ -B\alpha \\ +A\beta \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} x^3+E \\ -C\alpha \\ +B\beta \\ -A\gamma \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} x^4+\ldots. \\ -D\alpha \\ +C\beta \\ -B\gamma \end{matrix} \right|$$

Hieraus findet man, wie vorhin,

1) $A = a$; 2) $B = A\alpha + b$; 3) $C = B\alpha - A\beta + c$;
4) $D = C\alpha - B\beta + A\gamma$; 5) $E = D\alpha - C\beta + B\gamma$; ....

folglich die Glieder der Verhältniß-Skale $+\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$, nach welcher Skale denn die Coefficienten der Glieder der wiederkehrenden Reihe in ihrer Folge auseinander (durch Recursion) gebildet werden können.

§. 73. **Aufgabe.** Eben diese Coefficienten unabhängig von einander, demnach auch jedes Glied oder das allgemeine Glied der recurrirenden Reihe unmittelbar zu finden.

Auflösung mit Beweis. Man findet überhaupt das Gesuchte mittelst der Wurzeln der Gleichung, die man erhält, wenn man den Nenner des erzeugenden Bruches $=0$ setzt.

1. Es sey dieser Bruch

$$\frac{a+bx}{1-\alpha x+\beta x^2}=Z=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots+Nx^n+\ldots,$$

wo Nx^n das allgemeine Glied der mit Z bezeichneten rückl. Reihe und N der Coefficient dieses Gliedes ist.

Wenn ferner von

$$1-\alpha x+\beta x^2=0, \text{ oder von } x^2-\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{1}{\beta}=0$$

p und q oder $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ die zwei verschiedenen und rationalen Wurzeln sind; so ist vermöge §. 56. 11. und 5.

1) $\frac{1}{\beta}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{q}$ oder $\beta=pq$; 2) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$; 3) $x^2-\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{1}{\beta}$
$=\left(x-\frac{1}{p}\right)\left(x-\frac{1}{q}\right)=0$, oder, weil auch (durch Versetzung)
$(1-px)(1-qx)=0$ ist, die erste Seite der Gleichung mit β und die zweite mit $pq\,(=\beta)$ multiplizirt,

$$1-\alpha x+\beta x^2=(1-px)(1-qx)=1-(p+q)x+pqx^2=0.$$

Man stelle sich nun Z in die partiellen Brüche

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-px}\,(=\mathfrak{A}+\mathfrak{A}px+\mathfrak{A}p^2x^2+\ldots) \text{ und } \frac{\mathfrak{B}}{1-qx}\,(=\mathfrak{B}+\mathfrak{B}qx+\ldots)$$

zerlegt vor; so hat man

$$Z \text{ oder } A+Bx+Cx^2+\ldots+Nx^n+\ldots$$
$$=\mathfrak{A}(1+px+p^2x^2+\ldots+p^nx^n+\ldots)+\mathfrak{B}(1+qx+\ldots+q^nx^n+\ldots),$$

folglich, verglichen, $A=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$; $B=\mathfrak{A}p+\mathfrak{B}q$; $C=\mathfrak{A}p^2+Bq^2,\ldots$ $N=\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n$.

Es sind also alle Coefficienten A, B,... der Glieder von Z zunächst durch die Wurzeln p, q obiger Gleichung und durch

die Größen A, B ausgenommen, so daß es nur darauf ankommt, sowohl diese Größen, als die Wurzeln p, q selbst, zu bestimmen; was so geschieht:

Aus $x^2-\frac{\alpha}{\beta}x=-\frac{1}{\beta}$ hat man $x=\frac{\alpha\pm\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2\beta}$,

also $\frac{1}{p}=\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2\beta}$ und $\frac{1}{q}=\frac{\alpha-\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2\beta}$, oder,

$\frac{1}{p}$ mit $pq(=\beta)$ und die andere Seite der Gleichung mit β multiplizirt, findet man

$$q=\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2} \text{ und eben so: } p=\frac{\alpha-\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2},$$

wo denn $\alpha^2>4\beta$ seyn muß, indem p, q mögliche Wurzeln seyn sollen.

Ferner vermöge der Voraussetzung ist

$$Z \text{ oder } \frac{a+bx}{1-\alpha x+\beta x^2}=\frac{A}{1-px}+\frac{B}{1-qx}=\frac{(A+B)+x(-Aq-Bp)}{1-(p+q)x+pqx^2}.$$

Daher muß, wie in den Nennern $\alpha=p+q$ und $\beta=pq$ ist, auch in den Zählern $a=A+B$ und $b=-Aq-Bp$ seyn. Hieraus hat man $A=a-B=\frac{b+Bp}{-q}$, folglich

$B=-\frac{aq+b}{p-q}$. Eben so wird $A=\frac{ap+b}{p-q}$

gefunden, indem man aus denselben Gleichungen B eliminirt.

2. Es sey der erzeugende Bruch

$$\frac{a+bx+cx^2}{1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3}=Z=A+Bx+Cx^2+\ldots Nx^n+\ldots$$

Sind wieder von

$$1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3=0 \text{ oder } x^3-\frac{\beta}{\gamma}x^2+\frac{\alpha}{\gamma}x-\frac{1}{\gamma}=0$$

p, q, r oder $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$ die 3 möglichen und verschiedenen Wurzeln; so hat man

$$x^3-\frac{\beta}{\gamma}x^2+\frac{\alpha}{\gamma}x-\frac{1}{\gamma}=\left(x-\frac{1}{p}\right)\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(x-\frac{1}{r}\right),$$

oder, $\left(\text{da nach §. 56. 11. } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\varrho\sigma\tau} \text{ oder } \gamma = \varrho\sigma\tau\right)$ die erste Seite der Gleichung mit γ und die andere mit $\varrho\sigma\tau$ multiplizirt und die Zeichen geändert,

$$1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3=(1-\varrho x)(1-\sigma x)(1-\tau x),$$

Ferner Z wieder in $\frac{\mathfrak{A}}{1-\varrho x}, \frac{\mathfrak{B}}{1-\sigma x}, \frac{\mathfrak{C}}{1-\tau x}$ zerlegt, ist

$$Z=\mathfrak{A}(1+\varrho x+\varrho^2x^2+\ldots+\varrho^n x^n)+\mathfrak{B}(1+\sigma x+\sigma x^2+\ldots+\sigma^n x^n)$$
$$+\mathfrak{C}(1+\tau x+\ldots+\tau^n x^n+\ldots)=A+Bx+Cx^2+\ldots+Nx^n+\ldots$$

folglich der Coefficient des allgemeinen Gliedes

$$N=\mathfrak{A}\varrho^n+\mathfrak{B}\sigma^n+\mathfrak{C}\tau^n.$$

Endlich ist

$$Z \text{ oder } \frac{a+bx+cx^2}{1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3}=\frac{\mathfrak{A}}{1-\varrho x}+\frac{\mathfrak{B}}{1-\sigma x}+\frac{\mathfrak{C}}{1-\tau x}$$
$$=\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+x[\mathfrak{A}(-\sigma-\tau)+\mathfrak{B}(-\varrho-\tau)+\mathfrak{C}(-\varrho-\sigma)]+x^2(\mathfrak{A}\sigma\tau+\mathfrak{B}\varrho\tau+\mathfrak{C}\varrho\sigma)}{1-(\varrho+\sigma+\tau)x+(\varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau)x^2-\varrho\sigma\tau x^3}$$

Daher (wieder Zähler und Nenner verglichen) muß

$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=a$; $\mathfrak{A}(-\sigma-\tau)+\mathfrak{B}(-\varrho-\tau)+\mathfrak{C}(-\varrho-\sigma)=b$ und

$\mathfrak{A}\sigma\tau+\mathfrak{B}\varrho\tau+\mathfrak{C}\varrho\sigma=c$ seyn. Aus diesen 3 Gleichungen wird auf ähnliche Weise, wie vorhin unter 1., entwickelt

1) $\mathfrak{A}=\frac{a\varrho^2+b\varrho+c}{(\varrho-\sigma)(\varrho-\tau)}$; 2) $\mathfrak{B}=\frac{a\sigma^2+b\sigma+c}{(\sigma-\varrho)(\sigma-\tau)}$; 3) $\mathfrak{C}=\frac{a\tau^2+b\tau+c}{(\tau-\sigma)(\tau-\varrho)}$.

Das allgemeine Verfahren ist also: Wenn der erzeugende Bruch Z ein Produkt aus n möglichen und ungleichen Faktoren, wie $1-\varrho x$, $1-\sigma x$,... ist; so wird Z in n Theilbrüche, wie $\frac{\mathfrak{A}}{1-\varrho}, \frac{\mathfrak{B}}{1-\sigma}, \ldots$ zerlegt, und jeder dieser Brüche gibt zum Coefficienten N des allgemeinen Gliedes ein Glied von der Form $\mathfrak{A}\varrho^n$; $\mathfrak{B}\sigma^n, \ldots$

Zusatz 1. Sind unter jenen n möglichen Faktoren 2 oder 3 gleiche, wie $1-\varrho x$; so muß man, damit obige Vergleichung des aus den partiellen Brüchen durch Reduction auf einerlei Nenner erhaltenen Bruches mit dem erzeugenden Z möglich

werde, wegen zwei und drei gleicher Faktoren die Theilbrüche resp.

$$\frac{A}{(1-px)^2}+\frac{B}{1-px} \text{ und } \frac{A}{(1-px)^3}+\frac{B}{(1-px)^2}+\frac{C}{1-px}$$

setzen. Weil nun im ersten Falle die Entwickelung von $\frac{A}{(1-px)^2}$ oder $A(1-px)^{-2}$ gibt

$$A(1+2px+3p^2x^2+\ldots+(n+1)p^nx^n+\ldots),$$

und im zweiten Falle die Entwickelung von $A(1-px)^{-3}$ gibt

$$A(1+3px+6p^2x^2+\ldots+\frac{n+1.n+2}{1.2}p^nx^n+\ldots);$$

so erhält der Coefficient N des allgemeinen Gliedes wegen des ersten Theilbruches im ersten Falle das Glied $(n+1)Ap^n$ und im zweiten das Glied $\frac{n+1.n+2}{2}Ap^n$. U. s. w.

Auch kann man statt der partiellen Brüche im ersten Falle setzen

$$\frac{A+Bx}{(1-px)^2} \text{ und im zweiten Falle } \frac{A+Bx+Cx^2}{(1-px)^3}.$$

Die Entwickelung des ersten Bruches gibt

$A(1+2px+\ldots+(n+1)p^nx^n+B(x+2px^2+\ldots+np^{n-1}x^n))$,

folglich bekommt N wegen jenes Bruches das Glied $(n+1)Ap^n+nBp^{n-1}$.

Beispiele. 1. (nach §. 73. 1.). Die aus $\frac{1-x}{1-5x+6x^2}$ entspringende Reihe ist $1+4x+14x^2+64x^3+146x^4+454x^5+\ldots$ Man sucht das allgemeine Glied (Nx^n) und die Beziehungs-Skale.

Aus $1-5x+6x^2=0$ findet man leicht unmittelbar $x=\frac{5}{12}\pm\sqrt{\frac{1}{144}}$, d. i. $x=\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}=\frac{1}{p}$ und $x=\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}=\frac{1}{q}$, daher $p=2$ und $q=3$; ferner $1-5x+6x^2=(1-2x)(1-3x)$, und weil hier $\alpha=5$ und $\beta=6$, so ist die Beziehungs-Skale $=(+\alpha,-\beta)=(+5,-6)$.

Weil endlich hier im Zähler des erzeugenden Bruches $a=1$ und $b=-1$, demnach $\mathfrak{A}=\frac{ap+b}{p-q}=-1$ und $\mathfrak{B}=-\frac{aq+b}{p-q}$ $=+2$ ist; so hat man

$$Nx^n=(\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n)x^n=(-2^n+2.3^n)x^n.$$

So ist z. B. das 7te Glied obiger rücklaufender Reihe $=(-2^6+2.3^6)x^6=1394x^6$.

2. (nach dem vorigen Zus.). Die rücklaufende Reihe aus $\frac{1-5x+8x^2}{1-8x+21x^2-18x^3}$ hat nach §. 73. 2. die Verhältniß-Skala ($+\alpha=+8$; $-\beta=-21$, $+\gamma=+18$). Die 3 ersten Glieder jener Reihe, durch Division entwickelt, sind $1+3x+11x^2$; daher das 1ste Glied mit $+18$, das 2te mit -21 und das 3te mit $+8$ multiplizirt, hat man durch Addition das 4te Glied $=+43x^3$; u. s. w.

Um aber N, und eben dadurch die Coefficienten unabhängig von einander zu finden, sucht man aus

$$1-8x+21x^2-18x^3=0, \text{ oder } x^3-\frac{21}{18}x^2+\frac{8}{18}x-\frac{1}{18}=0$$

die Wurzeln. Da $\frac{1}{18}=\frac{1}{2.3.3}$ ist; so findet man durch Versuch, daß $\frac{1}{2}$ eine wahre Wurzel der Gleichung und jede der 2 andern Wurzeln $=\frac{1}{3}$, folglich $p=3$, $q=2$ oder $p^2q=18$ und $(1-3x)^2(1-2x)=0$ sey. Es ist also der gegebene, erzeugende Bruch in die 3 partiellen Brüche $\frac{\mathfrak{A}}{(1-3x)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{1-3x}+\frac{\mathfrak{C}}{1-2x}$ zu zerlegen. Diese Brüche auf einerlei Nenner gebracht, ist der Zähler $=$

$$\mathfrak{A}(1-2x)+\mathfrak{B}(1-3x)(1-2x)+\mathfrak{C}(1-3x)^2=1-5x+8x^2,$$

demnach $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=1$; $-2\mathfrak{A}-5\mathfrak{B}-6\mathfrak{C}=-5$ und $6\mathfrak{B}+9\mathfrak{C}=8$.

Aus diesen 3 Gleichungen findet man

$$\mathfrak{A}=\frac{2}{3};\ \mathfrak{B}=-\frac{5}{3};\ \mathfrak{C}=2;\ \text{folglich } N=(n+1)\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}p^n+\mathfrak{C}q^n$$

$$=\frac{2}{3}(n+1)3^n-\frac{5}{3}.3^n+2.2^n=(2n-3).3^{n-1}+2^{n+1}.$$

So ist z. B. der Coefficient des 5ten Gliedes, das den Faktor x^4 hat, $= 5.3^3 + 2^5 = 135 + 32 = 167$.

Zusatz 2. Durch ein ähnliches (im §. 73. erörtertes) Verfahren kann auch der Coefficient N gefunden werden, wenn die Wurzeln der Gleichung imaginär sind.

Es gelte das im §. 75. unter 1. Gesagte, und die Wurzeln p, q der Gleichung $x^2 - \frac{\alpha}{\beta}x + \frac{1}{\beta} = 0$ seyen wegen $\alpha^2 < 4\beta$ nun imaginär.

Setzt man den ächten Bruch $\frac{\alpha^2}{4\beta} = \cos\varphi^2$ und $\beta = f^2$; so wird $\alpha = 2f.\cos\varphi$ und $1 - \alpha x + \beta x^2 = 1 - 2f.\cos\varphi.x + f^2x^2$ = (wie oben allgemein) $(1-px)(1-qx)$. Die Vergleichung des letztern Produktes $= 1 - (p+q)x + pqx^2$ mit der ihm gleichen Größe gibt

$$p + q = 2f.\cos\varphi \text{ und } pq = f^2.$$

Dieselben Gleichungen gelten, wenn man in unserem Falle, wo p, q imaginär sind,

$$p = f.\cos\varphi + f.\sin\varphi\sqrt{-1} \text{ und } q = f.\cos\varphi - f.\sin\varphi\sqrt{-1}$$

setzt, indem $\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$ ist. Man hat nun nur noch die Werthe der Faktoren in $N = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n$ zu bestimmen.

Vermöge §. 24. nr. 195. und 196. ist

1) $p^n = f^n(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n = f^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1})$;

2) $q^n = f^n(\cos n\varphi - \sin n\varphi\sqrt{-1})$; folglich

3) $N = (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\,f^n.\cos n\varphi + (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,f^n.\sin n\varphi\sqrt{-1}$.

Aber oben fanden wir

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B} = a;\ \mathfrak{B} = -\frac{aq+b}{p-q} \text{ und } \mathfrak{A} = \frac{ap+b}{p-q}, \text{ demnach}$$

$$\mathfrak{A}-\mathfrak{B} = \frac{a(p+q)+2b}{p-q} = (\text{durch Subst.})\ \frac{af.\cos\varphi + b}{f.\sin\varphi\sqrt{-1}}.$$

Hieraus ist auch

$$4)\ N = af^n \cdot \cos n\varphi + \frac{af \cdot \cos\varphi + b}{f \cdot \sin\varphi} \cdot f^n \cdot \sin n\varphi$$

$$= \frac{af^n \cdot \cos n\varphi \cdot \sin\varphi}{\sin\varphi} + \frac{af^n \cdot \cos\varphi \cdot \sin n\varphi}{\sin\varphi} + \frac{b \cdot f^n}{f \sin\varphi} \cdot \sin n\varphi$$

$$= \frac{f^n}{\sin\varphi}\left[a(\cos n\varphi \cdot \sin\varphi + \cos\varphi \cdot \sin n\varphi) + \frac{b}{f} \cdot \sin n\varphi\right]$$

$$= \frac{f^n}{\sin\varphi}\left(a \cdot \sin(n+1)\varphi + \frac{b}{f} \cdot \sin n\varphi\right)$$ (§. 18. nr. 65.).

Wobei denn $\frac{\alpha^2}{4\beta} = \cos\varphi^2$ oder $\frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}} = \cos\varphi$, also φ bekannt ist.

Beispiel. Sey $\frac{1+2x}{1-x+x^2}$ der erzeugende Bruch.

Hier ist $a = \alpha = \beta = f = 1$; $b = 2$; $\cos\varphi = \frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2}$, folglich (wegen $\sin 30^0 = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}$) $\varphi = 60^0 = \frac{1}{3}\pi$, und

$$N = \frac{1}{\sin\frac{1}{3}\pi}\left(\sin\tfrac{1}{3}(n+1)\pi + 2 \cdot \sin\tfrac{1}{3}n\pi\right)$$

bekannt, da $\sin\pi = \sin 2\pi = 0$; $\sin\frac{1}{3}\pi = \sin\frac{1}{3}2\pi = +\sin 60^0$; $\sin\frac{1}{3}4\pi = \sin\frac{1}{3}5\pi = -\sin 60^0$, ... ist.

Z. B. für $n = 5$ ist $N = \frac{1}{\sin 60^0}(-\sin 60^0 + 0) = -1 =$ dem Coefficienten desjenigen Gliedes der aus obigem Bruche entstehenden wiederkehrenden Reihe, das den Faktor x^5 hat. Uebrigens ist die Beziehungs-Skale $(+1, -1)$ in unserem Falle, daher die Reihe

$$1 + 3x + 2x^2 - x^3 - 3x^4 - 2x^5 + x^6 + \ldots$$

§. 74. Aufgabe. Wenn nebst der Verhältniß-Skale so viel erste sowohl, als letzte Glieder einer rücklaufenden Reihe $A + B + C + \ldots + P + Q + R + \ldots$ gegeben sind, als wie viel Glieder jene Skale hat; die Reihe zu summiren.

Auflösung mit Beweis. Für 2 Glieder $(+\alpha, -\beta)$ und für 3 Glieder $(+\alpha, -\beta, +\gamma)$ der Skale hat man nach §. 72 die Schemate:

1.	2.
$A = A$	$A = A$
$B = B$	$B = B$
$C = B\alpha - A\beta$	$C = C$
$D = C\alpha - B\beta$	$D = C\alpha - B\beta + A\gamma$
$E = D\alpha - C\beta$	$E = D\alpha - C\beta + B\gamma$
. . . . .	. . . . .
$Q = P\alpha - N\beta$	$P = N\alpha - M\beta + H\gamma$
$R = Q\alpha - P\beta$	$Q = P\alpha - N\beta + M\gamma$
	$R = Q\alpha - P\beta + N\gamma.$

Aus dem Schema 1. hat man, die Summe aller Glieder der Reihe $= S$ gesetzt, die Gleichung

$$S = A + B + (S - A - R)\alpha - (S - Q - R)\beta$$

und hieraus die gesuchte Summe

$$S = \frac{A + B - (A + R)\alpha + (Q + R)\beta}{1 - \alpha + \beta}.$$

Aus dem Schema 2. ist

$$S = A + B + C + (S - A - B - R)\alpha - (S - A - Q - R)\beta + (S - P - Q - R)\gamma;$$

daher

$$S = \frac{A + B + C - (A + B + R)\alpha + (A + Q + R)\beta - (P + Q + R)\gamma}{1 - \alpha + \beta - \gamma}.$$

Die Entwickelung beider Summe-Formeln, in welchen nun $\alpha, \beta, \ldots$ mit $+$ genommen sind, zeigt zugleich die Allgemeinheit des Verfahrens unter den gegebenen Bedingungen.

Beispiele. 1. Sey die Relations-Skale $(+3, -1)$; die 2 ersten Glieder der rücklaufenden Reihe seyen 1, 5 und die 2 letzten 377, 987; so ist wegen $\alpha = 3$, $\beta = 1$

$$S = \frac{4 - (1 + 987) \cdot 3 + (377 + 987) \cdot 1}{1 - 3 + 1} = \frac{-1596}{-1} = 1596.$$

2. Wenn die Skale $(+3, -2, +1)$; die 3 ersten Glieder der Reihe 1, 5, 11 und die drei letzten 8706, 20239, 47050 sind; so ist

$$S = \frac{17 - 141168 + 134580 - 75995}{1 - 3 + 2 - 1} = 82566.$$

Zusatz 1. Bei der Summation wiederkehrender Reihen, die in's Unendliche fortgehen, fällt die Betrachtung der

der letzten Glieder weg; weßwegen für obige Fälle die Formeln sind:

$$S = \frac{A+B-A\alpha}{1-\alpha+\beta}, \text{ und } S = \frac{A+B+C-(A+B)\alpha+A\beta}{1-\alpha+\beta-\gamma}.$$

Zusatz 2. Will man daher für eine gegebene rücklaufende Reihe, z. B. 1, 4, 14, 46,... die in's Unendliche fortgeht, und für welche die Beziehungs-Skale (+5, −6) ist, den erzeugenden Bruch darstellen; so multiplizirt man jene Glieder der Reihe und der Skale mit den gehörigen Potenzen von x und verfährt dann nach der entsprechenden Summenformel (Zus. 1.). Man hat nämlich auf diese Weise die Reihe $1, 4x, 14x^2, \ldots$ ferner $\alpha = 5x$ und $-\beta = -6x^2$, daher

$$S = \frac{1+4x-1.5x}{1-5x+6x^2} = \frac{1-x}{1-5x+6x^2} = \text{dem Urbruche.}$$

C.

Anwendung der wiederkehrenden Reihen auf die Gleichungen.

§. 75. Aufgabe. I. Die kleinste, II. die größte Wurzel der Gleichung

$$1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3+-\ldots=0$$

durch Näherung zu finden, wenn die Wurzeln $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}, \ldots$ möglich und verschieden sind.

Auflösung v. I. mit Beweis. Wenn von der aus $\frac{1+bx+\ldots}{1-\alpha x+\beta x^2\ldots}$ entspringenden rücklaufenden Reihe durch Nx^n das allgemeine und Px^{n+1} das unmittelbar darauf folgende Glied vorgestellt wird; so ist nach §. 73. 1. 2. der Coefficient

$$N = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n + \ldots$$

$$\text{und } P = \mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}q^{n+1} + \mathfrak{C}r^{n+1} + \ldots$$

Für $p > q > r \ldots$ ist $\frac{1}{p}$ die kleinste Wurzel obiger Gleichung, und p^n um so größer gegen $q^n, r^n, \ldots$ je größer n ist.

Setzt man daher $n = \infty$; so kann man in den Werthen von N und P die folgenden Glieder gegen das erste verschwindend, demnach $\frac{N}{P}\left(= \frac{\mathfrak{A}p^n}{\mathfrak{A}p^{n+1}} = \frac{1}{p}\right)$ als kleinste Wurzel betrachten, d. i. der Quotient $\frac{N}{P}$ aus 2 unmittelbar auf einander folgenden Gliedern der rücklaufenden Reihe nähert sich dem wahren Werthe der gesuchten kleinsten Wurzel um so mehr, je weiter gegen die Rechte hin jene Glieder genommen werden.

Beispiel. Von $1 - 6x + 8x^3 = 0$ werde die kleinste Wurzel gesucht.

Der erzeugende Bruch ist $\frac{a + bx + cx^2}{1 - 6x^2 + 8x^3}$; die Verhältniß-Skale für die Reihe, in welche dieser Bruch verwandelt werden soll, ist $(+6, 0, -8)$. Setzt man nun statt a, b, c beliebig 0, 0, 1; so entwickelt man die wiederkehrende Reihe:

0, 0, 1, 6, 30, 208, 1200, 6912, 39808, 229248, ...

und $\frac{N}{P} = \frac{39808}{229248} = \frac{311}{1791} = 0,1736460 =$ der kleinsten Wurzel.

Um sich von der Größe der Näherung dieser Wurzel zu überzeugen, vergleiche man die gegebene Gleichung oder $4x^3 - 3x + 0,5 = 0$ mit der aus nr. 162. §. 22. leicht abzuleitenden: $4\sin\alpha^3 - 3\sin\alpha + \sin 3\alpha = 0$, und nehme konsequent $\sin 3\alpha = 0,5 = \frac{1}{2}$. Hiernach sind die 3 Wurzeln unserer Gleichung die verschiedenen Sinusse dreier Winkel überhaupt, und zwar, da hier α das ist, was wir im §. 25. φ nannten, folglich durch α jetzt der kleinste Werth von dem in 3 gleiche Theile zu theilenden Ang. $\sin\frac{1}{2}$ bezeichnet wird, sind (nach I'. und II'. des cit. Paragraphen) diese Sinusse

$$+\sin\frac{\alpha}{3};\quad +\sin\frac{\pi-\alpha}{3};\quad -\frac{\pi+\alpha}{3},$$

d. i. (weil $\frac{1}{2} = \sin 30^0$)

$$+\sin 10^0;\quad +\sin 50^0;\quad -\sin 70^0.$$

Nun ist aus der Tafel (für den Halbmesser $r = 1$) $\sin 10^0 = 0,1736482$, folglich erkennt man, daß obiges Resultat nur wenig von dem wahren abweiche. Diesem kommt man indessen

noch näher durch den Quotienten 0,1756480 aus den weiter abstehenden Gliedern obiger Reihe, nämlich aus 13201920 und 7602688.

Auflösung v. II. Man mache $x = \frac{1}{y}$, gebe der neuen Gleichung die Form der vorgegebenen und verfahre, wie vorhin.

Daß aber diese allgemeine Vorschrift nicht immer sogleich zum gewünschten Ziele führe, welche Kunstgriffe daher noch weiter anzuwenden seyen, soll an dem vorigen Beispiele nachgewiesen werden.

$\frac{1}{y}$ statt x in $1-6x+8x^3=0$ substituirt, wird

$1-\frac{6}{y}+\frac{8}{y^3}=0$, oder $y^3-6y^2+8=0$, oder $1-\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{8}y^3=0$.

Daher ist der erzeugende Bruch $\frac{a+by+cy^2}{1^*-\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{8}y^3}$ und die Verhältniß-Skale $(0, +\frac{3}{4} -\frac{1}{8})$ für die entstehende rücklaufende Reihe. Diese ist, 1, 1, 1 beliebig als erste Glieder angenommen,

$$1, 1, 1, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}, \frac{11}{32}, \frac{25}{64}, \frac{23}{128}, \frac{64}{256}, \frac{44}{512}, \ldots.$$

Allein, wie z. B. der Quotient aus $\frac{5}{8} : \frac{11}{32} = 1,8\ldots > 1$, dagegen der nächste aus $\frac{11}{32} : \frac{35}{64} = 0,8\ldots < 1$ ist; eben so gibt diese Reihe für die gesuchte Wurzel Werthe, abwechselnd $>$ und < 1; die Reihe ist daher unbrauchbar. Dieses erhellt auch schon daraus, weil sie lauter + Werthe gibt, da wir doch aus dem Vorigen wissen, daß $-\sin 70^0 = -0,9396926$ die größte gesuchte Wurzel der vorgegebenen Gleichung sey.

Setzt man daher, um auch — Werthe zu erhalten, die ersten Glieder der Reihe $= +1, -2, +4$ und zur Erleichterung der Rechnung in der gegebenen Gleichung, deren 2 Glieder $6x, 8x^3$ den Faktor 2 gemein haben, $x = \frac{1}{2y}$; so bekommt man die geordnete Gleichung

$$1^* - 3y^2 + y^3 = 0,$$

folglich die Verhältniß-Skale nun = (0, +3, −1) und mittelst dieser die wiederkehrende Reihe:

1, −2, 4, −7, 14, −25, 49, −89, 172, −316, 605, −1120, 2151, ...

Hieraus ist z. B. die kleinste Wurzel $y = -\frac{1120}{2131}$, daher die größte Wurzel der vorgegebenen Gleichung oder $x = \frac{1}{2y} = -\frac{2131}{2240} = -0{,}9515\ldots$ statt $-0{,}9596\ldots$ $(= -\sin 70^0)$, mithin schon in der 2ten Decimalstelle zu groß.

Um sich der wahren Wurzel mehr zu nähern, bilde man dadurch, daß man $x = y - k$ setzt, eine Gleichung mit abwechselnden Zeichen, die also lauter + Wurzeln hat (§. 56. 8.), nehme aber k sehr nahe gleich der gesuchten Wurzel, in unserem Falle = 1. Durch Substitution von $y-1$ statt x und Zeichenänderung hat man

$$1 - 18y + 24y^2 - 8y^3 = 0.$$

Da die 3 letzten Glieder den Faktor 2 gemein haben, setze man, wie vorhin, $y = \frac{1}{2}z$. Dadurch hat man

$$1 - 9z + 6z^2 - z^3 = 0,$$

folglich die Verhältniß-Skale = (+9, −6, +1) und die Reihe, deren 3 ersten Glieder wieder 1, 1, 1 seyn sollen,

1, 1, 1, 4, 31, 256, 2122, 17593, 145861, ...

Hieraus ist z. B. $z = \frac{17593}{145861}$ und $y = \frac{1}{2}z = \frac{17593}{291722} = 0{,}0603074\ldots$ Daher die gesuchte größte Wurzel durch Näherung $x = y - k = y - 1 = 0{,}9396926\ldots$, genau also stimmend mit $-\sin 70^0$.

Zusatz 1. Wenn man eben so die Gleichung

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 0{,}5 = 0$$

mit der für $\sin 5\alpha$ aus §. 24. Zus. 3. vergleicht, und $\sin 5\alpha = 0{,}5$ setzt; so erkennt man auf ähnliche Weise, wie oben, daß die 5 Wurzeln dieser Gleichung seyen: $+\sin 6^0$; $+\sin 30^0$; $+\sin 78^0$; $-\sin 42^0$; $-\sin 66^0$.

Zusatz 2. Wenn die Gleichung 2 gleiche Wurzeln hat, daher die 2 unmittelbar auf einander folgenden Coefficienten (nach §. 73. Zus. 1.) sind

$$N = (n+1)\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}p^n + \mathfrak{C}q^n$$

$$\text{und } P = (n+2)\mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}p^{n+1} + \mathfrak{C}q^{n+1};$$

so kann zwar, wenn p größer, als jede der übrigen Wurzeln ist, der Quotient $\frac{N}{P} = \frac{1}{p}$ für $n = \infty$ werden; allein die Annäherung zu diesem Werthe geschieht nur langsam, indem $n\mathfrak{A}$ beträchtlich $> \mathfrak{B}$ werden muß.

Lagrange gibt daher (in „Resol. d. équat. numer.“) die Vorschrift, die Zähler der Brüche $\frac{\mathfrak{A}}{1-px}, \frac{\mathfrak{B}}{1-qx}, \ldots$ gleich und zwar jeden $= 1$ zu setzen, und hiedurch die Coefficienten $a, b, c, \ldots$ im Zähler des erzeugenden Bruches zu bestimmen, wie folgt:

1. Sey $\frac{a+bx}{1-\alpha x+\beta x^2} = \frac{1}{1-px} + \frac{1}{1-qx}$, so daß $\alpha = p+q$ und $\beta = pq$ ist. Die einfachen Brüche auf einerlei Nenner gebracht, wird

$$\frac{a+bx}{1-\alpha x+\beta x^2} = \frac{2-(p+q)x}{1-(p+q)x+pqx^2},$$

demnach $a = 2$; $b = -(p+q) = -\alpha$.

2. Sey $\frac{a+bx+cx^2}{1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3} = \frac{1}{1-px} + \frac{1}{1-qx} + \frac{1}{1-rx}$, wo denn $\alpha = p+q+r$; $\beta = pq+pr+qr$ und $\gamma = pqr$ ist.

Jene einfachen, reducirten Brüche geben den Zähler

$$3-2(p+q+r)x+(pq+pr+qr)x^2.$$

Diesen mit $a+bx+cx^2$ verglichen, ist $a = 3$; $b = -2(p+q+r) = -2\alpha$ und $c = pq+pr+qr = \beta$.

3. Sey $\frac{a+bx+cx^2+dx^3}{1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3+\delta x^4} = \frac{1}{1-px} + \frac{1}{1-qx} + \frac{1}{1-rx} + \frac{1}{1-sx}$.

Man findet auf ähnliche Weise, wie vorhin,

$$a = 4;\ b = -3\alpha;\ c = +2\beta;\ \delta = -\gamma.$$

Für die Coefficienten a, b, c ... ist also das Gesetz als bekannt zu betrachten. Daher für $x = \frac{1}{y}$ gehen obige Brüche in diese über:

1'. $\frac{2y-\alpha}{y^2-\alpha y+\beta} = \frac{1}{y-p} + \frac{1}{y-q}$;

2'. $\frac{3y^2-2\alpha y+\beta}{y^3-\alpha y^2+\beta y-\gamma} = \frac{1}{y-p} + \frac{1}{y-q} + \frac{1}{y-r}$;

3'. $\frac{4y^3-3\alpha y^2+2\beta y-\gamma}{y^4-\alpha y^3+\beta y^2-\gamma y+\delta} = \frac{1}{y-p} + \frac{1}{y-q} + \frac{1}{y-r} + \frac{1}{y-s}$.

U. s. w. — Weil endlich hier jeder Zähler A, B, ... der partiellen oder einfachen Brüche = 1 ist; so hat die aus einem jener erzeugenden Brüche zu bildenden Reihe das allgemeine Glied $(p^n+q^n+r^n+\ldots)y^{-n}$, und der Quotient aus 2 nächsten Coefficienten, nämlich $\frac{P}{N}$, ist auch in dem Falle = der größten Wurzel p, wenn diese mehrfach ist.

Beispiel. Von $y^3-3y^2+4=0$ die größte Wurzel zu finden.

Hier ist in 2'. $\alpha=3$; $\beta=0$; demnach der erzeugende Bruch $\frac{3y^2-6y}{y^3-3y^2+4}$ und die Beziehungs-Skale = (+3, 0, −4). Ferner ist in diesem Falle, wie oben im §. 72., für die zu bildende Reihe der erste Coefficient $A = a = 3$; der zweite $B = A\alpha + b = 3.3 - 2\alpha = 9-6 = 3$; der dritte $C = B\alpha$ (indem $\beta=0$) $= 3.3 = 9$, oder die 5 ersten Glieder der Reihe sind nach Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors 3 diese: 1, 1, 3; folglich die wiederkehrende Reihe

1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, ...

Hieraus ist der Quotient $\frac{P}{N}$ z. B. $\frac{1365}{683}$ um Weniges < 2 und $\frac{P}{N} = \frac{683}{341}$ um Weniges > 2, u. s. w. wechselweise, was denn 2 als Wurzel der vorgegebenen Gleichung erkennen läßt. Weil aber auch der Zähler $3y^2-6y$, gleich 0 gesetzt, 2 zur

Wurzel hat; so ist diese Zahl (nach §. 56. 14.) eine doppelte Wurzel unserer Gleichung $y^3 - 3y^2 + 4 = 0$, dargestellt durch $(y-2)(y-2)(y+1) = 0$.

D.

Anwendung der arithmetischen und wiederkehrenden Reihen auf Interpolation.

§. 76. Erklärung. Wenn (A) überhaupt eine Folge von gegebenen Größen, $a_0, a_1, a_2, \ldots$, (B) aber eine zu (A) gehörige Folge theils gegebener, theils unbekannter Größen α_0, $x, \ldots \alpha_1$, $y, \ldots \alpha_2, \ldots$, bezeichnet, deren Werthe von den entsprechenden Größen oder Werthen der Folge (A) abhängig ist; so nennt man das Berechnen oder Auffinden jener zwischenliegenden Glieder $x, y, \ldots$ für ebenfalls zwischenliegende Glieder von (A) mit Hülfe der bereits für $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bekannten Glieder $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ das Interpoliren oder Einschalten.

Hat man nur eine Reihe (B) im Auge; so sind die Glieder von (A) als bloße Stellenzahlen $(0, 1, 2, 3, \ldots)$ zu betrachten.

Zusatz 1. Daß die Glieder $x, y, \ldots$ nicht beliebig gewählt werden dürfen, geht schon aus ihrer Abhängigkeit von den Werthen der entsprechenden Glieder der Reihe (A), so wie aus dem Umstande hervor, daß dieselbe Art oder Formel, nach welcher $x, y, \ldots$ bestimmt werden, auch die Größen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ selbst entweder ganz genau, oder im sehr genäherten Werthe wieder finden lassen müsse.

Ersteres ist der Fall, wenn das Gesetz der Abhängigkeit bekannt oder durch einen algebraischen Ausdruck gegeben ist; in welchem Falle denn auch weder das Einschalten selbst, noch die Prüfung der Richtigkeit der eingeschalteten Glieder von Schwierigkeit ist. Es erhellt dieses aus dem, was über das Interpoliren hinsichtlich der arithmetischen und geometrischen Progressionen (der Differenz- und Faktoren-Reihen) in der allgem. Größenl. von S. 298—305 gesagt ist.

Muß aber erſt das Geſetz der Abhängigkeit durch einen algebraiſchen Ausdruck fixirt, d. i. eine Formel gefunden werden, nach welcher die Werthe der zu interpolirenden Glieder von (B) mit möglichſter Sicherheit zu berechnen ſind; ſo erhellt leicht, daß das Auffinden einer ſolchen Formel um ſo ſchwieriger ſeyn werde, von je mehreren Größen (wenn gleich unter dieſen nur eine Hauptgröße ſich befindet und die übrigen gleich Nebenumſtänden zu berückſichtigen ſind) jene Glieder von (B) abhängen, und je wenigere Glieder $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bereits beſtimmt ſind, oder je weiter dieſe aus einander liegen. In dieſen Fällen laſſen ſich die immer näher treffenden Interpolationsformeln nur verſuchsweiſe entdecken.

Zuſatz 2. Das uns bei dieſer verſuchten Auffindung der Interpolationsformeln leitende Princip iſt die Wahrſcheinlichkeit, geſchöpft aus der Art der Abhängigkeit, wie wir ſolche im Allgemeinen aus der Natur der fraglichen Größen, oder aus dem Fortgange ſchon beſtimmter Glieder $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ von (B), verglichen mit dem Fortſchreiten der ihnen entſprechenden Glieder $a_0, a_1, \ldots$ von (A), erkennen. So wiſſen wir, daß die Ausdehnung der Körper, z. B. einer Metallſtange, im Allgemeinen von der Wärme abhänge, ſo daß einer höheren Temperatur auch eine größere Stablänge entſprechen werde. Sind nun die Werthe $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ dieſer Längen z. B. für die von 0^0 an aufſteigend von 10 zu 10 Temperaturgraden durch genaue Beobachtungen oder Verſuche beſtimmt; ſo werden ſich ſchon mit einiger Wahrſcheinlichkeit die Stablängen für zwiſchenliegende Temperaturen berechnen laſſen. Allein nur diejenige Interpolationsformel wird die richtigſte, das Geſetz der Abhängigkeit am nächſten darſtellende Formel ſeyn, welche ſelbſt die beobachteten Längen für die fortſchreitenden Temperaturen genau oder doch ſehr nahe wieder gibt.

Wie nun ſolche Interpolationsformeln von den arithmetiſchen und rücklaufenden Reihen dargeboten werden, ſoll hier in Kürze an einigen Aufgaben gezeigt werden.

§. 77. Aufgabe 1. Seyen die Größen A; $A+\alpha$; $A+\beta$; $A+\gamma$; ... gegeben und die Abſtände derſelben von einander gleich groß ($=1, 2, 3, 4, \ldots$); man ſoll die zu interpolirende Größe $A+z$ finden.

Auflösung. Man betrachte die gegebenen Größen als für den Zeiger (0, 1, 2, 3, ...) bekannten Glieder einer arithmetischen Hauptreihe, demnach die zu berechnende Größe A+z als ein Glied dieser Reihe für die Stellenzahl x. Bezeichnet man nun die Anfangsglieder der Differenzreihen kurz mit a, b, c, d, ...; so ist nach §. 69. II.

$$z = ax + \frac{bx(x-1)}{1.2} + \frac{cx(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \frac{dx(x-1)...(x-3)}{1.2.3.4} + ...$$

wodurch denn z und daher auch A+z bekannt ist, sobald die Anfangsglieder a, b, c, ... in den gegebenen Größen $\alpha, \beta, \gamma, ...$ bestimmt sind. Man entwickelt nämlich, wie im §. 68., hier aus den gegebenen Gliedern der Hauptreihe

$$a = \alpha;\ b = \beta - 2\alpha;\ c = \gamma - 3\beta + 3\alpha;\ d = \delta - 4\gamma + 6\beta - 4\alpha; ...$$

Beispiel. Aus den größeren Tafeln sind die Logarithmen der Zahlen 10000, 10002, 10004, 10006 resp. 4,0000000000; 4,0000868502; 4,0001736831; 4,0002604985; folglich die Unterschiede dieser Logarithmen resp. 868502 (= α); 868329; 868154 zehntausendmilliontheilchen. Man soll den Logar. der Zahl 10003 durch Einschalten finden.

Hier ist a = 868502 jener Theilchen; in eben diesen b = −173 (indem $\beta = 868329 + 868502$ ist) und c = −2; ferner ist hier $x = \frac{3}{2}$, daher $ax = +1302753$; $\frac{bx.x-1}{2} = -65$ und $\frac{cx.x-1.x-2}{2.3} = +\frac{1}{8}$ eben jener Theilchen. Da Letztere vernachlässigt werden können; so ist der gesuchte Logarith. = 4,0001302688, wie ihn auch die Tafeln geben.

Zusatz 1. Da in der Formel für z die Zahlen, 1, 2, 3, 4, ... die Abstände der von einander gleichweit entfernten Glieder von dem Anfangsgliede sind; so hat man für ungleiche Abstände dieser Glieder von einander, wenn man ihre Abstände vom Anfangsgliede nun mit m, n, p, q, ... bezeichnet, die analoge (allgemeine) Formel:

$$z = \frac{Px}{m} + \frac{Qx.x-m}{m.n} + \frac{Rx.x-m.x-n}{mnp} + \frac{Sx.x-m.x-n.x-p}{mnpq} + ...$$

wo die Coefficienten P, Q, R,... durch die gegebenen Werthe von z zu bestimmen sind. Diese für die Abstände

$$m,\ n,\ p,\ q,\ldots$$

seyen $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ldots$

das Anfangsglied, für welches $x = 0$, sey A, demnach das Glied im Abstande $m = A+\alpha$; im Abstande $n = A+\beta$; u. s. w. im Abstande $x = A+q$. Nun ist

$$\alpha = P;\ \beta = \frac{Pn}{m} + \frac{Qn.n-m}{mn};\ \gamma = \frac{Pp}{m} + \frac{Qp.p-m}{mn} + \frac{Rp.p-m.p-n}{mnp};$$

$$\delta = \frac{Pq}{m} + \frac{Qq.q-m}{mn} + \frac{Rq.q-m.q-n}{mnp} + \frac{Sq.q-m.q-n.q-p}{mnpq};\ldots.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man die Werthe von P, Q, R,... durch die gegebenen Werthe $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ und die Abstände m, n, p,..., wie folgt, zusammensetzen:

$$P = \alpha;$$

$$Q = \frac{m\beta}{n-m} + \frac{n\alpha}{m-n}\left(\text{wo in der Entwickelg. } + \frac{n\alpha}{m-n} \text{ statt } - \frac{n\alpha}{n-m} \text{ gesetzt ist}\right)$$

$$R = \frac{mn\gamma}{p-m.p-n} + \frac{mp\beta}{n-m.n-p} + \frac{np\alpha}{n-p.m-n};$$

$$S = \frac{mnp\delta}{q-m.q-n.q-p} + \frac{mnq\gamma}{p-m.p-n.p-q} + \frac{mpq\beta}{n-m.n-p.n-q} + \frac{npq\alpha}{m-n.m-p.m-q};$$

. . . . . .

Hiebei können sowohl die Abstände m, n,... als auch die Unterschiede $\alpha, \beta,\ldots$ zum Theile auch mit — genommen werden.

Zusatz 2. Aus der allgemeinen Formel für z (Zus. 1.) gehen folgende specielle Formeln hervor:

1. Soll man nur zwischen A und $A+\alpha$, die im Abstande m gegeben sind, die Größe $A+z$ für die Stellenzahl x interpoliren; so wird seyn $\alpha : z = m : x$, d. i. der einfache Proportionaltheil $z = \frac{\alpha x}{m}$.

2. Sind 3 Größen A, $A+\alpha$, $A+\beta$ für die Stellenzahlen o, m, n gegeben, und man soll $A+z$ in der Stelle x einschalten; so ist nach der citirten Formel

$$z = \frac{Px}{m} + \frac{Qx.x-m}{mn},$$

oder, indem man die obigen Werthe für P und Q (Zus. 1.) substituirt und Alles gehörig reducirt,

$$(a)\ldots z = \frac{\alpha x}{m} + \frac{\beta x}{n} \cdot \frac{x-m}{n-m} + \frac{\alpha x}{m} \cdot \frac{x-m}{m-n}.$$

Dieser Werth wird, je nachdem zwischen 0 und m, oder zwischen m und n zu interpoliren ist, in

$$(b)\ldots z = \frac{\alpha x}{m} + \frac{x-m}{n-m}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right)$$

und $$(c)\ldots z = \frac{\beta x}{n} + \frac{x-n}{m-n}\left(\frac{\alpha x}{m} - \frac{\beta x}{n}\right)$$

abgeändert, wobei der letzte Faktor, als Unterschied der einfachen Proportionaltheile, auch die Verbesserung heißt.

3. Wenn 4 Größen A, $A+\alpha$, $A+\beta$, $A+\gamma$ mit den der Ordnung nach folgenden Stellenzahlen o, m, n, p gegeben sind, und man soll an der Stelle x die Größe $A+z$ interpoliren; so findet man, wenn x zwischen m und n liegt, auf ähnliche Weise, wie unter 2., die Formel:

$$(d)\ldots z = \frac{\alpha x}{m} + \frac{x-m \cdot p-x}{n-m \cdot p-n}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right) + \frac{x-m \cdot n-p}{p-m \cdot p-n}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\alpha x}{m}\right).$$

Liegt x zwischen n und p, so hat man, indem α und β, dann m und n mit einander vertauscht werden,

$$(e)\ldots z = \frac{\beta x}{n} + \frac{x-n \cdot x-p}{m-n \cdot m-p}\left(\frac{\alpha x}{m} - \frac{\beta x}{n}\right) + \frac{x-n \cdot x-m}{p-n \cdot p-m}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\beta x}{n}\right);$$ oder auch

$$(f)\ldots z = \frac{\beta x}{n} - \frac{n-x \cdot p-x}{n-m \cdot p-m}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right) - \frac{n-x \cdot x-m}{p-n \cdot p-m}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\beta x}{n}\right).$$

Diese Formel ändert sich, wenn $p = n+m$ und $\gamma = \beta+\delta$ ist, in die, zur Interpolation der Länge und Breite des Mondes sehr nützliche, Formel:

$$(g)\ldots z = \frac{\beta x}{n} - \frac{n-x \cdot p-x}{n-m \cdot p-m}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right) - \frac{n-x \cdot x-m}{n \cdot n+m}\left(\frac{\delta x}{m} - \frac{\beta x}{n}\right).$$

Beispiel. Encke's astronom. Jahrbuch für 1830 gibt die Mondslänge

am 27. März 0 Uhr (Mittags)	$= 46^\circ 24' 29'',9$	also
" " " " 12 " (Mittern.)	$= 53\ 45\ 40\ ,9$	$7^\circ 21' 11'',0 = \alpha$
" 28. " " 0 "	$= 61\ 01\ 10\ ,0$	$14\ 36\ 40\ ,1 = \beta$;

man sucht die Mondslänge für 18 Uhr den 27. oder 6 Uhr den 28. März.

Hier sind die Stellenzahlen $m = 12$; $x = 18$; $n = 24$; ferner nach Formel (c) $\frac{\alpha x}{m} = 11^\circ\, 01'\, 46'',5$; $\frac{\beta x}{n} = 10^\circ\, 57'\, 30'',1$; $\frac{\alpha x}{m} - \frac{\beta x}{n} = 0^\circ\, 4'\, 16'',4$; $\frac{n-x}{n-m} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$; daher

$$z = \left.\begin{matrix} 10^\circ 57' 30'',1 \\ +\ 2\ \ 8\ ,2 \end{matrix}\right\} = 10^\circ 59' 38'',3;\ A + z = \left.\begin{matrix} 46^\circ 24' 29'',9 \\ +10\ 59\ 38\ ,3 \end{matrix}\right\} = 57^\circ 24' 8'',2.$$

§. 78. **Aufgabe 2. Es sind 4 Größen A, B, C, D gegeben; man soll an einer Zwischenstelle n eine Größe durch Interpolation finden.**

Auflösung. Man betrachte die gegebenen Größen als Glieder einer wiederkehrenden Reihe, so daß demnach $C = \alpha B - \beta A$ und $D = \alpha C - \beta B$, folglich die Beziehungs-Skale $= (+\alpha, -\beta)$ sey, und aus diesen Gleichungen die Größen

$$\alpha = \frac{AD - BC}{AC - B^2} \text{ und } \beta = \frac{BD - C^2}{AC - B^2}$$

entwickelt werden.

Man suche ferner die Wurzeln $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{p}$ der Gleichung $1 - \alpha x + \beta x^2 = 0$, und unterscheide wieder die 3 Fälle:

1) Die Wurzeln seyen **möglich** und **verschieden**; so hat man nach §. 73. 1., indem man die Partial-Brüche setzt $\frac{\mathfrak{A}}{1-qx} + \frac{\mathfrak{B}}{1-px}$,

$$\mathfrak{A} = \frac{Aq - B}{q - p} \text{ und } \mathfrak{B} = \frac{B - Ap}{q - p},$$

weil vermöge unserer wiederkehrenden Reihe A, B, C, D nun $A = a$ und $-(\mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q) = +b = -B$ ist. Endlich ist, wenn

man das allgemeine oder nte Glied nach dem Anfangsgliede mit P bezeichnet,

$$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n, \text{ als Interpolationsformel.}$$

2) Die Wurzeln seyen wegen $\alpha^2 = \beta^2$ oder $\alpha = \beta$ gleich; so hat man nach §. 73. Zus. 1.

$$P = [(n+1)\mathfrak{A} + \mathfrak{B}]p^n,$$

wobei $\mathfrak{A} = \frac{B - Ap}{p}$ und $\mathfrak{B} = \frac{2Ap - B}{p}$ wieder, wie vorhin, mittelst der Theilbrüche $\frac{\mathfrak{A}}{1-px} + \frac{\mathfrak{B}}{(1-px)^2}$ gefunden werden, indem in unserem Falle $x = 1$ und das Glied $p^2x^2 = 0$ ist. Weil endlich in obiger Gleichung der Coefficient $\alpha = p + q = 2p$ und $\beta = pq = p^2$ ist; so hat man auch $p = \frac{1}{2}\alpha$ und $p = \sqrt{\beta}$.

3) Seyen die Wurzeln imaginär wegen $\alpha^2 < 4\beta$; so hat man nach §. 73. Zus. 2., indem man $\cos\varphi = \frac{\alpha}{2p}$ oder $\alpha = 2p \cdot \cos\varphi$ und $pq = p^2 = \beta$ setzt,

$$P = \frac{p^n}{\sin\varphi}(a \cdot \sin(n+1)\varphi + b \cdot \sin n\varphi),$$

wo denn $a = A$ und $b = \frac{B}{p} - 2A\cos\varphi$ ist.

Beispiel. Betancourt's (fast eben so Dalton's und Schmidt's) Versuche geben die Höhe der Quecksilbersäule, welche der Spannkraft der Wasserdämpfe im luftleeren Raume das Gleichgewicht hält, z. B. für die Stellenzahlen 0, 1, 2, 3 und die Temperaturen

nach Réaum. $+40^0$; 60^0; 80^0; 100^0;
in par. Zollen $2{,}92 = A$; $9{,}95 = B$; $28{,}00 = C$; $71{,}80 = D$;

man will für eine andere Stellenzahl n und die Temperatur $x = 40^0 + 20n$ die Höhe der Quecksilbersäule finden.

Man hat hier

$$\begin{array}{llll} AD = 209{,}656; & BD = 714,\ 410 & \alpha = \frac{689440}{172425}; & \beta = \frac{695900}{172425}. \\ BC = 278{,}600 & C^2 = 784,\ 000 & & \\ AC = 81{,}760 & B^2 = 99{,}0025 & & \end{array}$$

Weil nun hier α^2 nur um Weniges $< 4\beta$, indem α sehr nahe $= 4$ und β wenig > 4 ist; so kann man α, wie β, $= 4$ setzen. Daher wird jede der Wurzeln $= \frac{\alpha \pm \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)}}{2\beta} = \frac{\alpha}{2\beta} = \frac{1}{2}$, oder $p = q = 2$. Die Rechnung ferner nach 2) gibt $A = 2{,}055$ und $B = 0{,}865$, folglich ist die Interpolationsformel

$$P = [(n+1)A + B]\,p^n$$

$$\text{hier } P = (2{,}055n + 2{,}92)\,2^n;$$

also für $n = 3$ die Höhe des Queckſilbers, als Maß der Spannkraft, bei $x = 40 + 20 \cdot 3$ oder 100^0 Temperatur $= 72{,}68$ (Zoll.) $= P$ (der Verſuch gab 71,8), und für $x = \frac{1}{2}$, demnach für 70^0 findet man $P = 16{,}977$ (nach Betancourt 16,90).

Wie hier aus A und B geſchah, ſo kann man auch aus B und C oder aus C und D die Werthe von A und B berechnen; weil nämlich für B die Stellenzahl $n = 1$ und für C dieſelbe $= 2$ iſt, ſo hat man nach der allgemeinen Formel für P nun die Gleichungen

$$(2A + B)\,2 = 9{,}95 \text{ und } (3A + B)\,4 = 28{,}0,$$

aus welchen A und B entwickelt werden.

Anmerkung. Wenn man die von a abhängige Größe mit z; die Werthe erſterer Größe mit $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, die entſprechenden von z mit $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ und den für irgend einen Zwiſchenwerth a_x den einzuſchaltenden Werth mit z_x bezeichnet; ſo iſt dieſer nach Lagrange's Formel

$$z_x = \frac{a_x - a_2 \cdot a_x - a_3 \ldots a_x - a_n}{a_1 - a_2 \cdot a_1 - a_3 \ldots a_1 - a_n} \cdot z_1$$

$$+ \frac{a_x - a_1 \cdot a_x - a_3 \ldots a_x - a_n}{a_2 - a_1 \cdot a_2 - a_3 \ldots a_2 - a_n} \cdot z_2$$

$$+ \frac{a_x - a_1 \cdot a_x - a_2 \ldots a_x - a_n}{a_3 - a_1 \cdot a_3 - a_2 \ldots a_3 - a_n} \cdot z_3$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Das Fortſchreiten dieſer für n gegebene Werthe ngliedrigen Formel iſt klar. Iſt in unſerem vorigen Beiſpiele nach

den vom Prof. Schmidt angestellten Versuchen (S. 425 dessen „Hand- und Lehrbuches der Naturlehre" — Giessen 1826)

für	$a_1 = +10^0$	$z_1 = 0{,}400$		$a_4 = +40^0$	$z_4 = 5{,}672$
	$a_2 = 20$	$z_2 = 0{,}997$		$a_5 = 50$	$z_5 = 6{,}455$
	$a_3 = 30$	$z_3 = 1{,}962$		$a_6 = 60$	$z_6 = 11{,}080$
				$a_7 = 70$	$z_7 = 17{,}830$,

und man sucht z. B. die Höhe der Quecksilbersäule für $+35^0$; so findet man $z_x = 2{,}777$ (Zoll.); Schmidt's Versuch gab 2,684.

Eine leicht faßliche Ableitung der vorigen sowohl, als anderer Formeln für den Fall, daß die Größe z von mehreren Größen a, b, ... (oder x, y, ...) abhängt, gibt auch Cauchy im 4. Kap. seines „Cours d'Anal. de l'ecole roy. polyt." — auch in's Deutsche übersetzt von Huzler (Königsb. 1828). —

E.

Kennzeichen der Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

§. 79. 1. Wenn die Summe der Glieder einer unendlichen Reihe bei dem unendlichen Wachsen der Zahl der Glieder, d. i. für $n = \infty$ sich einer bestimmten Grenze (bezeichnet mit $\lim. x = G$ oder $\lim: x = \lim. G$) nähert; so convergirt die Reihe; im entgegengesetzten Falle divergirt sie. Es ist z. B. für die geometrische Progression, deren Exponent e ist, nach allgem. Größenl. §. 132. Zus. 1.

$$S_n = a + ae + ae^2 + \ldots + ae^{n-1} = \frac{(e^n - 1)a}{e - 1},$$

oder $S_n = \frac{ae^n}{e-1} - \frac{a}{e-1}$ und $S_n = \frac{a}{1-e} - \frac{ae^n}{1-e}$,

je nachdem $\pm e >$ oder < 1 ist. Im ersten Falle wird $\frac{ae^n}{e-1}$ mit n unendlich groß, während $\frac{a}{e-1}$ konstant ist, folglich wird

auch die Summe S_n unendlich groß, daher divergirt die Reihe, oder ist nicht summirbar. Dagegen nimmt im zweiten Falle $\frac{ac^n}{1-c}$ unendlich ab, wenn n unendlich wächst, folglich nähert sich S_n ohne Ende der Grenze $\frac{a}{1-c}$, und die Reihe ist convergirend oder summirbar, und zwar ist die Summe S der Glieder der unendlichen Reihe gleich eben dieser Grenze $\frac{a}{1-c}$, d. i. überhaupt $S = G$. (Vergl. allgem. Größenl. §. 154. II.)

2. Soll eine unendliche Reihe convergiren, d. i. sollen wir schließen dürfen, daß ihre Summe für $n = \infty$ sich einer bestimmten Grenze G ohne Ende nähere; so müssen die letzten oder spätesten Glieder gegen die Anfangsglieder als verschwindend zu betrachten, d. i. unendlich klein, folglich auch ihre Summe kleiner, als jede angebbare Zahl, seyn, wie dieses z. B. mit der Reihe

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots \frac{1}{2^{n-2}}, \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

der Fall ist. Hier ist G oder $S = \frac{a}{1-c} = 1$.

Obgleich dieses Merkmal nur bei Reihen, die entweder fortwährend oder doch von einem gewissen Gliede an ununterbrochen in's Unendliche fallen, Statt finden kann; so muß man sich doch hüten, umgekehrt zu schließen, daß nämlich jede, ohne Ende fort fallende Reihe auch convergire. So nehmen z. B. die Glieder der natürlichen harmonischen Progression (§. 69. Anmerk. 3.)

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \cdots$$

unendlich ab, ohne daß darum diese Reihe convergirt. Denn stellt man die Summe der spätesten Glieder, d. i. die Ergänzung der Reihe durch

$$s = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

vor;

vor; so ist, so groß auch n seyn mag, doch

$$s > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n};$$

daher, wenn jeder vorhergehende Nenner auf den letzten 2n erhöht wird, um so mehr

$$s > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots \frac{1}{2n}, \text{ d. i. } s > n \cdot \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Es kann also die Summe der spätesten Glieder jener Progression nicht unendlich klein, oder nicht kleiner werden, als jede noch so kleine Zahl; folglich **divergirt** die Reihe.

3. Wenn die Zeichen der Glieder einer unendlichen Reihe wenigstens von einer gewissen Stelle an **regelmäßig wechseln**, z. B. **alterniren**; so läßt die **unendliche Abnahme der Glieder mit Sicherheit auf die Convergenz der Reihe schließen.**

Denn wird eine solche Reihe allgemein durch

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + - \ldots \pm a_n \mp a_{n+1} \pm a_{n+2} \mp \ldots$$

vorgestellt; so ist die Ergänzung

$$s = \mp [a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \ldots]$$

und $s = \mp [a_{n+1} - a_{n+2} + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \ldots]$.

Nehmen nun die Glieder $a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ immer ab; so ist jeder jener eingeklammerten Unterschiede $+$, folglich fällt der numerische Werth von s stets zwischen den Zahlen a_{n+1} und $a_{n+1} - a_{n+2}$. Wird nun für $n = \infty$ der Werth a_{n+1} unendlich klein; so nimmt auch s unendlich ab, folglich convergirt die Reihe vermöge 2. Während also

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots$ divergirt, convergirt $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$

4. Vergleicht man eine vorgegebene unendliche Reihe (S') mit einer andern (S), die unstreitig convergirt, und findet, daß ihre Glieder von einer gewissen Stelle an, ohne Rücksicht auf die Zeichen, **kleiner werden**, als die **correspondirenden**,

mit einerlei Zeichen versehenen Glieder der Reihe (S); so convergirt auch (S), indem die Ergänzung s dieser unendlichen Reihe durch die Abnahme der Zahlwerthe ihrer Glieder und durch die Störung der früher vorhandenen Uebereinstimmung der Zeichen noch vermindert, folglich die Convergenz befördert wird.

Dagegen divergirt eine unendliche Reihe, wenn die Zahlwerthe ihrer Glieder von einer gewissen Stelle an die Werthe der entsprechenden Glieder einer gewiß divergirenden Reihe übertreffen, indem die Ergänzung s oder die Summe ihrer spätesten Glieder, folglich auch ihre Divergenz durch das Wachsen der Zahlwerthe und durch die nun eingetretene Gleichheit der Zeichen ihrer Glieder noch erhöht wird.

5. Dieselbe Vergleichung einer gegebenen unendlichen Reihe, deren Glieder gleiche Zeichen haben, mit einer geometrischen oder harmonischen Progression dient ebenfalls zur Beurtheilung oder zum Beweise ihrer Convergenz oder Divergenz. Man kann z. B. den Satz:

„Wenn in einer Reihe

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots$$

wo a_n das allgemeine Glied vorstellt, der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sich einer bestimmten Grenze A um so mehr nähert, je mehr n wächst; so convergirt oder divergirt die Reihe, je nachdem $A <$ oder > 1 ist" auf folgende Art beweisen:

Aus der Voraussetzung $\lim. \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$ folgt, daß, wenn die Größe B noch so nahe an A genommen wird, doch der Zahlwerth des Unterschiedes $\frac{a_{n+1}}{a_n} - A$, sobald n eine hinreichend große Zahl r überschreitet, fortwährend kleiner sey, als die Differenz $B - A$, und daher immer $\frac{a_{n+1}}{a_n} <$ oder $> B$, oder, was dasselbe ist, $a_{n+1} <$ oder $> Ba_n$ bleibe, je nachdem $B >$ oder $< A$ ist.

Im ersten Falle werden die Glieder der Reihe

$$(1) \ldots \quad a_r, \ a_{r+1}, \ a_{r+2}, \ a_{r+3}, \ldots$$

sämmtlich kleiner, und im zweiten Falle sämmtlich größer, als die entsprechenden Glieder der geometrischen Progression

$$(2) \ldots \quad a_r, \ Ba_r, \ B^2a_r, \ B^3a_r, \ldots$$

Ist nun A nicht $=1$ und gibt man der Größe B einen zwischen A und 1 oder 1 und A liegenden Werth; so hat man $B >$ oder $< A$, je nachdem $A <$ oder > 1 gedacht wird; aber im ersten Falle ist auch $B < 1$, also die Progression (2) **convergirend**, und im zweiten Falle ist auch $B > 1$, also (2) **divergirend**, folglich convergirt auch (1), wenn $A < 1$, und divergirt dagegen, wenn $A > 1$ ist.

Beispiel. Für die Reihe

$$\frac{1}{1}, \ \frac{1}{1.2}, \ \frac{1}{1.2.3}, \ldots \ \frac{1}{1.2\ldots n}, \ \frac{1}{1.2\ldots n.n+1}, \ldots$$

hat man $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots n.n+1} = \frac{1}{n+1} = A$, d. i. für $n = \infty$ wird $A = \frac{1}{\infty} = 0$; folglich convergirt die Reihe.

6. Ist aber $A = 1$ und bleiben **gleiche** Zeichen (z. B. +); so gelten noch folgende zwei Kennzeichen der Convergenz oder Divergenz:

1) **wenn die Glieder der Reihe**

$$(3) \ldots \quad a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots \ a_n, \ a_{n+1}, \ldots$$

unendlich abnehmen; so convergirt oder divergirt sie zugleich mit der Reihe

$$(4) \ldots \quad a_1, \ 2a_2, \ 4a_4, \ 8a_8, \ldots \ 2^n a_{2n}, \ldots$$

Denn aus der Abnahme der Glieder in (3) folgt

1. Schema.

$a_1 = a_1$
$2a_2 = 2a_2$
$4a_4 < 2a_3 + 2a_4$
$8a_8 < 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8$
u. s. w.

2. Schema.

$a_1 = a_1$
$2a_2 > a_2 + a_3$
$4a_4 > a_4 + a_5 + a_6 + a_7$
$8a_8 > a_8 + a_9 + \ldots a_{15}$
u. s. w.

Gesetzt nun, die Reihe (3) convergire, und ihre Summe sey S, oder $2a_1+2a_2+2a_3+\ldots = 2S$; so ist die Summe der Glieder von (4), wie groß ihre Anzahl auch seyn mag, nach dem 1. Schema kleiner, als

$$a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \ldots \text{ d. i. } < 2S - a_1;$$

daher (4) wie (3) convergirend.

Gesetzt aber, die Reihe (3) divergire, d. i. die Summe einer sehr großen Anzahl ihrer Glieder übersteige jede anzugebende Zahl; so wird nach dem 2. Schema die Summe $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots$ in (4), wenn man eine große Anzahl Glieder nimmt, ebenfalls jede anzugebende Zahl übersteigen, folglich ist auch (4) divergirend.

Beispiel. Wenn man für die Reihe (3) diese annimmt:

$$(5)\ldots\ 1, \frac{1}{2^r}, \frac{1}{3^r}, \frac{1}{4^r}, \ldots$$

wo r jede beliebige Zahl bedeutet; so ist die Reihe (4), mit welcher (5) zugleich convergirt oder divergirt, folgende:

$$(6)\ldots\ 1, 2^{1-r}, 4^{1-r}, 8^{1-r}, \ldots 2^{n(1-r)}, \ldots$$

d. i. eine geometrische, für $r>1$ convergirende, Progression. Setzt man daher $r=1$; so wird auch (5), d. i. nun die natürliche harmonische Progression $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ divergirend, wie wir schon oben sahen, und eben so divergirt auch $1, \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}, \ldots$ aber die Reihe $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots$ convergirt.

2) Wenn daher das allgemeine Glied a_n einer unendlichen Reihe für $n=\infty$ sich der bestimmten Grenze $\frac{1}{n^r}$ nähert; so wird die Reihe, wie (6), convergiren, wenn $r>1$ ist, dagegen für $r<1$ divergiren.

§. 80. Fortsetzung. Betrachtet man unendliche Reihen der allgemeinen Form:

$$(7) \ldots c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

welche Reihen nämlich, deren Coefficienten c_0, c_1, c_2, ... (die + Größen seyn sollen) für sich eine Reihe bilden, nach den steigenden Potenzen einer veränderlichen Größe x fortgehen; so ist bloß zu bestimmen, für welchen Werth von x eine solche Reihe convergire oder divergire.

Angenommen, daß (7) für einen bestimmten Werth von x in die Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_n + a_{n+1} \ldots$$

übergehe, in welcher sich der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für $n = \infty$ der Grenze A ohne Ende nähere; so ist (vermöge 5. im §. 79) die Reihe (7) für jenen bestimmten Werth von x convergirend, wenn $A < 1$ ist, oder mit andern Worten:

$$\text{da } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} = x \cdot \frac{c_{n+1}}{c_n}, \text{ also}$$

$$\lim. \frac{a_{n+1}}{a_n} = x \cdot \lim. \frac{c_{n+1}}{c_n} = A, \text{ folglich}$$

$$\lim. \frac{c_{n+1}}{c_n} = \alpha \text{ gesetzt, } A = \alpha x \text{ ist;}$$

die Reihe (7) convergirt, wenn $\alpha x < 1$ oder $x < \frac{1}{\alpha}$ ist, d. i. für alle Zahlwerthe von x, die zwischen die Grenzen $-\frac{1}{\alpha}$ und $+\frac{1}{\alpha}$ fallen.

Zusatz 1. Leicht lassen sich nun auch die zwei Sätze beweisen:

Wenn zwei unendliche Reihen mit + Gliedern

$$(8) \ldots a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

$$(9) \ldots b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

für einen bestimmten Werth von x convergiren; so

convergirt auch für eben diesen Werth die aus (9) und (8)

1) durch Addition oder Subtraktion
2) durch Multiplikation

entstehende Reihe.

Denn bezeichnet man die Summe von (8) durch $S (= G)$ und die von (9) durch $S' (= G')$ (vergl. §. 79. 1.), und setzt die Summe der $n+1$ ersten Glieder

$$S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$
$$S'_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n;$$

so nähern sich S_n, S'_n, wenn n beständig wächst, den Grenzen S und S', daher nähert sich die Summe oder Differenz $S_n \pm S'_n$, d. i. die Summe der $n+1$ ersten Glieder jeder der durch Addition oder Subtraktion aus (8) und (9) entspringenden Reihen unter derselben Voraussetzung der Grenze $S \pm S'$ ohne Ende, oder jede der letztern Reihen convergirt ebenfalls und ihre Summe oder Differenz ist $= S \pm S'$.

Wenn man ferner (in Beziehung auf 2)) die Summe der $n+1$ ersten (die Potenzen x^0, x^1, $x^2 \ldots x^n$ enthaltenden) Glieder des Produktes aus (8) und (9) mit S''_n und die größte Zahl, die in $\frac{1}{2}n$ enthalten ist, mit m bezeichnet; so ist offenbar $S''_n < S_n . S'_n$, indem letzteres Produkt Größen mit x^{n+1}, x^{n+2}, $\ldots x^{2n}$ gibt, welche als Glieder in S''_n nicht enthalten sind. Aber S''_n ist $> S_m . S'_m$, indem S''_n Größen enthält, die im letzteren Produkte nicht enthalten sind; so gibt z. B. dieses Produkt zu dem Gliede in S''_n, das x^n enthält, den Bestandtheil $a_m b_m x^{2m}$ für ein gerades n, nicht aber, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Wächst nun n in's Unendliche, so wird auch die Zahl m unendlich groß und die beiden Summen S_n, S_m nähern sich ohne Ende der Grenze S, während S'_n und S'_m sich der Grenze S' unserer Voraussetzung gemäß nähern. Daher nähern sich gemeinschaftlich die Produkte $S_n . S'_n$, $S_m . S'_m$ und zugleich die zwischen diesen Produkten liegende Summe S''_n der bestimmten

Grenze S . S', d. i. die durch Multiplikation der Reihen (8) und (9) entspringende Reihe convergirt und ihre Summe ist S . S'.

Zusatz 2. Wird die unendliche Reihe (8) mit der durch das Glied $b_m x^m$ begrenzten (9) multiplizirt; so ist das Resultat wieder eine convergirende Reihe, wie (8).

Denn jedes Partialprodukt aus der Multiplikation von (8) in ein Glied der Polynomialgröße (9) convergirt, folglich auch das Hauptprodukt, als Summe jener Theilprodukte.

Zusatz 3. Wenn in der unendlichen Reihe (8) der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für keinen Werth von n die endliche Größe A übertreffen kann; so ist bei der unendlichen Abnahme von x die Grenze der Reihe (8) $= a_0$.

Denn unter jener Voraussetzung ist

$\frac{a_2}{a_1}$ nicht $> A$, d. i. a_2 nicht $> A . a_1$; eben so a_3 nicht $> A . a_2$;

a_4 nicht $> A . a_3$; ... folglich auch

$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ nicht $> a_1 x (1 + Ax + A^2 x^2 + \ldots)$.

Nimmt man nun an, daß $x < \frac{1}{A}$ sey, so convergirt die geometrische Progression $1 + Ax + A^2 x^2 + \ldots$, deren Exponent ist Ax und deren Summe oder Grenze $= \frac{1}{1-Ax}$ (§. 79. 1.). Man hat also

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \text{ nicht} > a_1 x . \frac{1}{1-Ax} .$$

Nun nimmt $\frac{a_1 x}{1-Ax}$ mit x unendlich ab, folglich auch $a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$; demnach ist

$$\lim. (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \text{ in's Unendl.}) = a_0 .$$

Zusatz 4. Hieraus folgt, daß, wenn die Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

gilt, auch $a_0 = b_0$; $a_1 = b_1$, u. s. w. sey, indem die Gleichung auch gleiche Grenzen für die unendliche Abnahme von x ausspricht. Daher hat man 1) $a_0 = b_0$, folglich ist auch

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

d. i. $a_1 + a_2 x + \ldots = b_1 + b_2 x + \ldots$

d. i. 2) unter der vorigen Voraussetzung auch $a_1 = b_1$; u. s. w.

(Vergl. Cauchy's oben cit. „Cours d'Analyse" Chap. VI. und v. Ettingshausen's „Vorlesungen über die höh. Mathem." 1. Theil 4—6. Vorl. — Wien 1827 —).

IV.

Fortsetzung der Combinations-Lehre.

Vorerinnerung. In meiner allgemeinen Größenlehre sind von S. 361 bis 384 die Fundamentalgesetze über Permutation, Combination und Variation aufgestellt und erörtert. Es bleibt daher hauptsächlich noch übrig, die involutorischen Formen mit einigen Anwendungen hier in Kürze darzustellen.

Involutorische Formen mit einigen Anwendungen.

§. 81. Erklärung. Zu den bedingten Operationen der Combination und Variation gehört vorzüglich diejenige, welche entweder ausführlich oder nur in Zeichen diejenigen combinatorischen Formen oder Complexionen darstellt, die sämmtlich dieselbe Summe der Stellenzahlen der gegebenen Elemente aussprechen. So haben z. B. für

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{b},\ \overset{3}{c},\ \overset{4}{d},\ \overset{5}{e},\ \overset{6}{f},\ \overset{7}{g},\ \overset{8}{h},\ldots$$

die Complexionen verschiedener Klassen, wie

h, bf, ce, abe, abbc, aacc, acd, ...

sämmtlich dieselbe Summe 8 der Stellenzahlen, welche Summe kurz Lokalsumme genannt wird. Bezeichnet man die gegebenen Elemente selbst mit den natürlichen Zahlen; so müssen diese, als Zahlen betrachtet, in allen Combinations- oder Variations-Formen dieselbe Summe geben, die verlangt wird. Die Bezeichnung dieser bedingten Operation ist

$${}^{m}C(\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{5}{c}\ldots) \text{ und } {}^{m}V(\overset{1}{a}\overset{2}{b}\ldots), \text{ oder } {}^{m}C(125\ldots) \text{ und } {}^{m}V(1\ldots);$$

$$\text{ferner } {}^{m}\overset{k}{C}(125\ldots)^{n} \text{ und } {}^{m}\overset{k}{V}(1\ldots)^{n};$$

wo C und V resp. die Combination und Variation; der Exponent m die Lokalsumme als Zahl; der über C und V gesetzte Buchstabe k die Zahl der in jeder Form zusammenzufassenden Elemente oder die Klasse und der Exponent n die gestat-

tete, unbedingte Wiederholung der Elemente ausdrückt. Beispiele hiezu gibt folgende einleitende Aufgabe:

§. 82. Aufgabe. Die Combinations-Formen nach k mit bestimmter Lokalsumme m der gegebenen Elemente, deren Wiederholung entweder unbedingt gestattet, oder nicht gestattet ist, ohne Permutation und wohlgeordnet darzustellen.

Auflösung. Man fülle alle Stellen bis zur vorletzten mit den niedrigsten, die letzten aber mit den Ergänzungs-Elementen aus, und erhöhe beim Fortschreiten die früheren Stellen um eben so viel, als man die letzten erniedrigt, ohne jedoch ein niedrigeres Element auf ein höheres folgen zu lassen, wie folgende Beispiele zeigen:

1) ... $^{10}\overset{3}{C}(1\ldots7) = 127, 136, 145, 235.$

2) ... $^{14}\overset{4}{C}(1\ldots8) = 1238, 1247, 1256, 1346, 2345.$

3) ... $^{5}\overset{4}{C}(0\ldots5)^{n} = 0005, 0014, 0023, 0113, 0122, 1112.$

4) ... $^{20}\overset{5}{C}(3\ldots8)^{n} = 33338, 33347, 33356, 33446, 33455, 34445, 44444.$

Zusatz 1. Werden die nach der vorigen Auflösung gefundenen Complexionen noch permutirt und läßt man keine kleinere Zahlsumme auf eine größere folgen; so wird dieselbe Aufgabe hinsichtlich der eben so bedingten Variation gelöst. Z. B.

$^{7}\overset{3}{V}(1\ldots4) = 124, 142, 214, 241, 412, 421.$

$^{9}\overset{4}{V}(1,2,3)^{n} = 1113, 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211, 3111.$

Zusatz 2. Es erhellt, daß diese Art Combination und Variation unmöglich wird, wenn entweder die niedrigste Form schon die verlangte Lokalsumme übersteigt, oder die höchste Form diese Summe noch nicht erreicht; z. B.

in $^{10}\overset{5}{C}(4,5\ldots)$ oder $^{10}\overset{3}{C}(1,2,3)$, und eben so in

$^{9}\overset{2}{V}(5,6\ldots)$ oder $^{9}\overset{3}{V}(1\ldots4)$.

Zuſatz 3. Zur Anwendung mag dienen:

1) Auf welche und wie vielerlei Art können mit 4 Würfeln 20 Augen geworfen werden? — Hier iſt

$$^{20}\overset{4}{C}(1\ldots6)^4 = 2666,\ 3566,\ 4466,\ 4556,\ 5555.$$

2) Wievielmal kommt unter den 1296 möglichen Würfen mit 4 Würfeln (allgem. Größenl. §. 159.) der Wurf von 20 Augen vor? — Hier muß noch zu jeder der vorigen Formen die der Permutationszahl nach allgem. Größenl. §. 156. Zuſ. 1. geſucht werden, und die Summe dieſer Permutationszahlen gibt die Antwort auf die Frage. Es iſt nämlich

$$p(2666) = 4;\ p(3566) = 12;\ p(4466) = 6;\ p(4556) = 12$$
$$\text{und } p(5555) = 1;$$

alſo finden nur 35 Würfe, jeder von 20 Augen Statt.

Zuſatz 4. Die Entwickelung einer gegebenen Klaſſe von Combinations- oder Variations-Formen nach den durch die Anfangselemente ihrer Complexionen beſtimmten Ordnungen kann durch die Formeln angedeutet werden.

$$1.\ldots\ \overset{k}{C}(1\ldots) = 1\overset{k-1}{C}(2\ldots) + 2\overset{k-1}{C}(3\ldots) + 3\overset{k-1}{C}(4\ldots) + \ldots$$

$$2.\ldots\ \overset{k}{V}(1\ldots) = 1\,p\overset{k-1}{C}(2\ldots) + \ldots$$

$$3.\ldots\ \overset{k}{C}(1\ldots)^n = 1\overset{k-1}{C}(1\ldots)^n + 2\overset{k-1}{C}(1\ldots)^n + \ldots$$

$$4.\ldots\ \overset{k}{V}(1\ldots)^n = 1\,p\overset{k-1}{C}(1\ldots)^n + \ldots$$

Zur Andeutung der Entwickelung ſämmtlicher Klaſſen, deren Inbegriff mit C oder V ohne Zeiger bezeichnet wird, dienen die combinatoriſchen Formeln:

$$5.\ldots\ C(1\ldots) = \overset{1}{C}(1\ldots) + \overset{2}{C}(1\ldots) + \overset{3}{C}(1\ldots) + \ldots$$

$$6.\ldots\ V(1\ldots) = \overset{1}{V}(1\ldots) + \ldots$$

$$7.\ldots\ ^mC(1\ldots)^n = {}^m\overset{1}{C}(1\ldots)^n + {}^m\overset{2}{C}(1\ldots)^n + \ldots$$

$$8.\ldots\ ^mV(1\ldots)^n = p^m\overset{1}{C}(1\ldots)^n + \ldots$$

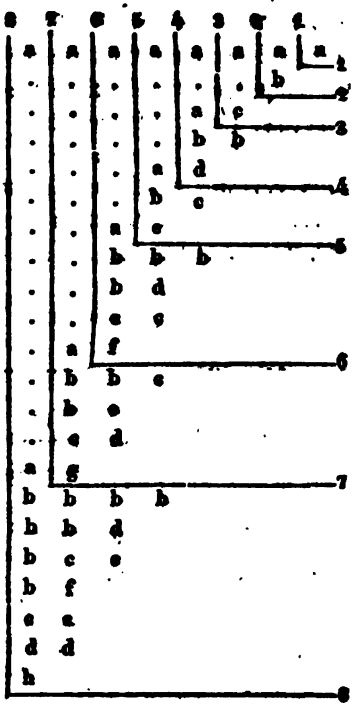
§. 83. Aufgabe. Aus n gegebenen Elementen $(\overset{1}{a}\,\overset{2}{b}\,\overset{3}{c}\,\overset{4}{d}\,\overset{5}{e}\,\overset{6}{f}\,\overset{7}{g})$ die combinatoriſchen Formen jeder

Klasse ohne Versetzung, aber mit Wiederholung der Elemente, und zwar jede Complexion mit der Lokalsumme m = n = 7 wohlgeordnet darzustellen.

Auflösung 1. Nach §. 82 hat man die 1. Klasse oder die Uniones, bezeichnet mit $^{7}\overset{1}{C}(a...g)^{7}$, = g; die 2. Klasse oder die Binionen $^{7}\overset{2}{C}(a...)^{7}$ = af, be, cd; ferner die 3. Klasse = aae, abd, acc, bbc; die 4. Klasse = aaad, aabc, abbb; die 5. Klasse = aaaac, aaabb; der 6. Klasse = aaaaab; der 7. Klasse = aaaaaaa.

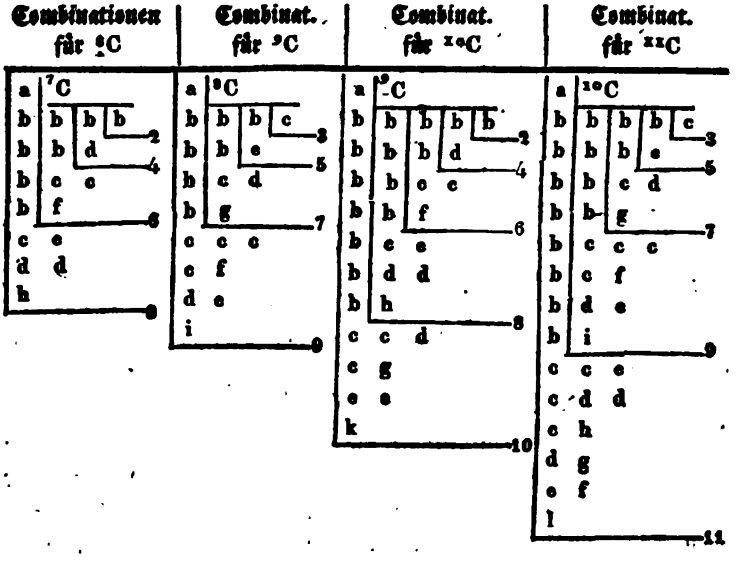
Hieraus erhellt leicht, wie man auch die Complexionen einer höhern Klasse aus den gebildeten Formen der nächst niedern Klasse, z. B. die Ternionen aus den Binionen, ableiten könne. Vertauscht man nämlich in der niedrigsten Binion mit der Lokalsumme 7 das Element f mit dem nächst kleineren e und setzt a vor, so hat man aae; f weiter gegen d vertauscht und diesem b vorgesetzt, hat man abd; f gegen c vertauscht und c vorgesetzt, hat man acc. Die Binion be (und so jede ähnliche Form einer der übrigen Klassen) gibt nur eine Ternion, indem man das Element e gegen c, d. i. gegen dasjenige Element vertauscht, das um so viele Stellen rückwärts von e liegt, als die Stellenzahl des dem e vorstehenden Elements b anzeigt, und dann diesem Elemente c das Element b vorsetzt. Aus der dritten Binion cd, in welcher die Elemente unmittelbar auf einander folgen, kann eben so wenig eine Ternion abgeleitet werden, als aus bbc eine Quaternion, weil sonst auf ein späteres Element ein früheres folgen müßte.

Auflösung 2. Von den Complexionen mit den niedrigsten Lokalsummen steige man allmählig, die Complexionen aus den unmittelbar vorhergehenden bildend, zu den Complexionen mit höheren Lokalsummen bis zu den mit der verlangten Lokalsumme auf. Es geschieht dieses ordnungsmäßig für die Elemente $(\overset{1}{a}\,\overset{2}{b}\,\overset{3}{c}\,\overset{4}{d}\,\overset{5}{e}\,\overset{6}{f}\,\overset{7}{g}\,\overset{8}{h})$ zur Lokalsumme m = 8 im folgenden Schema, wo die Punkte das wiederholte Element a bedeuten:



Jeder Winkelhaken enthält die Complexionen von derjenigen Lokalsumme, die durch die Zahl des Winkelhakens angezeigt ist, und zwar wohl geordnet; so der Winkelhaken 4,4 die Formen aaaa, aab, ac, bb, d, jede von der Lokalsumme 4. Ueberdieß erhellt leicht, daß die Complexionen mit höherer Lokalsumme mittelst der Formen mit niederer Lokalsumme dadurch gebildet werden, daß man 1) jeder der letzteren Formen das erste Element a vorsetzt; 2) in jeder derselben Formen das Anfangselement mit dem folgenden vertauscht, in wiefern nicht eben dieses folgende Element höher oder ein späteres ist, als das zweite, in derselben Form enthaltene. Z. B. um die im Winkelhaken 6,6 enthaltenen Complexionen aus den in 5,5 abzuleiten, hat man nach 1) durch Vorsetzung von a die Formen aaaaaa, aaaab, aaac, aabb, aad, abc, ac; dann nach 2) aus abb in 5,5 die Complexion bbb; aus ad die Complexion bd; aus bc die Compl. cc und aus e die Compl. f.

Zusatz 1. Diese involutorische Darstellung der gesuchten Complexionen mit bestimmter Lokalsumme m ist leicht fortzusetzen; und hat man die Combinationen von einer höheren Lokalsumme gebildet; so lassen sich die darin enthaltenen Complexionen von niederen Lokalsummen leicht absondern. So, wenn wieder ^{7}C, ^{8}C,... die combinatorischen Formen mit der Lokalsumme 7, 8,... bezeichnen, hat man durch Einsetzung der Winkelhaken in ^{8}C, ^{9}C,... die Schemate der Absonderung:



Zusatz 2. Man kann auch umgekehrt jede der vorstehenden Formen, die man combinatorische Involutionen mit dem Exponenten 8, 9, 10,... zu nennen pflegt, auf ähnliche Art aus den Complexionen mit niederer Lokalsumme ableiten, wie wir oben die ganze Involution ableiteten. Denn da man z. B. für ^{8}C nur den schon für ^{7}C gefundenen Complexionen das erste Element a vorsetzen darf, um alle mit a anfangenden Complexionen zu bilden; so sind nur noch die mit andern Elementen anfangenden Formen zu bilden, was so geschieht:

1) Für die mit geradem Exponenten zu bildende Involution, wie für ^{8}C, ^{10}C,... setzt man das zweite Element als erste

erste Complexion, dagegen ist eben diese das dritte Element c für ^9C, ^{11}C, ...

2) Diesem Elemente b oder c, so wie jeder der beim Fortschreiten aufgefundenen Complexionen von einerlei Lokalsumme, setzt man das zweite Element b vor.

3) Werden in den bereits gebildeten Complexionen, die aus 2 oder mehreren verschiedenen Elementen bestehen, die Elemente gegen andere auf die schon im §. 82 angeführte Weise vertauscht.

Z. B. für ^9C im Schema des vorigen Zusatzes seyen die in dem mit 7 bezeichneten Winkelhaken enthaltenen Complexionen gebildet. Diesem b vorgesetzt, hat man weiter die Complexionen bbbc, bbe, bcd, bg; dann in bcd das Element b mit dem folgenden, aber d mit dem vorhergehenden vertauscht, ist aus bcd die einzige Complexion ccc abgeleitet, indem kein früheres Element auf ein späteres folgen darf; ferner aus bg wird eben so cf und aus dieser noch de abgeleitet. Setzt man nun diesen für ^9C aufgefundenen Complexionen das Element mit der Stellenzahl 9 bei; so hat man alle gesuchten Complexionen.

Es erhellt, daß auch bei dieser involutorischen Darstellungsweise keine Complexion ausgelassen werden könne.

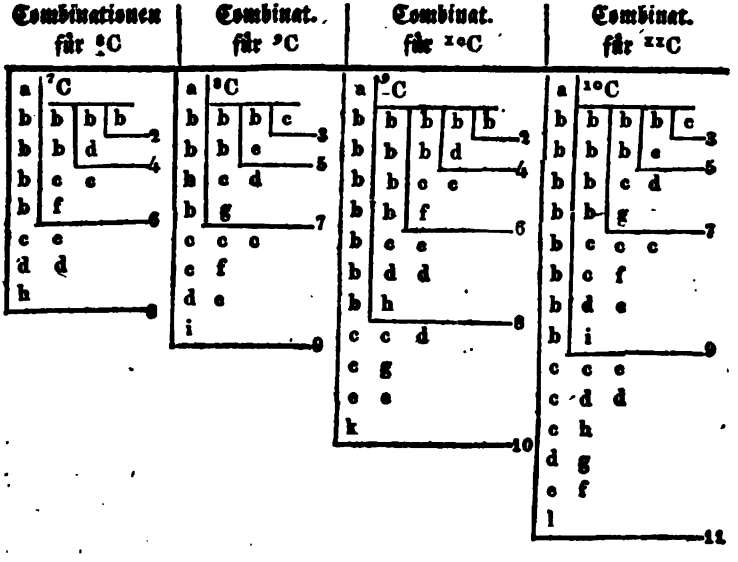
§. 84. Aufgabe. Die combinatorischen Formen aus n gegebenen Elementen a, b, c, d, ..., von welchen je m genommen werden, nach den Lokalsummen abzutheilen und dieselben nach dem Wiederholungs-Exponenten des ersten Elements a zu ordnen.

Auflösung. Bei Bestimmung der Lokalsumme das erste Glied nicht mitgerechnet, ist der Zeiger

$$\overset{0}{a}\ \overset{1}{b}\ \overset{2}{c}\ \overset{3}{d}\ \overset{4}{e}\ \overset{5}{f}\ \ldots.$$

Dem Elemente a gebe man die Wiederholungs-Exponenten $m, m-1, m-2, \ldots$ und sondere jede dieser Größen $a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, \ldots$ durch einen Vertikalstrich, und diese sämmtlichen Größen durch einen Horizontalstrich ab. Indem man ferner nach §. 83 die Complexionen von derselben Lokal-

Zusatz 1. Diese involutorische Darstellung der gesuchten Complexionen mit bestimmter Lokalsumme m ist leicht fortzusetzen; und hat man die Combinationen von einer höheren Lokalsumme gebildet; so lassen sich die darin enthaltenen Complexionen von niederen Lokalsummen leicht absondern. So, wenn wieder ^7C, ^8C,... die combinatorischen Formen mit der Lokalsumme 7, 8,... bezeichnen, hat man durch Einsetzung der Winkelhaken in ^8C, ^9C,... die Schemate der Absonderung:



Zusatz 2. Man kann auch umgekehrt jede der vorstehenden Formen, die man combinatorische Involutionen mit dem Exponenten 8, 9, 10,... zu nennen pflegt, auf ähnliche Art aus den Complexionen mit niederer Lokalsumme ableiten, wie wir oben die ganze Involution ableiteten. Denn da man z. B. für ^8C nur den schon für ^7C gefundenen Complexionen das erste Element a vorsetzen darf, um alle mit a anfangenden Complexionen zu bilden; so sind nur noch die mit andern Elementen anfangenden Formen zu bilden, was so geschieht:

1) Für die mit geradem Exponenten zu bildende Involution, wie für ^8C, ^{10}C,... setzt man das zweite Element als erste

erſte Complexion, dagegen iſt eben dieſe das dritte Element c für ^9C, ^{11}C, ...

2) Dieſem Elemente b oder c, ſo wie jeder der beim Fortſchreiten aufgefundenen Complexionen von einerlei Lokalſumme, ſetzt man das zweite Element b vor.

3) Werden in den bereits gebildeten Complexionen, die aus 2 oder mehreren verſchiedenen Elementen beſtehen, die Elemente gegen andere auf die ſchon im §. 82 angeführte Weiſe vertauſcht.

Z. B. für ^9C im Schema des vorigen Zuſatzes ſeyen die in dem mit 7 bezeichneten Winkelhaken enthaltenen Complexionen gebildet. Dieſem b vorgeſetzt, hat man weiter die Complexionen bbbc, bbe, bcd, bg; dann in bcd das Element b mit dem folgenden, aber d mit dem vorhergehenden vertauſcht, iſt aus bcd die einzige Complexion ccc abgeleitet, indem kein früheres Element auf ein ſpäteres folgen darf; ferner aus bg wird eben ſo cf und aus dieſer noch de abgeleitet. Setzt man nun dieſen für ^9C aufgefundenen Complexionen das Element mit der Stellenzahl 9 bei; ſo hat man alle geſuchten Complexionen.

Es erhellt, daß auch bei dieſer involutoriſchen Darſtellungsweiſe keine Complexion ausgelaſſen werden könne.

§. 84. Aufgabe. Die combinatoriſchen Formen aus n gegebenen Elementen a, b, c, d, ..., von welchen je m genommen werden, nach den Lokalſummen abzutheilen und dieſelben nach dem Wiederholungs-Exponenten des erſten Elements a zu ordnen.

Auflöſung. Bei Beſtimmung der Lokalſumme das erſte Glied nicht mitgerechnet, iſt der Zeiger

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e & f \ldots \end{matrix}$$

Dem Elemente a gebe man die Wiederholungs-Exponenten m, m—1, m—2, ... und ſondere jede dieſer Größen a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, ... durch einen Vertikalſtrich, und dieſe ſämmtlichen Größen durch einen Horizontalſtrich ab. Indem man ferner nach §. 83 die Complexionen von derſelben Lokal-

ſumme, wie 1., 2., 3., ... nämlich: b; c und bb oder b^2; d, bc und b^3; ... bildet, dann jede der zu derſelben Lokalſumme gehörigen Complexionen in den Vertikalreihen nach dem entſprechenden Wiederholungs-Exponenten von a ſo anſetzt, daß dieſer Exponent mit der Summe der Exponenten der einzelnen Elemente der fraglichen Complexion immer dieſelbe Exponenten-Summe = m gibt, und zugleich die zuſammengehörigen Complexionen durch einen Horizontalſtrich abſondert; erhält man das folgende, unſerer Aufgabe genügende und leicht fortzuſetzende Schema:

a^m	a^{m-1}	a^{m-2}	a^{m-3}	a^{m-4}	a^{m-5}	a^{m-6}	a^{m-7}	a^{m-8}	a^{m-9}
1.	b								
2.	c	b^2							
3.	d	bc	b^3						
4.	e	bd c^2	b^2c	b^4					
5.	f	be od	b^2d bc^2	b^3c	b^5				
6.	g	bf ce d^2	b^2e bcd c^3	b^3d b^2c^2	b^4c	b^6			
7.	h	bg cf de	b^2f bce bd^2 c^2d	b^3e b^2cd bc^3	b^4d b^3c^2	b^5c	b^7		
8.	i	bh cg df e^2	b^2g bcf bde c^2e cd^2	b^3f b^2ce b^2d^2 bc^2d	b^4e b^3cd b^2c^3	b^5d b^4c^2	b^6c	b^8	
9.	k	bi ch dg ef	b^2h bcg bdf be^2 c^2f cde d^3	b^3g b^2cf b^2de bc^2e bcd^2 c^3d	b^4f b^3ce b^3d^2 b^2c^2d bc^4	b^5e b^4cd b^3c^3	b^6d b^5c	b^7c	b^9

§. 85. **Einige Anwendungen der letzten Aufgabe auf die Entwickelung der Potenzen.**

1. Da das Erheben einer Polynomialgröße zur Potenz m in der Form $(a+b+c+d+\ldots)^m$ dem Wesen nach nichts anders ist, als ein Combiniren ihrer Elemente im Sinne der vorigen Aufgabe (vergl. das allgemeine Glied sowohl der Binomial- als Polynomial-Formel S. 123 und 127 der allgem. Größenl.); so ist klar, daß, abgesehen von den Coefficienten, das nachstehende Schema alle Glieder einer Polynomial-Potenz geben müsse. In der That, will man z. B. die Glieder von $(a+b+c)^3$ so gibt jenes Schema

a^3	a^2b	ab^2	b^3
	a^2c	abc	b^2c
		ac^2	bc^2
			c^3 ,

indem man nämlich die obenstehenden Potenzen von a (hier $m=3$ gesetzt) mit den in den Vertikalreihen stehenden Größen, die noch dieselben Elemente des Polynoms enthalten, als Faktoren zusammen nimmt. Die numerischen Coefficienten dieser Glieder der Potenz sind die Permutationszahlen, gefunden nach §. 156 mit Zus. 4. der allgem. Größenl.; nämlich in unserem Falle hat man $3a^2b$, $3ac^2$, ... und $6abc$.

2. Um die Literal-Coefficienten z. B. der Potenz

$$(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots)^3$$

zu finden, setzt man in einer Horizontalreihe die durch Vertikalstriche abgesonderten Potenzen x^0, x^1, ... bis $x^3)^3$ d. i. x^9; dann unter x^0 die Größe a^m, hier a^3; unter x^1 die Größen in der Horizontalreihe 1. im Schema §. 84.; unter x^2 die Größen in der dortigen Horizontalreihe 2. und allgemein: unter x^r als Faktoren die Größen in der rten Horizontalreihe, in wiefern 1) diese Größen noch dieselben Literal-Coefficienten des vorgegebenen Polynoms enthalten, und in wiefern 2) die Summe der Exponenten der Elemente einer jeden dieser Größen, die noch mit der über derselben stehenden Potenz von a (in unserem Beispiele: mit a^{m-1} oder a^2, a^{m-2} oder a und $a^{m-3}=a^0$ oder 1) multiplizirt werden müssen, gleich bleibt dem Exponenten der verlangten Potenz (hier 3). Auf diese Weise wird das Gesuchte so dargestellt:

x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
a^5	a^4b	a^3c	a^3d	a^2bd	a^2cd	ad^3	bd^3	cd^3	d^5.
		a^2b^2	a^2bc	ab^2c^2	ab^3d	$abcd$	c^2d^2		
			ab^3	b^3c^2	b^4c	bc^3			

Indem man die so gebildeten Complexionen, wie vorhin unter 1., noch mit den zugehörigen Permutationszahlen, als numerischen Coefficienten, und mit den oben stehenden Potenzen von x zusammen nimmt, sind alle Glieder der verlangten Potenz vollständig gefunden.

3. Verlangt man vorerst alle Literalcoefficienten zu x^5 im Polynom

$$P = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$$

zu wissen; so darf man nur, da jene Coefficienten durch allmähliges Erheben von P zur 1., 2., 3., 4., 5. Potenz erhalten werden, das Verfahren unter 2. mit beständiger Berücksichtigung der 5ten Horizontalreihe im Schema des §. 84 einhalten. Dadurch bekommt man

aus P^1	fx^5
" P^2	$(af + be + cd)x^5$
" P^3	$(a^2f + abe + acd + b^2d + bc^2)x^5$
" P^4	$(a^3f + a^2be + a^2cd + ab^2d + abc^2 + b^3c)x^5$
" P^5	$(a^4f + a^3be + a^3cd + a^2b^2d + a^2bc^2 + ab^3c + b^5)x^5$.

Zu diesen Literalcoefficienten noch die gehörigen Permutationszahlen als Faktoren gesetzt, hat man die die 5te Potenz von x konstituirenden Glieder:

fx^5
$2(af + be + cd)x^5$,
$(3a^2f + 6abe + 6acd + 3b^2d + 3bc^2)x^5$,
$[4a^3f + 12(a^2be + a^2cd + ab^2d + abc^2) + 4b^3c]x^5$,
$[5a^4f + 20(a^3be + a^3cd) + 30(a^2b^2d + a^2bc^2) + 20ab^3c + b^5]x^5$.

Ist aber $a = 0$, d. i. $P = bx + cx^2 + \ldots$ und man verlangt wieder die Coefficienten für x^5 aus $P, P^2, \ldots P^5$; so enthält zwar auch in diesem Falle dieselbe 5te Horizontalreihe die Literalcoefficienten, aber ohne Wiederholung der bereits ge-

bildeten Coefficienten. Man hat demnach unmittelbar (statt nämlich in der vorigen Entwickelung die Glieder, die eine Potenz von a zum Faktor haben, wegzulassen) mit Beisetzung der numerischen Coefficienten

aus P^1 | fx^5,
" P^2 | $2(bc+cd)x^5$,
" P^3 | $3(b^2d+bc^2)x^5$,
" P^4 | $4b^3cx^5$,
" P^5 | b^5x^5.

§. 86. Aufgabe. Es seyen m Elemente (a, b, c, d, e, ...) gegeben, deren Summe (a+b+c+...) 1) mit sich selbst; 2) mit der Summe ihrer 2ten Potenzen ($a^2+b^2+c^2+...$) und auch mit der Summe der Binionen (ab+ac+...) ohne Wiederholungen; 3) mit der Summe der 3ten Potenzen ($a^3+b^3+...$); dann deren Binionensumme (ab+ac+...) mit der Summe ihrer Quadrate ($a^2+b^2+...$); endlich deren Ternionensumme (abc+abd+...) ohne Wiederholungen mit derselben Elementensumme; 4) mit der Summe der 4ten Potenzen ($a^4+b^4+...$); dann deren Binionensumme (ab+ac+...) mit der Summe ihrer 3ten Potenzen; ferner deren Ternionensumme (abc+abd+...) mit der Summe ihrer Quadrate, und endlich deren Quaternionensumme (abcd+abce+...) ohne Wiederholungen mit derselben Elementensumme; u. s. w. multiplizirt wird; eine Formel zu finden, welche die 1. 2. 3. 4. ... mten Potenzen darstellt, die auf diese Weise aus den m Elementen entstehen.

Auflösung. Der Kürze wegen sey

A oder Sa = a+b+c... = der Summe der Unionen.
B " Sab = ab+ac+... = " " " " Binion.
C " Sabc = abc+abd+... = " " " " Ternion.
D " Sabcd = abcd+abde+... = " " " " Quatern.
. . . . . .

der n Elemente; alle diese Formen ohne Wiederholung desselben Elements. Ferner sey

P^1 oder $Sa = a+b+c+\ldots =$ der Summe der 1sten
P^2 " $Sa^2 = a^2+b^2+\ldots =$ " " " " 2ten } Potenzen.
P^3 " $Sa^3 = a^3+b^3+\ldots =$ " " " " 3ten

. . . . . .

Dieser Voraussetzung gemäß ist

$$\text{I. } P^1 = A = Sa.$$

Multiplizirt man nun 1) $a+b+c+\ldots$ mit sich selbst, d. i. A mit P; so wird

$$AP = a^2+b^2+c^2+\ldots+2(ab+ac+\ldots) = P^2+2B = P^2+2Sab,$$

also

$$\text{II. } P^2 = AP - 2B = Sa \cdot P - 2Sab.$$

Wenn man 2) $a+b+c+\ldots$ mit $a^2+b^2+\ldots$ d. i. A mit P^2 multiplizirt; so wird

$$(1)\ldots AP^2 = a^3+b^3+\ldots+a^2b+ab^2+\ldots = P^3+Sa^2b,$$

indem man nämlich wieder die Summe aller Glieder von der Form a^2b durch Sa^2b bezeichnet. Wird nun noch die Binionensumme mit den Unionen, d. i. B mit P multiplizirt; so hat man

$$(2)\ldots BP = a^2b+a^2c+\ldots+6(abc+abd+\ldots) = Sa^2b+3Sabc = Sa^2b+3C,$$

wo dem letzten Gliede der Factor 3 beigegeben ist, weil eine Binion und Union aus 3 Größen a, b, c jede auf dreierlei Art genommen werden können, nämlich: abc, acb, bca. Und nun (2) von (1) abgezogen erhält man

$$\text{III. } P^3 = AP^2 - BP + 3C = Sa \cdot P^2 - Sab \cdot P + 3Sabc.$$

Multiplizirt man 3) $a+b+c+\ldots$ mit $a^3+b^3+\ldots$, d. i. A mit P^3; so hat man auf ähnliche Art, wie vorhin,

$$(3)\ldots AP^3 = P^4 + Sa^3b.$$

Dann $ab+ac+\ldots$ mit $a^2+b^2+\ldots$, d. i. B mit P^2 multiplizirt, hat man $a^3b+a^3c+\ldots+a^2bc+ab^2c+\ldots$, d. i.

$$(4)\ldots BP^2 = Sa^3b + Sa^2bc.$$

Und endlich $abc + abd + \ldots$ mit $a + b + \ldots$, d. i. C mit P multiplizirt, hat man $a^2bc + a^2bd + \ldots + 4(abcd + bcde + \ldots)$, wo der letzten Summe der Faktor 4 vorgesetzt ist, weil eine Termion und eine Union aus 4 Größen auf viererlei Weise genommen werden können; demnach auf ähnliche Art, wie vorhin,

$$(5) \ldots CP = Sa^2bc + 4Sabcd.$$

Von der Gleichung (3) abgezogen (4) wird

$$AP^3 - BP^2 = P^4 - Sa^2bc$$

und zu dieser (5) addirt, wird

$$\text{IV. } P^4 \text{ oder } Sa^4 = AP^3 - BP^2 + CP - 4D$$
$$= Sa.P^3 - Sab.P^2 + Sabc.P - 4Sabcd.$$

Auf völlig gleiche Weise entwickelt man

$$\text{V. } P^5 \text{ oder } Sa^5 = AP^4 - BP^3 + CP^2 - DP + 5E$$
$$= Sa.P^4 - Sab.P^4 + Sabc.P^2 - Sabcd.P + 5Sabcde.$$

Sowohl aus der gleichförmigen Entwickelung, als dem gleichförmigen Fortgange dieser für P, $P^2, \ldots$ gefundenen Werthe kann man schließen, daß allgemein sey

$$P^m = AP^{m-1} - BP^{m-2} + CP^{m-3} - \ldots \pm mSabcd \ldots, \text{ oder}$$

$$Sa^m = Sa.Sa^{m-1} - Sab.Sa^{m-2} + Sabc.Sa^{m-3} - \ldots \pm mSabcd \ldots,$$

wo + für ein ungerades m gilt, und in der letzten Combination m Elemente als Faktoren zu nehmen sind.

Anmerkung. Die speziellen Formeln I. bis V. werden in der „Arithmetica universalis“ (nach Newton's aufgefundenem Manuscripte erst 1707 von G. Whiston zu Cambridge herausgegeben) auf S. 251 mit lauter + Zeichen angegeben; z. B. unsere Formel III. wird durch $pb + qa + 3r = c$ ausgedrückt, was von der Art herrührt, wie Newton diese Formeln mit Hinsicht auf die Theorie der Gleichungen ableitete. Die Gültigkeit der hiernach entspringenden allgemeinen Formel hat Kästner am Schlusse seiner „Anfangsgründe

der Analysis endlicher Größen" (S. 438—442 der 2ten Auflage) bewiesen.

§. 87. Anwendung vorstehender Aufgabe auf die Gleichungen.

Da in der allgemeinen Gleichung

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \ldots \pm p = 0$$

der Coefficient a die Summe der Wurzeln, der Coefficient b die Summe der Produkte je zweier Wurzeln, oder die Summe der Binionen der Wurzeln, u. s. w. ohne Wiederholungen vorstellt (§. 56. 11.), die vorige Aufgabe daher keinen andern Sinn hat, als den ihr auch von Kästner beigelegten: „das Verhalten der Coefficienten der Glieder einer Gleichung zu den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln" zu finden; so erhellt im Allgemeinen der Zusammenhang der im §. 86 entwickelten Formeln mit der Lehre von den Gleichungen.

Wie nun diese Formeln zur Aufsuchung der Wurzeln einer Gleichung dadurch benützt werden können, daß man die Grenzen der Wurzeln bestimmt, soll hier nach Newton am folgenden Beispiele gezeigt werden.

Sey die Gleichung

$$(\varphi) \ldots x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0.$$

Aus den 3 Zeichenabwechslungen erkennt man, daß (φ) drei + Wurzeln und wegen der einzigen Zeichenwiederholung eine — Wurzel habe (§. 56. 8.). Diese 4 Wurzeln sind: $+1, +2, +3, -5$, oder die Gleichung ist dargestellt durch

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x+5) = 0.$$

Aendert man nun (φ) in

$$(\psi) \ldots x^4 = x^3 + 19x^2 - 49x + 30,$$

und setzt $A = 1$; $B = 19$; $C = 49$ und $D = 30$; so hat man, indem man mit Newton allen Gliedern obiger Formeln das Zeichen + läßt,

$P = A = 1 =$ der Summe der Wurzeln oder der 1sten Potenzen;

$P^2 = AP + 2B = 1 + 38 = 39 =$ der Summe der Quadrate;

$P^3 = AP^2 + BP + 3C = 39 + 19 - 147 = -89 =$ der Summe der Würfel;

$P^4 = AP^3 + BP^2 + CP + 4D = -89 + 741 - 49 + 120 = 725$
$=$ der Summe aller Biquadrate der Wurzeln der Gleichung,

wie man dieses Alles auch findet, wenn man die als gefunden vorausgesetzten Wurzeln (sie seyen mögliche oder imaginäre) unmittelbar elevirt und addirt.

Ignorirt man die Wurzeln unserer Gleichung und sucht ihre Grenzen; so führt der Satz, daß die geraden Potenzen von + oder — Wurzeln wieder + sind, auf den andern, daß die Summe dieser + Potenzen gewiß **größer** ist, als die entsprechende gerade Potenz der **größten** Wurzel der Gleichung. So ist in unserem Beispiele $+39 > (-5)^2$ oder $+725 > (-5)^4$, ... Daher ist denn auch die 2te oder 4te Wurzel aus jenen Potenzsummen größer, als die größte Wurzel der Gleichung, und zwar nähern sich eben dieser größten Wurzel mehr die höheren Wurzeln aus jenen Potenzsummen, als die niederen; nämlich jener Wurzel 5 liegt $\sqrt[4]{725}$ ($= 5\frac{1}{4}$ zunächst) näher, als $\sqrt{39}$ (fast $= 6\frac{1}{4}$).

Sucht man ferner zwischen beiden Potenzsummen die mittlere stetige Proportionalzahl aus $39 : x : 725$, woraus x sehr nahe $= 168$; so ist, wie man leicht sieht, diese Zahl wenig größer, als die Summe aller mit + gesetzten Würfelzahlen aus den Wurzeln unserer Gleichung. Daher wird die halbe Summe jener Proportionalzahl und der Summe jener mit ihren eigenthümlichen Zeichen gesetzten Würfelzahlen wenig größer seyn, als die Summe der + Würfelzahlen aus den + Wurzeln, und die halbe Differenz größer, als die Summe der — Würfelzahlen aus den — Wurzeln der Gleichung. Folglich wird denn auch die größte der gesuchten + Wurzeln kleiner seyn, als die dritte Wurzel aus jener halben Summe, und eben so die größte der — Wurzeln kleiner, als die kubische

Wurzel aus jener halben Differenz. So ist in unserem Falle die halbe Summe jener Zahl 168 und der Zahl $-89 = 39\frac{1}{2}$, und der halbe Unterschied $= 128\frac{1}{2}$; ferner $\sqrt[3]{39,5}$ ($= 3,5$ sehr nahe) größer als die größte $+$ Wurzel ($+3$) und $\sqrt[3]{128,5}$ ($= 5\frac{1}{27}$ zunächst) größer, als die größte $-$ Wurzel unserer Gleichung.

Newton bemerkt, daß man die gesuchten Wurzeln in noch engere Grenzen einschließen werde, wenn man mit den Summen noch höherer Potenzen (z. B. vorerst P^4 und P^6, oder P^6 und P^8, dann P^5 oder P^7) ein ganz ähnliches Verfahren einhielte. Vergl. oben §. 56. 18. 19.)

V.

Theorie der Curven der zweiten Ordnung.

A.

Linien der ersten und zweiten Ordnung überhaupt.

§. 88. **Aufgabe.** Den algebraischen Ausdruck der geraden Linie zu finden.

Auflösung. Die zwei sich in A senkrecht schneidenden Linien AX, AY (Fig. 32.) seyen in der Ebene, in welcher beide liegen (Geom. §. 147.) von gegebener und fixer Lage. Zieht man die indefinite Gerade VV'; so läßt die Gleichung $\frac{AC}{AB} = \text{tang } B$ (§. 26. 2.) die Neigung der Linie BC gegen BA und eben hiedurch auch gegen AC erkennen, drückt folglich zwar nicht die absolute Länge, wohl aber (auch ohne Rücksicht auf das Dreieck ABC) die Lage von BC gegen AB und AC aus.

Errichtet man nun über AX in beliebiger Entfernung $AP = x$ von A das Perpendikel PM, welches die Linie VV' in M schneidet; so hat man (Geom. §. 112. Zus. 2.)

$$BA : AC = BP : PM,$$

$$\text{oder } \frac{BA}{AC} = \frac{BA+x}{y}, \text{ oder } y = \frac{AC}{AB} \cdot x + AC;$$

daher, a statt $\frac{AC}{AB}$ $(= \text{tang } B)$ und b statt AC gesetzt,

$$(1) \ldots y = ax + b.$$

Da dieser Ausdruck für jeden beliebig angenommenen Werth von x den ihm entsprechenden Werth von y, d. i. den ihm entsprechenden Ort des Punktes M der Linie VV' gibt; so

kann er als die gerade Linie in allen ihren Punkten repräsentirender Ausdruck, oder als die Gleichung der geraden Linie selbst betrachtet werden.

Zusatz 1. Diese allgemeine Gleichung (1) wird einfacher

$$y = ax$$

für den Fall, wenn die Gerade AN″N durch den Anfangspunkt A jener zusammengehörigen Linien AP′ und P′N′, AP″ und P″N″, ... geht. Denn diese Linien sind wegen der ähnlichen Dreiecke N″AP″, N′AP′, ... in einem konstanten Verhältnisse, oder es ist

$$\frac{P''N''}{AP''} = \frac{P'N'}{AP'} = \ldots, \text{ oder } \frac{y''}{x''} = \frac{y'}{x'} = \ldots = a = \text{tang}\, NAX,$$

Da also die Gleichung $\frac{y}{x} = a$ oder $y = ax$ den für alle Punkte der geraden Linie AN gültigen Zusammenhang der mit x, y bezeichneten Linien ausdrückt, so ist sie mit Recht als algebraische Darstellung der geraden AN zu betrachten.

Zusatz 2. Von den veränderlichen Linien AP, PM heißt jene die Abscisse, beständig mit x, diese PM die Ordinate, beständig mit y bezeichnet, und beide, als zugehörige Linien, heißen die Coordinaten des Punktes M; so wie die diesen Coordinaten parallelen und festen (unveränderlichen) Linien AX, AY die Coordinaten-Axen, und zwar AX die Abscissenaxe oder kurz: die Axe der x, und AY die Ordinatenaxe oder Axe der y. A heißt der Anfangspunkt der Coordinaten. Abscissen, die auf der verlängerten Axe links A, d. i. für Punkte der Linie VV′, die links der Axe der y liegen, genommen werden, bezeichnet man mit $-x$, wie auch die Ordinaten, die unterhalb der Axe der x liegen, mit $-y$.

Es ist ferner klar, daß die Abscisse $AP = x$ die Entfernung des Punktes M von der Axe der y, und die Ordinate $PM = y$ die Entfernung des Punktes M von der Axe der x sey. Endlich ist in der allgemeinen Gleichung (1) die Größe a die Tangente des Winkels, welchen die Gerade VV′ oder BM mit der Abscissenaxe bildet, und die Größe b ist die Ordinate AC der Linie BM für den besondern Werth $x = 0$.

Ist jener Winkel $\mathrm{B} = 0$, d. i. BM mit der Axe der x parallel; so wird $y = b$, oder $y = C$, wenn C überhaupt eine Konstante bezeichnet, ist die Gleichung einer mit der Axe der x parallelen geraden Linie, so wie $x = C'$ die Gleichung einer mit der Axe der y parallelen Linie ist; nämlich in jenem Falle ist y und in diesem x für alle Punkte M der Linie BM von unveränderlicher Länge. Endlich ist $y = 0$ die Gleichung der Axe der x, so wie $x = 0$ die Gleichung der Axe der y.

Zusatz 3. Für eine andere, in derselben Ebene mit BCM liegende, daher auf dieselben Coordinaten-Axen AX, AY bezogene, gerade Linie gilt auf gleiche Weise, wie (1), die allgemeine Gleichung

$$Y = a'X + b', \text{ oder speciell } y = a'x + b',$$

und zwar für denselben Punkt, in welchem sich die zweite angenommene Linie mit der ersten BCM schneidet. Man findet daher aus $y = ax + b$ und $y = a'x + b'$ durch Elimination die Coordinaten jenes Durchschnittspunktes; nämlich

$$x = \frac{b - b'}{a' - a} \text{ und } y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

Hieraus folgt, daß im Allgemeinen die Lage eines Punktes in einer gegebenen Ebene nur durch 2 Gleichungen von der Form

$$x = A;\ y = B$$

bestimmt werde, welche Gleichungen für einen Punkt α) der Abscissen-Axe; β) der Ordinaten-Axe; γ) für den Anfangspunkt A der Coordinaten in diese übergehen:

$\alpha) \ldots x = A,\ y = 0;\ \beta) \ldots x = 0,\ y = B;\ \gamma) \ldots x = 0,\ y = 0.$

Zusatz 4. Soll aber die gerade Linie durch den Punkt M' gehen, deren Coordinaten x', y' gegeben sind; so ist nun die zweite Gleichung $y' = ax' + b$ (Zus. 3.). Daher b eliminirt, hat man

$$(2) \ldots y - y' = a(x - x'), \text{ oder } MR = \text{tang } n \,.\, M'R,$$

gerade so, wie nach §. 88 für $x = 0$ die Ordinate $AC = \text{tang } B \,.\, AB$ ist; daher ist (2) die Gleichung der gesuchten Linie, die durch M' geht. Die Größe a ist, übrigens in (2),

wie die Aufgabe selbst, unbestimmt, d. i. ihr Werth beliebig zu nehmen, weil unendlich viele gerade Linien durch denselben Punkt M' gehen können.

Gesetzt aber, dieselbe Linie solle noch durch einen zweiten Punkt M'' gehen, dessen Coordinaten sind x'', y'', so daß also nebst den 2 Gleichungen

$y = ax + b$ und $y' = ax' + b$ noch die dritte $y'' = ax'' + b$

Statt findet; so erhält man nun durch Elimination der Größen a, b die Gleichung der gesuchten, durch M' und M'' gehenden Linie

$$(5) \ldots y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'), \text{ oder } MR = \frac{M'R'}{M''R'} \cdot M'R,$$

in welcher, da $\frac{M'R'}{M''R'}$, wie $\frac{AC}{AB}$, der Ausdruck von tang n' oder tang B, auch a bestimmt ist.

Auch erhellt, daß der Abstand M'M'' der 2 gegebenen Punkte von einander $= \sqrt{[(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2]}$ sey.

Zusatz 5. Es bilde BM' mit der Axe der x den Winkel m, mit der Axe der y den Winkel n; eben so bilde B'M' die Winkel m' und n' und den Winkel i mit BM'. Demnach ist $m' = m + i$ oder $i = m' - m$ und

$$\text{tang } i = \text{tang}(m' - m) = \frac{\text{tang } m' - \text{tang } m}{1 + \text{tang } m' \cdot \text{tang } m} \text{ (§. 19. nr. 86.)},$$

oder da nach §. 88 tang m' = a' und tang m = a; so hat man

$$\text{tang } i = \frac{a' - a}{1 + a' \cdot a}.$$

Sind daher die 2 geraden Linien parallel, d. i. der W. i = 0; so hat man a' = a; ist aber die zweite B'M' auf die erste BM' senkrecht, folglich tang i = tang $90^0 = \infty$; so hat man $1 + a' \cdot a = 0$, d. i. $a' = -\frac{1}{a}$.

§. 89. Aufgabe. Allgemeine Ausdrücke der Coordinaten-Transformation zu finden.

Auf-

Auflösung. In Fig. 33., wo CR parallel mit AX und auf diese CB senkrecht gezogen ist, seyen $AP = x$ und $PM = y$ die Coordinaten, in Beziehung auf welche wir nach Fig. 32. die Gleichung der Geraden CM ausdrückten. Die neuen, wie jene, ebenfalls auf einander senkrechten Coordinaten, zwischen welchen wir nun speciell eine Gleichung derselben CM suchen, seyen $CP' = x'$ und $P'M = y'$, deren Lage denn gegen die vorigen Coordinaten x, y durch die Größe $AB = A$; $BC = B$ und den Winkel $\alpha (= A')$ gegeben seyn soll.

Den Abstand $CM = 1$ gesetzt, ist

$BQ = x - A = \cos(\alpha + i)$ und $CP' = x' = \cos i$;

$QM = y - B = \sin(\alpha + i)$ und $P'M = y' = \sin i$.

Hieraus hat man nach §. 18. nr. 65. und nr. 69.

$$(4) \ldots \left\{\begin{array}{l} x = A + x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha \\ y = B + x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha \end{array}\right\} \text{ und hieraus}$$

$$(5) \ldots \left\{\begin{array}{l} x' = (y - B)\sin\alpha + (x - A)\cos\alpha \\ y' = (y - B)\cos\alpha - (x - A)\sin\alpha \end{array}\right\}.$$

Diese Ausdrücke stellen denn die allgemeinen Verwandlungen vor, die man mit senkrechten Coordinaten vornehmen kann. Die Werthe nämlich von x und y aus (4) in obiger Gleichung (1) des §. 88 substituirt, wird die Gleichung der Linie CM in Beziehung auf die Coordinaten x', y' erhalten.

Zusatz 1. Stellt man sich in Fig. 32. von dem fixen Punkte A (als Pole) eine gerade Linie zum Punkte M der geraden CM gezogen vor, für welchen Punkt wieder $AP = x$ und $PM = y$ die Coordinaten sind, — und setzt jene Abstandslinie AM (auch **Radius vektor** genannt) $= r$ und den Winkel MAP, den AM mit der Axe der x bildet, $= v$; so hat man

$$x = r \cdot \cos v, \text{ und } y = r \cdot \sin v.$$

Durch Substitution dieser Werthe verwandelt man jeden Ausdruck zwischen rechtwinkligen Coordinaten x, y in einen andern zwischen den **Polar-Coordinaten** r und v.

Will man aber von diesen zu jenen übergehen, so muß man r und v oder ihre Funktionen in x und y ausdrücken. Es ist nämlich im $\triangle PAM$

$r = \sqrt{(x^2+y^2)}$; $\text{tang } v = \frac{y}{x}$; $\sin v = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ und

$$\cos v = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

Zusatz 2. Da man durch Substitution der durch die obigen Gleichungen (4) gegebenen Werthe von x und y in irgend einer Gleichung des mten Grades für die Coordinaten x, y offenbar wieder eine Gleichung desselben Grades für x' und y' bekommt; so hat man mit Recht die Ordnungen verschiedener Curven, in wiefern für sie algebraische Gleichungen Statt finden, nach dem Grade eben dieser Gleichungen benannt; so gehören z. B. zur zweiten Ordnung alle Curven, die durch Gleichungen mit zwei Abmessungen oder vom zweiten Grade ausgedrückt, d. i. deren Natur oder Haupteigenschaften aus den für sie aufgefundenen Gleichungen erkannt werden können. Curven der zweiten Ordnung sind die sogenannten Kegelschnitte (Sectiones conicae). Die Curve der ersten Ordnung ist die gerade Linie, deren allgemeine Gleichung $y = ax+b$ (§. 88). Diese Curven selbst pflegt man wieder von den transcendenten zu unterscheiden, für welche keine algebraischen Gleichungen Statt finden.

§. 90. Aufgabe. Die Gleichungen der Kegelschnitte zu finden.

Auflösung. I) Durch Vereinfachung der allgemeinen Gleichung der Curven zweiter Ordnung

$$(\varphi) \ldots Px^2 + Qy^2 + Rxy + Px + Ty + 1 = 0,$$

in welcher P, Q, ... konstante Größen bezeichnen.

Um vorerst (φ) auf eine Gleichung zwischen andern Coordinaten zu bringen, substituire man in (φ) den Gleichungen (4) des §. 89 gemäß $x.\cos\alpha - y.\sin\alpha$ statt x und $x.\sin\alpha + y.\cos\alpha$ statt y. Diese Substitution gibt statt des Gliedes Rxy mittelst gehöriger Reduktion die Größe

$$xy[(Q-P)\,2\sin\alpha.\cos\alpha + R(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2)];$$

man hat also statt des Faktors R von xy nun vermöge §. 22 nn. 146. 151. den Faktor

$$(f) \ldots (Q-P)\sin 2\alpha + R\cdot\cos 2\alpha = \sin 2\alpha - \frac{R}{P-Q}\cdot\cos 2\alpha,$$

indem Alles durch $Q-P=-(P-Q)$ dividirt wird. Man setze endlich, da der Winkel α (Fig. 33.) beliebig genommen werden kann, $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ oder $\text{tang}\, 2\alpha = \frac{R}{P-Q}$; so verschwindet der Faktor (f) von xy und somit das Glied selbst, das statt Rxy in der neuen Gleichung Statt fände. Da nun die übrigen Glieder von (φ) nach vollbrachter Substitution dieselbe Form beibehalten; so geht die Gleichung (φ) ihrer Allgemeinheit unbeschadet in diese über:

$$(\varphi') \ldots Px^2 + Qy^2 + Rx + Sy + 1 = 0,$$

in welcher nur P, Q, ... andere Werthe als in (φ) bezeichnen.

Man verändere ferner den Anfangspunkt der Coordinaten (§. 88. Zus. 2.), indem man nach den Gleichungen (4) des §. 89 statt x substituirt $x+A$ und $y+B$ statt y. Dadurch erhält man, das mit keiner der variablen Größen als Faktor behaftete Glied kurz mit T bezeichnend, die Gleichung

$$(\varphi'') \ldots Px^2 + Qy^2 + (2AP+R)x + (2BQ+S) + T = 0.$$

Um hieraus auch die 2 vorletzten Glieder verschwinden zu machen, setze man, da die Werthe von A und B willkührlich zu wählen sind, $A = -\frac{R}{2P}$ und $B = -\frac{P}{2Q}$. Unter dieser Voraussetzung erhält man statt (φ'') die Gleichung

$$(\varphi''') \ldots Px^2 + Qy^2 + T = 0.$$

Da aber jene 2 Glieder oder ihre Faktoren unserer Voraussetzung zufolge nur dann verschwinden können, wenn keine der Größen P, Q gleich 0 ist; so erhellt, daß bei dieser Vereinfachung der Gleichung (φ) drei Fälle zu unterscheiden sind; 1) wenn P und $Q=0$ sind, dann gehört (φ'), als Gleichung des ersten Grades, der geraden Linie an, bietet also für die Auflösung unserer Aufgabe kein Resultat dar; — 2) wenn man nur eine jener Größen $=0$ setzt, z. B. P, dann geht (φ') in

$$Qy^2 + Rx + Sy + 1 = 0$$

und diese Gleichung mittelst obiger Substitution wieder in diese über:

$$Qy^2 + (2BQ + S)y + R.x + B^2Q + AR + BS + 1 = 0.$$

Man setze $B = -\frac{S}{2Q}$; so verschwindet das zweite Glied, und man hat durch Reduktion, Versetzung und Division mit Q die Gleichung:

$$y^2 - \frac{S^2}{4Q^2} + \frac{1}{Q} + \frac{AR}{Q} = -\frac{R}{Q}.x,$$

oder, indem man $A = \frac{S^2}{4RQ} - \frac{1}{R}$ und $\frac{R}{Q} = -2p$ setzt,

$$(\alpha) \ldots y^2 = 2px.$$

Man erhält auch (α), wenn man bloß $Q = 0$ setzt. Die mit 2p bezeichnete Größe heißt der Parameter der Curve, und ist überhaupt eine konstante gerade Linie, mit welcher die Coordinaten verglichen werden.

5) Wenn weder P noch Q gleich 0 ist, so daß man nach Obigem eine Gleichung von der Form (φ'''), nämlich

$$Px^2 + Qy^2 = 1$$

hat; so kommt entweder jeder der Größen P, Q ein — Werth zu, und die Gleichung selbst ist unmöglich; oder beide Größen haben einen + Werth, z. B. $P = \frac{1}{a^2}$ und $Q = \frac{1}{b^2}$; dann hat man

$$(\beta) \ldots \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

oder es ist z. B. $P = +\frac{1}{a^2}$ und $Q = -\frac{1}{b^2}$; so hat man

$$(\gamma) \ldots \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

welche Gleichung man auch findet, wenn man $P = -\frac{1}{a^2}$ und $Q = +\frac{1}{b^2}$ setzt, indem man nur x in $\frac{ay}{b}$ und y in $\frac{bx}{a}$ verwandelt.

II. Durch den Schnitt des geraden Kegels (Geom. §. 170).

1) Die Curve der zweiten Ordnung, für welche die Gleichung (α) zwischen rechtwinkligen Coordinaten gilt, ist eine solche, in welcher das Quadrat jeder Ordinate y gleich ist dem Rechtecke unter dem Parameter 2p und der Abscisse x, oder in welcher sich die Quadrate der Ordinaten zu einander verhalten, wie die entsprechenden Abscissen. Denn wie $y^2 = 2px$, so ist auch $y'^2 = 2px'$, folglich $y^2 : y'^2 = x : x'$.

Es entspricht also jeder größeren Abscisse eine größere Ordinate, und umgekehrt. Daher ist die Curve, für die (α) gilt, eine nicht in sich zurückekehrende, oder ihre Aeste AR, AS (Fig. 54.) laufen auf beiden Seiten der Abscissen-Axe AX in's Unendliche aus, und zwar symmetrisch und ohne auf die Seite der Axe AY zu treten, indem vermöge (α) auch $y = \pm\sqrt{2px}$ ist, d. i. jeder + Ordinate, z. B. PM eine gleiche — Ordinate Pm entspricht, und weil für — x die Gleichung oder die Ordinate y unmöglich wird (vergl. §. 88. Zus. 2.).

Daß diese, mit dem Namen Parabel belegte, Curve ein Kegelschnitt sey, d. i. dadurch entstehe, daß ein gerader Kegel DBC (Fig. 55.) von einer Ebene parallel mit einer Seite des Kegels geschnitten wird, erhellt kurz so: Stellt man sich durch den Scheitelwinkel D des Kegels die Ebene DBC gelegt vor; so ist auf diese sowohl die Ebene AMm (die sich mit jener in der Axe AP schneidet), als auch die Grundfläche BMCB des Kegels (die sich mit BCD in BC schneidet) senkrecht; demnach ist auch die gemeinschaftliche Durchschnittslinie Mm der letzten Ebenen AMm und BMCB ein Perpendikel auf die Ebene DBC (Geom. §. 156. Zus. 4.), also Mm sowohl auf AP, als auf BC senkrecht (Geom. §. 149.), d. i. MP sowohl Ordinate y für den Kreis, als für die Curve AMm, in Ansehung welcher die der y entsprechende Abscisse AP = x ist.

Nun ist (Geom. §. 124. Zus. 1.)

$$BP : PM : PC\ (= AE),\ \text{d. i. } y^2 = BP \cdot AE.$$

Aber wegen der ähnl. Drei. ADE, ABP ist

$$DE : AE = AP : BP,\ \text{d. i. } BP = \frac{AE}{DE} \cdot x,\ \text{folglich}$$

$$y^2 = \frac{AE^2}{DE} \cdot x \text{ oder } y^2 = 2p \cdot x,$$

indem die Größe $\frac{AE^2}{DE}$ gleich dem Parameter 2p gesetzt werden kann. Denn wegen DE : AE : 2p bezeichnet jener Ausdruck eine gerade und zwar konstante Linie, so lange das Dreieck ADE oder der Anfangspunkt A der Abscissen unverändert bleibt. Ferner folgt aus obiger Gleichung die Proportion $x : y : \frac{AE^2}{ED}$, aus welcher klar erhellt, daß der letztere Ausdruck oder das Drei. ADE zur Vergleichung und Bestimmung der veränderlichen Größen x, y diene. Es ist also die Parabel, deren Gleichung ist $y^2 = 2px$ ein Kegelschnitt.

2) Aus (β) hat man, die Abscisse vom Mittelpunkte A an genommen,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ oder } y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Setzt man hierin $x = a$, d. i. nach Fig. 36. $AP = AB$; so wird $y = 0$; für $x = 0$ wird $y = \pm b$; für $y = 0$ wird $x = \pm a$, und für $x > a$ wird y imaginär oder unmöglich. Weil überdieß jeder + Ordinate eine gleiche — Ordinate entspricht; so folgt aus dem Gesagten, daß die Curve, deren Gleichung (β) ist, eine in sich zurückkehrende (wie die Kreislinie) und zu beiden Seiten der zwei Coordinaten-Axen BC, DE symmetrisch liegende Curve sey, welche den Namen Ellipse erhielt.

Der Anfangspunkt A der Coordinaten heißt Mittelpunkt; $AB = AC = a$ die halbe große Axe (axis major, primus, principalis, transversus) und $AD = AE = b$ die halbe kleine Axe (axis minor, secundus, rectus) der Ellipse.

Nimmt man zur Ordinate $PM = y$ die Abscisse $BP = X$ vom Scheitel B der Ellipse an; so geht (β), indem man statt x oder AP den Werth $a - X$ setzt, in die Gleichung über:

$$(\beta') \ldots y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2aX - X^2) \text{ oder } y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(2aX - X^2)}.$$

Diese Curve, für welche (β) oder (β′) gilt, ist wieder ein Kegelschnitt, oder entsteht dadurch, daß ein gerader Kegel von einer Ebene geschnitten wird, welche sich mehr zur Grundfläche des Kegels neigt, als eine Seite desselben.

Sey BmCMB (Fig. 37.) die durch diesen Schnitt erzeugte Curve. Man ziehe mit dem Durchmesser der Grundfläche des Kegels parallel CH und BI, und EF sey der Durchmesser eines mit jener Grundfläche parallelen Kreises. Es ist dann wieder, wie vorhin unter 1), Mm sowohl auf EF, als auf BC senkrecht, daher die rechtwinkligen Coordinaten $PM = y$ und $BP = X$ (diese vom Scheitel B an genommen), und PM^2 oder $y^2 = EP \cdot PF$. Aber mittelst der ähnlichen Dreiecke BEP und BHC, dann CPF und CBI findet man

$$EP = \frac{CH \cdot BP}{BC} = \frac{CH \cdot X}{2a} \text{ und } PF = \frac{(2a - X) \cdot BI}{2a}, \text{ daher}$$

$$y^2 = \frac{CH \cdot BI}{2a} \cdot \frac{2aX - X^2}{2a},$$

oder wenn man den ersten Faktor aus denselben Gründen, wie vorhin unter 1), gleich 2p setzt, die Gleichung:

$$(\beta'') \ldots y^2 = 2pX - \frac{pX^2}{a}, \text{ oder } y = \pm\sqrt{\left(2pX - \frac{pX^2}{a}\right)}.$$

Für $X = AB$ (Fig. 36.) $= a$ wird $y^2 = AE^2 = b^2 = ap$, daher $\frac{b^2}{a} = p$; diesen Werth statt p in (β″), oder p statt $\frac{b^2}{a}$ in (β′) substituirt, geht im ersten Falle die Gleichung (β″) in (β′), und im zweiten Falle (β′) in (β″) über. Eben so in (β″) zugleich statt X den Werth $a - x$ (d. i. $AB - AP$ statt BP) substituirt, hat man die Gleichung (β).

Es ist also der mit dem Namen Ellipse belegte Kegelschnitt keine andere Curve, als diejenige, für welche wir ursprünglich die Gleichung (β) fanden, und die Gleichung (β″) ist die allgemeine Gleichung der Ellipse zwischen den rechtwinkligen Coordinaten (diese vom Scheitel B der Curve angerechnet).

5) Aus der Gleichung (γ) ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \text{ oder } y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)},$$

welche Gleichungen erkennen lassen, daß, so lange AP (= x) (Fig. 58.) $< \pm a$ (d. i. $< \pm AB$), y unmöglich ist, oder kein Punkt der Curve zwischen B und B' liege; daß aber für $\pm x > \pm a$ auch die Ordinate y einen größeren $\pm$Werth bekommt. Daher ist denn die Curve, deren Gleichung (γ) ist, eine solche, deren symmetrische Aeste BM, BN und B'M', B'N' zu beiden Seiten der Coordinaten-Axen AX, AY in's Unendliche auslaufen.

Nimmt man die Abscisse X = BP vom Scheitel B der Curve; so ist $x = a + X$, daher durch Substitution dieses Werthes in (γ) nun die Gleichung

$$(\gamma') \ldots y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2aX + X^2), \text{ oder } y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(2aX + X^2)}.$$

Auch diese, Hyperbel genannte, Curve entspringt, wenn ein gerader Kegel (Fig. 59.) von einer Ebene geschnitten wird, die sich weniger, als des Kegels Seiten, zu dessen Grundfläche neigt. Zugleich erhellt, daß, wenn man sich einen gleichen geraden Kegel KF'G' mit seiner Spitze aus die des vorigen Kegels KFG gestellt denkt, dieselbe schneidende Ebene jenen zweiten Kegel treffen, folglich eine Curve B'M'N' entstehen müsse, ähnlich und gleich der Curve BMN.

Zieht man nun mit FG oder F'G' parallel BD, B'D' und setzt PM = y und BP = X; so hat man, wie bei der Ellipse unter 2), $PM^2 = y^2 = FP \cdot PG$. Aber mittelst der ähnlichen Dreiecke FB'P und DB'B, dann BPG und BD'B' wird

$$FP = \frac{B'P \cdot BD}{BB'} = \frac{(2a + X) \cdot BD}{2a} \text{ und}$$

$$PG = \frac{BP \cdot B'D'}{BB'} = \frac{X \cdot B'D'}{2a}$$

entwickelt; demnach wieder, wie oben, $\frac{BD \cdot B'D'}{2a} = 2p$ gesetzt, findet man

$$(\gamma'') \ldots y^2 = 2pX + \frac{pX^2}{a}, \text{ oder } y = \pm\sqrt{\left(2pX + \frac{pX^2}{a}\right)},$$

d. i. die allgemeine Gleichung dieses Kegelschnittes zwischen den rechtwinkligen Coordinaten und die Abscissen vom Scheitel B des Schnittes an genommen.

Wie man ferner analog mit der Ellipse den Anfangspunkt A der Coordinaten in der Gleichung (γ) Mittelpunkt der Hyperbel nennt; eben so heißt auch hier die mittlere stetige Proportionale zwischen der halben großen Axe AB und dem halben Parameter p die halbe kleine Axe = AL = AL' = b; d. i. auch für die Hyperbel ist, wie für die Ellipse, $b^2 = ap$ oder $p = \frac{b^2}{a}$. Diesen Werth statt p in (γ'), oder $\frac{b^2}{a}$ statt p in (γ'') substituirt, hat man im ersten Falle die Gleichung (γ'') und im zweiten die Gleichung (γ').

Zusatz 1. Der Parameter 2p, als konstante gerade Linie, läßt sich für die genannten Kegelschnitte konstruiren:

a) für die Hyperbel. Nach Obigem ist 2a : BD = B'D' : 2p; aber auch, wenn man Be = BD macht und ep' parallel BD zieht, ist in den ähnl. Drei. B'D'B, ep'B

$$BB' : B'D' = Be : ep', \text{ d. i. } \frac{B'D' \cdot BD}{2a} = ep' = 2p.$$

b) Für die Ellipse findet man auf gleiche pe = 2p (Fig. 37.).

c) Für die Parabel. Nach dem Werthe von 2p unter 1) ist DE : AE : 2p. Macht man nun in Fig. 35. De = AE und zieht ep ∥ EA; so ist auch DE : EA : ep, also ep = 2p.

Ist also der gerade Kegel und die Neigung des Schnittes zu jener Grundfläche gegeben; so ist auch allzeit der Parameter der Curve oder der Hauptaxe derselben gegeben.

Zusatz 2. Setzt man in (β'') und (γ'') a oder 2a = ∞, so erhält man die Gleichung (α) für die Parabel; d. i. diese Curve läßt sich als Ellipse oder Hyperbel behandeln, deren große Axe unendlich ist. — Setzt man eben so in (γ) a = — a; so geht die Gleichung der Hyperbel in die der Ellipse über, oder jene Curve läßt sich wie eine Ellipse behandeln, deren große Axe mit — genommen wird.

Setzt man bei der Ellipse b = a (Fig. 36); so geht sie in den Kreis über, welcher ebenfalls als Kegelschnitt zu betrachten ist, dadurch entstehend, daß ein gerader Kegel parallel mit sei-

zur Grundfläche von einer Ebene geschnitten wird. Daher ist unter jener Voraussetzung (a = b) vermöge (β)

$$(\delta) \ldots y^2 = a^2 - x^2, \text{ oder } y = \pm\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

die Gleichung für den Kreis, die Abscisse AP vom Mittelpunkte A genommen, welcher denn die Ordinate PN = y entspricht. Nimmt man aber die Abscisse vom Scheitel B an; so gilt vermöge (β')

$$(\delta') \ldots y^2 = 2aX - X^2, \text{ oder } y = \pm\sqrt{(2aX - X^2)}.$$

§. 91. Erklärungen. Sey MAM' (Fig. 40.) eine Curve der zweiten Ordnung mit den Coordinaten AP = x' und PM = y'; so ist

1. die Gerade BT, welche diese Curve in dem einzigen Punkte M berührt, Tangente der Curve für eben diesen Punkt M, die Richtung gleichsam angebend, welche die Curve in M hat.

2. Der Theil BP der Abscissen-Axe zwischen der Tangente BM und der Ordinate PM heißt Subtangente für denselben Punkt M.

3. Das bis zur Axe der x verlängerte Perpendikel MN auf die Tangente im Berührungspunkte M — heißt Normale und

4. der Theil PN aus der Axe AX zwischen der Normale MN und der Ordinate PM heißt Subnormale der Curve für den Punkt M.

5. Der Punkt F (z. B. Fig. 38) der Axe der x, in welchem die Ordinate $F\mu$ gleich ist dem halben Parameter p wird Brennpunkt (focus) und

6. jede Gerade, vom Brennpunkte zu einem Punkte der Curve gezogen, wie z. B. FM, Radius vektor der Curve genannt.

§. 92. Aufgabe. Für die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale einer Curve der zweiten Ordnung Gleichungen oder allgemeine Ausdrücke zu finden.

Auflösung. Die 2 Gleichungen (2), (3), (4) des §. 90 I. können durch die einzige

$$(1) \ldots Ax^2 + By^2 + Cx + D = 0$$

dargestellt werden, folglich gilt hinsichtlich der Curve MAM' (Fig. 40.) die Gleichung

$$(2) \ldots Ax'^2 + By'^2 + Cx' + D = 0 \ (\S. 91.).$$

Ferner ist nach §. 88. Zus. 4., P statt a gesetzt, die Gleichung der geraden, durch M gehenden Linie Mm

$$(3) \ldots y - y' = P(x - x'),$$

in welcher nur P unbestimmt ist.

Stellt man sich nun (1) und (3) als zusammengehörend, und statt x oder y den Werth z. B. aus (3) in (1) (oder umgekehrt) substituirt vor; so erhält man in jedem Falle eine Gleichung der zweiten Ordnung; ein Zeichen, daß Mm eine Curve, wie AMM', der zweiten Ordnung in zwei verschiedenen Punkten M, m schneide.

Läßt man weiter die Gerade Mm sich um M als festen Punkt gegen A hin drehen; so wird der Punkt m, in welchem Mm die Curve schneidet, dem andern Durchschnittspunkte M immer näher und näher rücken, bis er mit diesem zusammenfällt, oder die Gerade Mm in die Lage von BM gekommen ist. Wir sehen hiedurch eine Linie BM nothwendig entstehen, welche die Curve, ohne die Curve noch in einem andern Punkte m zu schneiden, in M berührt, d. i. eine Tangente der Curve MAM' für den Punkt M. Da sich die übrigen Linien, Subtangente, Normale ꝛc. auf diese BM oder BT beziehen; so ist zugleich auch der Ursprung dieser Linien in Beziehung auf eine Curve der 2ten Ordnung nachgewiesen.

Um nun P in (3) zu bestimmen, ist die Differenz von (1) und (2)

$$(4) \ldots A(x+x')(x-x') + B(y+y')(y-y') + C(x-x') = 0;$$

daher durch Substitution des Werthes von $y-y'$ aus (3) in (4) und durch Reduktion

$$(5) \ldots A(x+x') + BP(y-y') + C = 0.$$

Weil nun m und M zusammenfallen sollen, demnach $x = x'$ und $y = y'$ seyn muß; so ist

$$(6) \ldots 2Ax' + 2By' + C = 0,$$

und hieraus

$$\frac{y}{x} = -\frac{2Ax'+C}{2By'};$$

also die für die Tangente gesuchte allgemeine Gleichung vermöge (5)

$$(7) \ldots y-y' + \frac{2Ax+C}{2By'}(x-x') = 0.$$

Da die Normale MN auf BT in M senkrecht ist, so ist vermöge §. 88. Zus. 5. die Gleichung für die Normale einer Curve der 2ten Ordnung

$$(8) \ldots y-y' - \frac{2By'}{2Ax'+C}(x-x') = 0.$$

Es ist ferner P oder $a = \text{tang MBX}$ (§. 88) $= \frac{PM}{BP}$, also die Subtangente

$$(9) \ldots BP = \frac{y'}{P} = -\frac{2By'^2}{2Ax'+C}.$$

Weil endlich BP : PM : PN (Geom. §. 124. 2)) ist; so hat man den Ausdruck für die Subnormale

$$(10) \ldots PN = \frac{y'^2}{\text{Subtang.}} = -\frac{2Ax'+C}{2B}.$$

Eben so ist allgemein auch die Normale

$MN = \sqrt{(y'^2 + \text{Subnorm.}^2)}$, u. Tangente $BT = \sqrt{(y'^2 + \text{Subt.}^2)}$.

B.

Besondere Betrachtung der einzelnen Kegelschnitte.*)

a) Parabel.

§. 95. Aufgabe. Die Gleichung der Parabel zwischen den Polarcoordinaten r und v, oder die Polargleichung zu finden.

*) Hierüber, wie über A., vergl. „Biot's Versuch einer analyt. Geom." Uebersetzt mit Zusätzen v. Dr. Ahrens (Nürnb. 1817).

Auflösung. Vermöge der Gleichung $y^2 = 2px$ für die Parabel ist, $y = p$ gesetzt, $x = \frac{1}{2}p$. Nimmt man also AF (Fig. 54) $= \frac{1}{2}p$, so ist $FM = p$, d. i. dem halben Parameter, daher F der Brennpunkt und FM ein Radius vektor der Parabel (§. 91. 5. 6.). Da man sich nun diese Curve, wie jeden Kegelschnitt, durch die stetige Bewegung eines Punktes M bei einem gewissen Abstande von F entsprungen denken kann; so ist hier nach §. 89. Zus. 1. F der Pol; der Radius vektor $FM = r$, nun die veränderliche Coordinate, und der Polarwinkel $AFM = v$. Man hat sohin

$$r = \sqrt{(x^2+y^2)} = \sqrt{(FP^2+PM^2)} = \sqrt{[(x-\tfrac{1}{2}p)^2+2px]}$$

$$= \tfrac{1}{2}p+x, \text{ und } \cos v = -\frac{FP}{r} = \frac{\frac{1}{2}p-x}{r}.$$

Aus dieser letzten Gleichung den Werth von $x = \frac{1}{2}p - r\cos v$ in der vorigen substituirt, ist die gesuchte Polargleichung

$$r = \frac{p}{1+\cos v} = \frac{p}{2\cos\frac{1}{2}v^2} \text{ (§. 22. nr. 152.)} = \frac{\frac{1}{2}p}{\cos\frac{1}{2}v^2}.$$

§. 94. Lehrsatz. Macht man die Verlängerung AB der Abscissen-Axe gleich $AF = \frac{1}{2}p$ und errichtet in B ein indefinites Perpendikel ZZ' (die Direktrix), so steht von diesem jeder Punkt M der Parabel so weit ab, als vom Brennpunkte, oder es ist $MQ = MF$.

Beweis. Nach §. 93 ist $r = MF = \frac{1}{2}p + x = AF + AP = BP$; aber auch $MQ = BP$, folglich $MQ = MF$.

Zusatz. Man kann sich dieses Satzes bedienen, um die Punkte der zu beschreibenden Parabel zu finden, wenn die Axe AX, der Scheitel A und der Brennpunkt F gegeben sind. Errichtet man nämlich indefinite Lothe wie Pm, $P'm'$, ...; so werden die mit den Halbmessern BP, BP', ... von F aus auf jenen Lothen abgeschnittenen Punkte m, m, ... Punkte der zu beschreibenden Parabel seyn.

§. 95. Aufgabe. Für den Punkt M der Parabel die Tangente zu ziehen.

Auflösung. Die den Winkel FMQ halbirende Linie MT ist die verlangte Tangente.

Beweis. Jeder andere Punkt p der MT liegt außer der Curve. Denn läge p noch in dieser; so wäre pf = pq (§. 94). Nun ist Fb = bQ und die Winkel um b sind gleich, also rechte Winkel, demnach Fp = pQ. Es wäre folglich auch pq = pQ, was unmöglich ist.

Zusatz. Wegen der Kongruenz der Dreiecke TFb und bQM ist TF = QM = BP, daher auch TA = AP, d. i. der Abstand des Zusammenstoßungspunktes T der Tangente vom Scheitel A der Parabel gleicht der Abscisse.

§. 96. Aufgabe. Die Gleichungen oder Werthe der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale zu finden.

Auflösung. Die Gleichung der Parabel, mit der allgemeinen §. 92. (1), nämlich

$$y'^2 - 2px' = 0 \text{ mit } Ax^2 + By^2 + Cx + D = 0$$

verglichen, erhellt, daß hinsichtlich der Parabel A = 0, B = 1, Cx = − 2p und D = 0 sey, daß folglich die allgemeine Gleichung (7) des §. 92 in diese für die Tangente der Parabel übergehe:

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x') = 0, \text{ oder } yy' - y'^2 - p(x - x') = 0,$$

oder $yy' + p(x + x') = 0$, indem $y'^2 = 2px'$ ist.

Eben so hat man vermöge (8) §. 92 nun für die Normale der Parabel die Gleichung

$$y - y' - \frac{y'}{p}(x - x') = 0.$$

Ferner gehen die dortigen allgemeinen Ausdrücke der Subtangente und Subnormale in diese

$$TP = 2x' \text{ und } PN = p$$

über, d. i. die Subtangente der Parabel ist gleich der doppelten Abscisse (= 2AP) und die Subnormale ist gleich dem halben Parameter, also eine Konstante und gleich der durch den Brennpunkt gehenden Ordinate FM'.

Endlich ist auch die Normale $MN = y'(2px' + p^2)$ und die Tangente $MT = y'(2px' + 4x'^2)$ (§. 92).

Zusatz 1. Da $FM = MQ = FN = FT$ (§. 95. Zus.), d. i. $FM = FN = FT$ ist; so darf man nur den Radius vector FM die Linien FT, FN gleich machen, um die Tangente MT und Normale MN für den Punkt M zu konstruiren.

Zusatz 2. In der vorigen Auflösung fanden wir hinsichtlich der Parabel die Größe $P = \frac{p}{y}$; aber a oder $P = \tang MTX$ (§. 88) $= \tang w$, folglich auch $\tang w = \frac{p}{y}$. Weil ferner den Winkel $FMT = \omega$ gesetzt, $\omega = 180^\circ - MFT - MTX$ oder $\omega = (180^\circ - v) - w$ ist; so hat man nach §. 19. nr. 86., da $\tang(180^\circ - v) = -\tang v$ (§. 7. Zus. 2.)

$$\tang \omega = -\frac{P + \tang v}{1 - P \cdot \tang v}.$$

Aber nach §. 89. Zus. 1. ist $\tang v = -\frac{y'}{x} = \frac{y'}{FP} = \frac{y'}{x' - \frac{1}{2}p}$ (§. 93); welchen Werth in der vorigen Gleichung substituirt, dann gehörig reducirt, findet man

$$\tang \omega = \frac{-Px' + \frac{1}{2}pP + y'}{x' - \frac{1}{2}p^2 + Py'} \text{ (und } \frac{p}{y} \text{ statt P gesetzt)}$$

$$= \frac{-\frac{px'}{y'} + \frac{\frac{1}{2}p^2}{y'} + y'}{x' - \frac{1}{2}p^2 + p}.$$ Den Zähler auf einerlei Nenner gebracht, statt y'^2 substituirt $2px'$ und reducirt, hat man

$$\tang \omega = \frac{px' + \frac{1}{2}p^2}{x'y' + \frac{1}{2}py'} = \frac{p}{y'}.$$

Also ist der Winkel ω = dem W. w oder $FMT = MTX$; zieht man daher durch M parallel mit AX die gerade MR'; so ist der Winkel $pMR' = MTX = FMT$, d. i. die Tangente TMp bildet mit MR und mit FM gleiche Winkel. Daher ist auch der Einfallswinkel (ang. incidentiae) FMN = dem Ausfallswinkel (ang. reflexionis) NMR'; folglich ver-

einen parabolischen Spiegel die parallel mit seiner Axe einfallenden Strahlen im Brennpunkte, und umgekehrt.

§. 97. Erklärungen. 1. Jede durch den Mittelpunkt eines Kegelschnittes gehende Sehne heißt Durchmesser, und wenn dieser eine Reihe paralleler Sehnen halbirt; so sind diese die ihm zu- oder beigeordneten Sehnen oder Ordinaten. Unter den Letzteren findet sich immer ein dem vorigen zugeordneter Durchmesser. Der Winkel, unter welchem sich Beide schneiden, heißt Conjugationswinkel. Ist dieser $= 90°$, wie z. B. bei der Ellipse in Beziehung auf die Axen BC_1, DE (Fig. 56.); so nennt man diese Durchmesser auch die Hauptdurchmesser der Curve.

2. Da die Parabel keinen Mittelpunkt hat, oder ein solcher nur in einem unendlichen Abstande vom Scheitel A angenommen werden kann, wonach jede durch ihn gehende Gerade parallel der Axe AX wird; so nennt man jede solche Parallele, wie Mq (Fig. 41.), die die Parabel in einem Punkte M trifft, den Durchmesser der Parabel. Die mit der Tangente MT, die für den Scheitel M des Durchmessers gezogen ist, parallele Sehne cc oder ihre Hälfte heißt Ordinate des Durchmessers; die zugehörige Abscisse ist dann Md.

§. 98. Lehrsatz. Der Durchmesser Mq halbirt seine Ordinaten, oder es ist $de = dc$.

Beweis. Zieht man AQ und $ic \parallel Pm$, begrenzt in dem verlängerten Durchmesser qMQ; so ist

1) $\triangle ATh \sim \triangle hmQ$ wegen der wechselseitig gleichen Winkel und $TA = AP$ (§. 95. Zus.) $= QM$, daher auch, zu beiden Dreiecken AhMP hinzugethan, $\triangle PTM = PQ$.

2) Die ähnlichen Dreiecke PTM, icB verhalten sich wie $PM^2 : ic^2$ (Geom. §. 133. Zus. 1.) $= AP : Ai$ (§. 90. II. 1.) $= PQ : iQ$ (Geom. §. 111. Zus.), d. i. $PTM : PQ = icB : iQ$; aber $PTM = PQ$, folglich auch $icB = iQ$.

3) Zieht man auch $ge \parallel PM$; so hat man eben so $PTM : geA = PM^2 : ge^2 = AP : Ag = PQ : gQ$, daher wieder $geA = gQ$,

$= gQ$, und, von beiden Figuren dasselbe icdfgi weggenommen, $dfe = cld$. Diese Dreiecke sind aber auch ähnlich, folglich kongruent; also $de = dc$.

§. 99. Lehrsatz. Auch die Quadrate der Ordinaten cd, An des Durchmessers Mq der Parabel verhalten sich, wie ihre entsprechenden Abscissen.

Beweis. Wegen der Gleichheit der Dreiecke ATh, hMQ (§. 98. 1.)) ist $\triangle ikT = iQ + klM$, folglich da $\triangle icB = iQ$ (§. 98. 2)), auch $cT = klM$. Eben so ist $\triangle AnQ = Tn$ wegen $\triangle ATh = \triangle hMQ$. Aber die ähnl. Drei. dcl, AnQ verhalten sich $= cd^2 : An^2$ oder $= d'T : Tn$, und letztere Parallelogramme $= Md : Mn$ (wegen einerlei Höhe); folglich ist

$$cd^2 : An^2 = Md : Mn, \text{ oder } y'^2 : Y'^2 = x' : X'.$$

Zusatz 1. Da man die Glieder des vorstehenden letzten Verhältnisses auch mit $2p'$ (dem Parameter des Durchmessers) multipliziren kann; so erhellt, daß dieselbe Gleichung $y'^2 = 2p'x'$ hinsichtlich der auf die Durchmesser bezogenen Parabel gelte, wie für die Hauptcoordinaten-Axen, daß man daher auch dieselben Haupteigenschaften dieser Curve finde, man mag sie auf diese Axen oder auf die Durchmesser beziehen.

Zusatz 2. Aus $An^2 = 2p' \cdot Mn$ ist $2p' = \frac{An^2}{Mn} = \frac{TM''}{TA}$ $= \frac{TM^2}{AP} = \frac{TP^2 + PM^2}{AP} = \frac{4x^2 + 2px}{x}$ (§. 96.) $= 4x + 2p$, oder $p' = 2(\frac{1}{2}p + x) = 2FM$ (§. 94.), d. i. der halbe Parameter p' des Durchmessers Mq der Parabel gleicht dem doppelten Radius vektor für den Punkt M, oder dem doppelten Abstande des Scheitels M dieses Durchmessers vom Brennpunkte; oder dieser Abstand ist gleich dem vierten Theile des Parameters des Durchmessers.

Zusatz 3. Da $2p' = 4x + 2p$, so ist der Parameter des Durchmessers so lange größer, als der der Hauptaxe, bis $x = 0$ wird, d. i. M mit A zusammenfällt.

Zusatz 4. Nimmt man auf Mq die Abscisse $x' = \frac{1}{2}p'$; so kann man sich den Punkt n, wie bei der Hauptaxe AX, als

Brennpunkt vorstellen, und es ist denn auch hier, weil $y'^2 = 2p' \cdot x' = 2p' \cdot \frac{1}{2}p' = p'^2$ ist, $y' = p'$, d. i. die durch den Brennpunkt n gehende Ordinate des Durchmessers gleich dessen halbem Parameter (§. 91. Zus. 5.).

Anmerkung. Die Auflösung des berühmten Delischen Problems „den Altar des Apollo zu verdoppeln" beruht darauf, zwischen 2 gegebenen geraden Linien p, q zwei mittlere stetige Proportionallinien y, z zu finden (Geom. §. 130 Anm. 2. und §. 186. Anm.). Ohne noch höhere Curven, z. B. die Cissoide des Diokles oder die Conchoide des Nikomedes, als Mittel zur Erreichung jenes Zweckes zu wählen, führt schon die Konstruktion zweier Parabeln (Fig. 40.) zur Konstruktion der 2 gesuchten Linien. Weil nämlich seyn soll

$$p : y : z : q, \text{ oder } p : y = y : z = z : q,$$

hieraus aber die 2 Gleichungen

$$y^2 = pz \text{ und } z^2 = qy$$

folgen, deren jede die einer Parabel ist; so wird man beiden Genüge thun, indem man aus demselben Anfangspunkte A auf den rechtwinkligen Coordinatenaxen AX, AY zwei Parabeln beschreibt (§. 94. Zus.), dann aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte die Perpendikel MP, MQ auf die Axen fällt. Man hat, indem man p und q die ganzen Parameter bedeuten läßt,

$PM^2 = p \cdot AP$, d. i. $y^2 = p \cdot z$ und $MQ^2 = q \cdot AQ$, d. i. $z^2 = q \cdot y$, folglich $y = AQ$ und $z = AP$, oder

$$p : AQ : AP : q.$$

b) Ellipse.

§. 100. Eigenschaften der Ellipse, diese auf die Axen bezogen. (Vergl. §. 90. II. 2)).

1. Aus der Gleichung (β') des §. 90. II. folgt die Proportion

$$y^2 : (2a - x) = b^2 : a^2;$$

aber $(2a - x)x = CP \cdot PB$ (Fig. 36.) heißt das Rechteck unter den Abscissen, und $b^2 : a^2$ ist ein konstantes Verhältniß, folglich ist die Ellipse eine Curve, in welcher die Quadrate der

Ordinaten sich verhalten, wie die Rechtecke unter den entsprechenden Abscissen.

Stehen die Ordinaten, wie PM, P'M', von den Scheiteln B, C gleichweit ab; so werden diese Rechtecke, daher auch die Quadrate jener Ordinaten, oder diese selbst einander gleich.

2. Beschreibt man mit der halben großen Axe AB aus dem Mittelpunkte A der Ellipse einen Kreis; so ist $PN^2 = 2ax - x^2$ (§. 90. II. (δ')) $= (2a - x)x$, folglich geht die obige Proportion in diese über:

y^2 oder $PM^2 : PN^2 = b^2 : a^2$, d. i. $PM : PN = b : a$.

Also haben alle Ordinaten der Ellipse zu den entsprechenden Ordinaten des umgeschriebenen Kreises einerlei Verhältniß.

Würde man daher die Ordinaten eines Kreises z. B. halbiren; so würde die durch die Durchschnittspunkte gehende Curve eine Ellipse seyn.

3. Es sey für den Punkt I, für welchen $FI = y$ und $FB = x$ ist, das auf die kleine Axe DE gefällte Perpendikel IG die Ordinate $= y'$ und die zugehörige Abscisse $GE = x'$; so hat man, da $GE = AE - AG = b - FI$ ist, $x' = b - y$, oder $y = b - x'$. Eben so ist $IG = y' = a - x$, oder $x = a - y'$. Diese Werthe in der Gleichung (β') des §. 90. II. substituirt, entwickelt man

$$y'^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx' - x'^2),$$

d. i. eine der (β') ganz ähnliche Gleichung, die Coordinaten auf die kleine Axe bezogen. Aus ihr folgt denn wieder

$y'^2 : (2b - x')x' = a^2 : b^2$ oder $IG^2 : DG \cdot GE = a^2 : b^2$,

d. i. die Quadrate der auf die kleine Axe bezogenen Ordinaten verhalten sich ebenfalls, wie die Rechtecke unter den entsprechenden Abscissen.

Stellt man sich nun mit b als Halbmesser einen Kreis eingeschrieben vor, für den $GN'^2 = DG \cdot GE$ ist; so hat man auch

$GI^2 : GN'^2 = a^2 : b^2$ oder $GI : GN' = a : b = Fi : FI$ (aus 2.),

d. i. die Ordinate der kleinen Axe verhält sich zu der entsprechenden des eingeschriebenen Kreises, wie

die Ordinate des umgeschriebenen Kreises zur entsprechenden Ordinate der großen Axe der Parabel.

§. 101. Aufgabe. Den Abstand des Brennpunktes F der Ellipse I. vom Scheitel B und II. vom Mittelpunkte A oder die Excentricität e zu finden.

Auflösung. I. Nach §. 91. 5. ist die Ordinate $FI = y = p$, oder $y^2 = p^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ (§. 90. II. 2. (β'')); woraus man

$$FP = x = a \pm \sqrt{(a^2 - ap)} = a \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}$$

entwickelt, indem $p = \frac{b^2}{a}$ (§. 90. II. 2.) ist.

II. Weil ferner $FP = x = BA - AF = a - e$, oder $a - e = a \pm \sqrt{(a^2 - ap)} = a \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}$ ist; so hat man

$$e = \mp\sqrt{(a^2 - ap)} = \mp\sqrt{(a^2 - b^2)} \text{ oder}$$
$$e^2 = a^2 - ap = a^2 - b^2.$$

Zusatz 1. Also auch $p = a - \frac{e^2}{a}$, daher für $e = 0$, wie beim Kreise, der halbe Parameter = der halben großen Axe.

Zusatz 2. Auch erhellt, daß, je kleiner p oder je größer der Unterschied beider Axen, die Excentricität e um so größer ist.

Auch folgt aus $e = \pm\sqrt{(a^2 - b^2)}$, daß die Ellipse zwei Brennpunkte F, f habe, deren einer vom Scheitel B so weit absteht, als der andere vom Scheitel C.

§. 102. Lehrsatz. Die Summe der Radien vektoren FM, fM für denselben Punkt M der Ellipse ist gleich der großen Axe BC (= 2a).

Beweis. Weil $PM^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ (§. 90. (β)); $FP^2 = (FA - AP)^2 = (e - x)^2 = (\sqrt{(a^2 - b^2)} - x)^2$ nach Obigem, und $fP = (e + x)^2$ ist; so entwickelt man

$$FM = \sqrt{(PM^2 + FP^2)} = \sqrt{\left[a^2 - 2\sqrt{(a^2 - b^2)}x + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x^2\right]}$$
$$= a - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \cdot x, \text{ und}$$
$$fM = a + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \cdot x, \text{ folglich } fM + FM = 2a.$$

Zusatz 1. $fM^2 - FM^2 = (e+x)^2 + y^2 - [(e-x)^2 + y^2] = 4ex = (fM+FM)(fM-FM) = 2a.d$, oder (die Differenz der Radien vektoren) $d = \frac{4ex}{2a} = \frac{2ex}{a}$ und $\frac{1}{2}d = \frac{ex}{a}$.

Nun ist der größere Radius vektor $fM = \frac{1}{2}(2a+d) = a + \frac{1}{2}d$, und der kleinere $FM = a - \frac{1}{2}d$ (Größenl. §. 90.), folglich sind durch Substitution die Werthe der Radien vektoren

$$fM = a + \frac{ex}{a} \text{ und } FM = a - \frac{ex}{a} = \frac{a^2 - ex}{a}.$$

Zusatz 2. Wegen der Kongruenz der Dreiecke FAD, fAD ist $DF = Df = a = AB$ und der (Einfalls-) Winkel $FDA =$ dem (Ausfalls-) Winkel fDA; d. i. ein von F ausgehender und im Punkte D eines elliptischen Spiegels einfallender Strahl wird in den andern Brennpunkt reflectirt.

Zusatz 3. Da $AF^2 = DF^2 - AD^2$, oder $4AF^2 = 2(a+b).2(a-b)$; so ist $2AF$ oder Ff, d. i. der Abstand der Brennpunkte von einander die mittlere stetige Proportionale zur Summe und Differenz der Axen.

Zusatz 4. $AD^2 = b^2 = DF^2 - AF^2 = a^2 - e^2 = (a+e)(a-e) = CF.FB$. Hieraus ist also

1) $CF : b : FB$, d. i. die halbe kleine Axe ist die mittlere Proportionale zwischen den Abständen des Brennpunktes F oder f von beiden Scheiteln der Ellipse.

2) Substituirt man $a^2 - e^2$ statt b^2 in (β) und (β') des §. 90. II. 2.; so hat man

$$y^2 = \frac{(a^2-x^2)(a^2-e^2)}{a^2} \text{ und } y^2 = \frac{(2aX-X^2)(a^2-e^2)}{a^2};$$

zwei Gleichungen der Ellipse, wenn die Excentricität und große Axe gegeben sind.

Anmerkung. In der Astronomie heißen B und C die Absiden; $BF.FC$ das Rechteck unter den Absiden und F der Mittelpunkt der Kräfte. Die letzte der vorigen Gleichungen in eine Proportion aufgelöst, ist

$$PM^2 : BP \cdot PC = BF \cdot FC : a^2,$$

d. i. das Quadrat der Ordinate verhält sich zum Rechtecke unter den entsprechenden Abscissen, wie das Rechteck unter den Absiden zum Quadrate der halben großen Axe.

Allein für die durch F gehende Ordinate ist $y^2 = p^2$ und $BP \cdot PC$ geht in $BF \cdot FC$ über; daher ist dieses Rechteck (der Absiden) die mittlere stetige Proportionalgröße zwischen dem halben Parameter und der halben großen Axe.

Zusatz 5. Noch dient unser Satz, die Ellipse geometrisch zu beschreiben, wenn die Axen gegeben sind. Denn die Durchschnittspunkte F, f der großen Axe mit den aus D mit dem Halbmesser AB gezogenen Kreisbogen sind nach dem vorigen Zus. 2. die Brennpunkte.

Theilt man nun BC in beliebig viele Theile, und beschreibt z. B. mit dem Halbmesser = BP aus F und mit CP aus f Kreisbogen; so ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt M vermöge unseres Lehrsatzes ein Punkt der Ellipse.

§. 103. Aufgabe. Die Polargleichung der Ellipse zu finden, wenn einer der Brennpunkte der Pol ist.

Auflösung. Sey F der Pol; $FM = r$ und der Winkel $BFM = v$; so ist

1) $FM = r = \frac{a^2 - ex}{a}$ (§. 102. Zus. 1.) oder $ar = a^2 - ex$;

2) $AP = x = AF - FP = e - r \cdot \cos(180^0 - v) = e + r \cdot \cos v$;

3) $ar = a^2 - e^2 - er \cdot \cos v$, und hieraus die Gleichung

$$(\alpha) \ldots \quad r = \frac{a^2 - e^2}{a + e \cos v}.$$

Nimmt man f als Pol, so entwickelt man eben so, weil nun $fM = r' = \frac{a^2 + ex}{a}$ und der Polarwinkel $v' = MfB$ ist, die gesuchte Gleichung

$$(\alpha') \ldots \quad r' = \frac{a^2 - e^2}{a - e \cos v'}.$$

§. 104. **Aufgabe.** Für irgend einen Punkt M der Ellipse (Fig. 42) eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe MF, Mf und verlängere letztere bis Q, so daß MQ = MF wird; so ist die den Winkel FMQ halbirende TMp die zu ziehende Tangente.

Beweis. Jeder andere Punkt p liegt außerhalb der Ellipse, indem, wie bei der Parabel, Fp = pQ ist. Wäre daher p noch ein Punkt der Ellipse, so müßte Fp + fp, d. i. pQ + fp = 2a = FM + fM = fQ seyn, was unmöglich ist.

§. 105. **Aufgabe.** Die algebraischen Ausdrücke oder Werthe der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale zu bestimmen.

Auflösung. Vergleicht man (β) des §. 90 oder $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0$, wo x' wieder die Abscisse AP, vom Mittelpunkte A an genommen, bezeichnet, mit der Gleichung (1) (§. 92.); so muß man $A=\frac{1}{a^2}$; $B=\frac{1}{b^2}$; $C=0$ und $D=-1$ setzen; demnach ist die Größe

$$P=-\frac{2Ax'+C}{2By'}=-\frac{b^2x'}{a^2y'},\text{ und}$$

die Gleichung (7) des §. 92 geht in diese über:

$$y-y'+\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x')=0,$$

$$\text{oder } (yy'-y'^2)a^2+(x'x-x'^2)b^2=0,$$

$$\text{oder } \frac{yy'}{b^2}+\frac{xx'}{a^2}=\frac{a^2y'^2+b^2x'^2}{a^2.b^2}=\frac{y'^2}{b^2}+\frac{x'^2}{a^2};$$

also 1) $\frac{yy'}{b^2}+\frac{xx'}{a^2}=1$ die gesuchte Gleichung der Tangente.

2) $y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$ vermöge (8) §. 92 die Gleichung für die Normale MN. Auf gleiche Weise findet man nach den übrigen allgemeinen Formeln des §. 92.

3) Subtang. $PT = \frac{a^2}{x} - x'$ (indem man ſtatt y'^2 ſetzt $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)$) $= \frac{a^2 - x'^2}{x'}$; daher

4) Subnorm. $NP = \frac{y'^2}{\text{Subt.}} = \frac{b^2 x'}{a^2} = \frac{px'}{a}$.

Zuſatz 1. Da $NM^2 = PM^2 + NP^2$ und $TM^2 = PM^2 + PT^2$ iſt; ſo entwickelt man leicht andere Ausdrücke für die Normale und Tangente; ſo iſt, wenn man die vom Mittelpunkte A an genommene Abſciſſe mit u ſtatt mit x' (wie wir auch in der Folge thun) bezeichnet, z. B. $NM^2 = \frac{b^2a^4 - a^2b^2u^2 + b^4u^2}{a^4}$.

Zuſatz 2. 1) Der Abſtand des Mittelpunktes A vom Zuſammenſtoßungspunkte T der Tangente mit der verlängerten großen Axe iſt gegeben durch

$$AT = PT + AP = \frac{a^2 - x'^2}{x'} + x = \frac{a^2}{x'}, \text{ oder es iſt}$$

$$AT : a : x' \text{ (oder: } u).$$

2) Wegen $BT = AT - AB$ iſt der Abſtand des Scheitels B von T beſtimmt durch

$$BT : a - x' = a : x'.$$

Zuſatz 3. Vermöge der Figur iſt ferner

$$Ap : AT = PM : PT, \text{ d. i. } Ap : \frac{a^2}{x'} = y : \frac{a^2 - x'^2}{x'},$$

oder dafür, indem man die Ordinate Mv, auf die kleine Axe bezogen, mit t und die entſprechende Abſciſſe mit w bezeichnet,

$$Ap : \frac{a^2}{t} = w : \frac{a^2 - t^2}{t}.$$

Nun iſt in der Gleichung des §. 100. 3., nämlich nach der gegenwärtigen Bezeichnung, in $t^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx' - x'^2)$ der Faktor $2bx' - x'^2$ oder $(2b - x')x' = Ev \cdot vD = (b - w)(b + w) = b^2 - w^2$, folglich durch Subſtit.

$$Ap : \frac{a^2}{t} = w : \frac{a^2}{t} - \frac{a^2}{b^2}(b^2 - w^2),$$

woraus $Ap = \frac{b^2}{w}$ oder $w : b : Ap$ entwickelt wird; d. i. der Abstand des Zusammenstoßungspunktes der Tangente TM mit der verlängerten kleinen Axe vom Mittelpunkte A ist die dritte stetige Proportionale zur Abscisse (von A an genommen) und der halben kleinen Axe.

Daher der Abstand des Zusammenstoßungspunktes p vom Scheitel E der kleinen Axe, nämlich $Ep = Ap - AE = \frac{b^2 - bw}{w}$, oder $w : b - w = b : Ep$.

Zusatz 4. Weil für den Scheitel B die Ordinate $PM = Av = w = 0$, folglich $Ap = \frac{b^2}{0} = \infty$ ist; so kann eine solche Tangente sich nicht mit der kleinen Axe schneiden, ist folglich dieser parallel und senkrecht auf die große Axe.

Weil nun die Lage der Ordinaten von der Lage der Tangenten abhängt, diese aber für B oder C gezogen, senkrecht auf BC sind; so folgt, daß die Ordinaten, wie wir auch bisher annahmen, auf die große Axe, und eben so auch auf die kleine Axe senkrecht seyn müssen.

§. 106. Erklärungen. Jede durch den Mittelpunkt A der Ellipse (Fig. 45) gehende Sehne oder Sekante, wie GH, heißt Durchmesser. Zieht man durch dessen Scheitel G eine Tangente GT und dieser parallel KL, so ist diese der dem GH bei- oder zugeordnete Durchmesser; als solchen kann man GH, parallel der Tangente Kt, in Beziehung auf KL betrachten, oder GH und KL sind überhaupt zugeordnete Durchmesser.

Jede Gerade, wie RV, aus einem Punkte des Durchmessers KL parallel mit dem zugeordneten Durchmesser GH gezogen, ist Ordinate für KL und die Theile KR, RL aus KL sind die entsprechenden Abscissen.

§. 107. Lehrsatz. Jeder Durchmesser GH der Ellipse wird im Mittelpunkte A halbirt.

Beweis. Sey GA der halbe Durchmesser. Man ziehe die Ordinate GI und mache $Ai = AI$; ziehe die Ordinate iH

und von H zu A die Gerade HA; so sind die Drei. GAI, AHi kongruent, indem auch Hi = GI (§. 100. 1.) ist; daher die Winkel bei A gleich, folglich GH eine einzige Gerade oder der Durchmesser und GA = AH.

Zusatz. Also ist die große Axe der größte Durchmesser. Denn es stelle ML (Fig. 56) irgend einen Durchmesser vor; so sind, wenn man Lf zieht, die Drei. FAM, LAf wegen AF = Af, AM = AL und der gleichen Scheitelwinkel kongruent, folglich auch der Winkel AMF = ALf, daher FM gleich und parallel Lf (Geom. §. 53. I.), sohin auch die Verbindungslinien FL und fM (Geom. §. 69. Zus. 2.). Aber ML < MF + FL, also auch < MF + Mf, d. i. < BC (§. 102).

§. 108. Lehrsatz. Zieht man von den Scheiteln der beigeordneten Durchmesser die Ordinaten GI, KP (Fig. 43); so ist das Quadrat der vom Mittelpunkte an genommenen Abscisse, die der einen Ordinate entspricht, gleich dem Rechtecke unter den der andern Ordinate entsprechenden Abscissen, d. i. $AI^2 = BP \cdot PC$ und $AP^2 = BI \cdot IC$.

Beweis. Nach §. 100. 1. ist $GI^2 = BI \cdot IC = a^2 - x^2$ (wenn man die Abscisse AI mit x bezeichnet), und eben so $KP^2 = BP \cdot PC = a^2 - u^2$ (wo u = AP). Nun ist wegen der Aehnlichkeit der Drei. KPt, IGA (indem Kt ∥ GH nach §. 106)

$KP^2 : GI^2 = Pt^2 : AI^2$, d. i. $a^2 - u^2 : a^2 - x^2 = \left(\frac{a^2 - u^2}{u}\right)^2 : x^2$ (§. 105. 3)). Hieraus entwickelt man

$$x^2 = a^2 - u^2 \text{ d. i. } AI^2 = BP \cdot PC.$$

Auf gleiche Weise findet man auch $AP^2 = BI \cdot IC$.

Zusatz 1. $AI^2 : AP^2 = BP \cdot PC : BI \cdot IC = KP^2 : GI^2$, daher $AI \cdot GI = AP \cdot KP$, d. i. die Flächenräume sowohl dieser Rechtecke, als der Drei. AGI, AKP sind gleich.

Zusatz 2. Für GH = KL ist auch AI = AP, d. i. $u^2 = x^2$ oder $u^2 = a^2 - u^2$, d. i. $u^2 = \frac{1}{2}a^2$ oder $a : u : \frac{1}{2}a$; ein Ausdruck für die vom Mittelpunkte an genommene Abscisse.

Zusatz 5. Zieht man das Perpendikel Kn und verlängert AD bis zur Tangente; so ist auch das Drei. Knq ähnlich den obigen KPt, IGA, daher

$$GA : Kq = AI : nK \ (: AP)$$

und $GA : Kt = AI : Pt$

folglich $GA^2 : Kq \cdot Kt = AI^2 : AP \cdot Pt \left(: u \cdot \frac{a^2 - u^2}{u}\right)$.

Aber das letzte Glied $a^2 - u^2 = AI^2$, d. i. das letzte Verhältniß ein Verhältniß der Gleichheit, folglich auch $GA^2 = Kq \cdot Kt$, oder $Kq : GA : Kt$; welche Proportion dient, bei gegebenen conjugirten Durchmessern die Axen zu finden.

Zusatz 4. $AP^2 + AI^2 = u^2 + a^2 - u^2 = a^2$, d. i. die Summe der Quadrate dieser den beigeordneten Durchmessern entsprechenden Abscissen ist eine konstante Größe.

Dasselbe gilt auch von der Summe der Quadrate dieser Durchmesser selbst. Denn $AG^2 = AI^2 + GI^2 = a^2 - u^2 + GI^2 = a^2 - u^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot CI \cdot IB. = a^2 - u^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot u^2$.

Ferner ist $AK^2 = AP^2 + PK^2 = u^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2)$, folglich

$$AG^2 + AK^2 = a^2 + b^2.$$

Also ist überhaupt die Summe der Quadrate jeder 2 zugeordneten Durchmesser gleich der Summe der Quadrate je 2 anderer zugeordneten Durchmesser derselben Ellipse.

§. 109. Lehrsatz. Das Quadrat jeder Ordinate des Durchmessers KL der Ellipse verhält sich zum Rechtecke unter den entsprechenden Abscissen, wie das Quadrat des halben zugeordneten Durchmessers zum Quadrate jenes ersten Durchmessers, d. i.

$$RV^2 : KR \cdot RL = AG^2 : AK^2.$$

Beweis. Man ziehe die Ordinate Vp und aus R senkrecht RO und RM; setze $pO = MR = m$; $AO = n$; $AK = \alpha$ und $AG = \beta$; so hat man $Bp = a + m - n$ und $pC = a - m + n$, folglich $Bp \cdot pC = a^2 - m^2 - n^2 + 2mn$.

Nun ist wegen der ähnl. Drei. RVM, AGI

$$RM^2 : AI^2 = RV^2 : AG^2 \text{ oder } = y^2 : \beta^2.$$

Könnte man daher die Gültigkeit der Proportion

$$RM^2 : AI^2 = KR \,.\, RL : AK^2$$

beweisen; so wäre unser Satz bewiesen. Zu diesem Zwecke die Werthe der Glieder der letzten Proportion suchend, hat man

1) $Vp^2 = (pM + MV)^2 = (OR + MV)^2$. Aber in den ähnl. Drei. AKP, ARO ist

$$AP : AO = PK : OR, \text{ d. i. } u : n = y : OR;$$

also $OR = \frac{ny}{u}$. Ferner in den ähnl. Drei. RVM, KPt ist

$tP : RM = PK : MV$, d. i. $\frac{a^2-u^2}{u} : m = y : MV$ (§. 105);

also $MV = \frac{muy}{a^2-u^2}$, demnach

$$Vp^2 = \left(\frac{ny}{u} + \frac{muy}{a^2-u^2}\right)^2 = \frac{n^2y^2}{u^2} + \frac{2mny^2}{a^2-u^2} + \frac{m^2u^2y^2}{(a^2-u^2)^2}.$$

Also auch $Vp^2 : KP^2 = Cp \,.\, pB : BP \,.\, PC$

d. i. $Vp^2 : y^2 = a^2 - m^2 - n^2 + 2mn : a^2 - u^2$,

also $Vp^2 = \frac{a^2y^2 - m^2y^2 - n^2y^2 + 2mny^2}{a^2-u^2}$.

Beide Werthe von Vp^2 zusammengestellt, entwickelt man

$$m^2 \text{ oder } MR^2 = \left(\frac{a^2-u^2}{u^2}\right).u^2 - \left(\frac{a^2-u^2}{u^2}\right).n^2 = \left(\frac{u^2-n^2}{u^2}\right)(a^2-u^2).$$

2) $AI^2 = a^2 - u^2$ (§. 108).

3) $AP : AK = AO : AR$, oder $AR = \frac{\alpha n}{u}$. Aber

$KR = KA - AR = \alpha - \frac{\alpha n}{u}$ und $RL = \alpha + \frac{\alpha n}{u}$; daher

$$KR \,.\, RL = \alpha^2 - \frac{\alpha^2 n^2}{u^2}.$$

Diese Werthe mit $\alpha = KA$ statt der Glieder obiger Proportion gesetzt, erhellt die Gültigkeit der letzteren aus der Gleichheit der Exponenten beider Verhältnisse.

Zusatz. Zieht man die Ordinate Vp' auf den Durchmesser GH; so ist, da $AG^2 : AK^2$ oder $\alpha^2 : \beta^2$ konstant ist,

$$RV^2 : Vp'^2 = KR \,.\, RL : Gp' \,.\, p'H,$$

d. i. auch in Beziehung auf die Durchmesser verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die Rechtecke unter den entsprechenden Abscissen.

Daher findet man dieselben Haupteigenschaften der Ellipse, man mag diese auf die Axen oder Durchmesser beziehen.

§. 110. Lehrsatz. Das Parallelogramm unter den zugeordneten Durchmessern ist gleich dem Rechtecke unter den Axen.

Beweis. Zieht man mit der verlängerten Normale KNS parallel As; so ist in den ähnl. Drei. KPN, sAq

$$As\,(=KS) : Aq = PK\,(=An) : KN$$

oder $KS \,.\, KN = Aq \,.\, An = b^2$ (§. 105. Zus. 5);

daher $KS^2 : b^2 : KN^2$ oder: $\frac{b^2a^4 - a^2b^2u^2 + b^4u^2}{a^4}$ (§. 105. Zus. 1),

folglich auch $KS^2 \,.\, GA^2 = \frac{b^2a^4}{a^4 - a^2u^2 + b^2u^2} \times \frac{a^4 - a^2u^2 + b^2u^2}{a^2}$ (§. 108. Zus. 4) $= b^2 \,.\, a^2$, also $KS \,.\, GA = a \,.\, b$, wo GA die Grundlinie und KS, als senkrecht auf GA (Geom. §. 55. Zus. 2.), die Höhe des Parallelogramms unter den 2 halben konjugirten Durchmessern ist.

Zusatz. Es sind daher die Parallelogramme unter je 2 konjugirten Durchmessern einander gleich.

§. 111. Lehrsatz. Der Theil IO (Fig. 42) des Radius vektors zwischen dem Berührungspunkte I und dem zugeordneten Durchmesser KL ist gleich der halben großen Axe AB.

Beweis. Man ziehe durch den andern Brennpunkt F Hn || If und verlängere IF bis zum Durchmesser; so ist

1) wegen der kongr. Drei. fOA, AFn $fO = Fn$.
2) Das Dreieck HIF gleichschenklig wegen W. $FHI = fIq = FIH$ (wie $fMp = FMT$ ist); daher $FI = FH$.

3) Weil nun im Drei. FKn der Winkel K = KIH und der W. n = FIH, d. i. K = n ist; so ist auch Fn = FK; folglich

4) FI + fI = 2a (§. 102) = FH + fO + OI (aus 2)) = FH + Fn + OI (aus 1)) = Hn + Hn = 2Hn, d. i. Hn = IO = a.

Zusatz. Zieht man die Normale Ir, verlängert diese bis zum zugeordneten Durchmesser KL und fällt aus r das Perpendikel rm auf FI; so ist in den ähnl. Drei. rmI, uKI

$$Im : Ir = Iu : IK, \text{ daher } Im . IK = Ir . Iu.$$

Aber im Drei. IKO ist der W. bei O = OIq = KIH = K; folglich OI = IK, d. i. IK = a (vermöge des Satzes) und Im . IK = Im . a = Ir . Iu = b^2 (wie im Beweise des §. 110 Aq . An = b^2); daher auch Im . a = $b^2 = ap\left(\text{indem } p = \frac{b^2}{a}\right)$, oder Im = p; d. i. der Theil des Radius vektors, der zwischen dem Berührungspunkte I und jenem Perpendikel rm liegt, ist gleich dem halben Parameter der Ellipse.

Anmerkung. Die letzten Sätze finden ihre besondere Anwendung in der physischen Astronomie nach Newton's (des Schöpfers jener Wissenschaft) unsterblichem Werke: „Philosophiae naturalis principia mathematica."

c) Hyperbel.

§. 112. Eigenschaften der Hyperbel, diese auf die Axen bezogen. (Vergl. mit §. 90. II. 3)).

1. Bezeichnet man die zur Ordinate PM = y (Fig. 38) gehörige Abscisse AP, vom Mittelpunkte A angerechnet, mit u und die ebenfalls zu PM gehörige, aber vom Scheitel B der Curve an genommene Abscisse BP mit x; so werden die zwei am citirten Orte aufgestellten Gleichungen so ausgedrückt:

$$(\gamma) \ldots y^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2) \text{ und } (\gamma') \ldots y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

Nun ist, sowohl $u^2 - a^2 = (u+a)(u-a)$, als auch $(2a+x)x = PB' \cdot PB$, folglich gibt jede Gleichung die Proportion:

$$PM^2 : PB' \cdot PB = AB^2 : AL^2 = a^2 : b^2,$$

d. i. weil $a^2 : b^2$ konstant ist, und wenn man der Analogie wegen wieder das zweite Glied das Rechteck unter den Abscissen nennt, die Quadrate der Ordinaten der Hyperbel verhalten sich, wie die Rechtecke unter den entsprechenden Abscissen.

2. Die dritte Gleichung (γ'') der Hyperbel, und eben so (β'') für die Ellipse im §. 90 verglichen mit der für die Parabel ($y^2 = px$), erhellt, daß das Quadrat jeder Ordinate der Hyperbel größer, das der Ellipse kleiner, als das Rechteck unter dem Parameter und der Abscisse, diesem Rechtecke aber das Quadrat jeder Ordinate der Parabel gleich sey. (Daher vielleicht die Benennungen der 2 ersten Curven).

Auch zeigt die Vergleichung der Gleichung (γ) der Hyperbel, nämlich

$$a^2y^2 - b^2u^2 = -a^2b^2$$

mit der Gleichung (β) der Ellipse, nämlich

$$a^2y^2 + b^2u^2 = a^2b^2,$$

daß man, um von der einen Curve zur andern überzugehen, nur $+b^2$ in $-b^2$ oder b in $b\sqrt{-1}$ verwandeln dürfe.

3. Für $y = 0$ wird in (γ) $u = \pm a = BA$ oder $= B'A$, d. i. die Scheitel B, B' der Curve sind vom Anfangspunkte A der Coordinaten um a entfernt. Dagegen für $u = 0$ wird $y = \pm b\sqrt{-1} = AL$ oder $= AL'$ und für $u = \pm a$ wird $y = 0$, d. i. die Hyperbel schneidet die Axe in B und B'.

Endlich für $a = b$ hat man $y^2 = u^2 - a^2$, d. i. die Gleichung für die gleichseitige oder rechtwinklige Hyperbel.

4. Zieht man für den Punkt in die Ordinate $m'p = y$ und auf die kleine Axe $m'i = y'$, so daß folglich $pB = x$; $iL' = x'$ und $y' = Ap = a + x$, daher $x = y' - a$ und $y = Ai = AL' - iL' = b - x'$ wird; so erhält man durch Substit. dieser Werthe in $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$

$$y'^2 = \frac{a^2}{b^2}(2b^2 - 2bx' + x'^2) = \frac{a^2}{b^2}[(b-x')2b + x'^2],$$

als Gleichung der Hyperbel, diese auf die kleine Axe bezogen.

Nimmt man unter derselben Voraussetzung die Abscissen von A an, und setzt demnach $Ai = u' = b - x'$, daher $x' = b - u'$; so findet man durch Subst. dieses Werthes in voriger letzten Gleichung

$$y'^2 = \frac{a^2}{b^2}(u'^2 + b^2) \text{ und } u'^2 = \frac{b^2}{a^2}(y'^2 - a^2),$$

oder $y'^2 : u'^2 + b^2 = a^2 : b^2$, oder $Y'^2 : y'^2 = U'^2 + b^2 : u'^2 + b^2$;

d. i. die Coordinaten auf die kleine Axe bezogen, und die Abscissen vom Mittelpunkte angerechnet, — verhalten sich die Quadrate der Ordinaten der Hyperbel, wie die Summen der Quadrate der Abscisse und halben kleinen Axe.

§. 115. Aufgabe. Den Abstand des Brennpunktes F I. vom Scheitel B, II. vom Mittelpunkte A oder die Excentricität $FA = e$ der Hyperbel zu finden.

Auflösung. I. Die durch F gehende Ordinate $F\mu = y$ ist (nach §. 91. 5) $= p$, daher $y^2 = p^2 = px^2 + \frac{2px}{a}$ oder $ap = 2ax + x^2$, woraus

$$x = FB = -a \pm \sqrt{(ap + a^2)}.$$

II. $FA = e = AB + BF = \pm\sqrt{(ap + a^2)}$, oder

$e^2 = ap + a^2 = b^2 + a^2 = AB^2 + AL^2$ (§. 90. II. 3)).

Zusatz 1. Also, wie bei der Ellipse, zwei Brennpunkte in gleichem Abstande vom Scheitel und Mittelpunkte der Hyperbel, und die Excentricität um so größer, je größer die Axen und der Parameter sind.

Zusatz 2. Wegen $BL^2 = AL^2 + AB^2 = e^2 = AF^2$, d. i. $BL = AF$ kann man bei gegebenen Brennpunkten die Endpunkte der kleinen Axe finden, und sind die Axen gegeben, so

so kann man, indem man $AF = BL$ etc. macht, die Brennpunkte F, f bestimmen.

Zusatz 3. $2FA = Ff$ oder $4FA^2 = Ff^2 = 4a^2 + 4b^2 = BB'^2 + LL'^2$, d. i. der Abstand der Brennpunkte von einander ist gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Axen sind.

§. 114. Aufgabe. Die Werthe der Radien vektoren der Hyperbel zu finden.

Auflösung. $fM^2 = fP^2 + PM^2 = (AP + Af)^2 + y^2 = (u + e)^2 + y^2$, oder, die Werthe von e^2 und y^2 substituirt,

$$fM^2 = u^2 + 2eu + a^2 + b^2 + \frac{b^2u^2}{a^2} - b^2 \quad (\S.\ 112)$$

$$= \frac{a^2u^2 + b^2u^2 + 2a^2eu}{a^2} + a^2$$

$$= (a^2 + b^2)\frac{u^2}{a^2} + \frac{2aeu}{a} + a^2 = \frac{e^2u^2}{a^2} + \frac{2aeu}{a} + a^2,$$

d. i. $fM = \frac{eu}{a} + a$. Eben so findet man aus $FM^2 = FP^2 + PM^2 = (u - a)^2 + y^2$

$$FM = \frac{eu}{a} - a = \frac{FA \cdot AP}{AB} - AB.$$

Zusatz 1. Also ist der Unterschied zweier Radien vektoren für denselben Punkt M der Hyperbel gleich der großen Axe.

Zusatz 2. Wegen $u = AP = AB + BP = a + x$ ist auch $fM = \frac{ex}{a} + e + a$ und $FM = \frac{ex}{a} + e - a$; d. i. 2 Ausdrücke der Radien vektoren in der vom Scheitel B an genommenen Abscisse, der Excentricität und halben großen Axe.

Zusatz 3. Setzt man in der aus (y') (§. 112) hervorgehenden Proportion den Werth für $b^2 = e^2 - a^2 = (e - a)(e + a) = (AF - AB)(AF + AB) = BF \cdot B'F$; so hat man

$$(1) \ldots \quad y^2 : 2ax + x^2 = e^2 - a^2 : a^2$$

$$\text{oder } PM^2 : PB \cdot B'P = BF \cdot B'F : AB^2.$$

Geht ferner die Ordinate durch F, wo folglich $y^2 = p^2$; $x = FB = e - a$ (§. 115), daher $2ax + x^2 = (2a + x)x = (a+e)(e-a) = e^2 - a^2$ ist; so hat man

(2) ... $p^2 : e^2 - a^2 = e^2 - a^2 : a^2$ oder auch $e^2 - a^2 = ap$,

wie Letzteres auch aus §. 115. II. hervorgeht. Es gelten demnach auch von der Hyperbel dieselben Sätze, die wir oben §. 102 Anmerk. hinsichtlich der Ellipse anführten.

Wie ferner die Proportion (1) in die Gleichung

$$y^2 = (2ax + x^2)(e^2 - a^2) \cdot \frac{1}{a^2}$$

übergeht; eben so hat man statt (γ) (§. 112) diese:

$$y^2 = (u^2 - a^2)(e^2 - a^2) \cdot \frac{1}{a^2};$$

zwei Gleichungen, analog jenen im §. 102. Zus. 4.

§. 115. Aufgabe. Die Polargleichung der Hyperbel zu finden.

Auflösung. Sey wieder F der Pol, $FM = r$ und der Winkel $AFM = v$; so ist auf ähnliche Art, wie bei der Ellipse (§. 103)

1) $FM = r = \frac{eu - a^2}{a}$ (§. 114) oder $ar = eu - a^2$;

2) $AF = u = AF + FP = e - r \cdot \cos v$, daher

3) $ar = e^2 - a^2 - er \cdot \cos v$ und hieraus die gesuchte Gleichung

$$r = \frac{e^2 - a^2}{a + e \cos v}.$$

Nimmt man f als Pol und den Winkel $AfM = v'$; so findet man, weil nun $fM = r' = \frac{eu + a^2}{a}$; $u = AF = fP - fA = r \cdot \cos v' - e$ ist

$$r' = \frac{a^2 - e^2}{a - e \cos v'}.$$

§. 116. Aufgabe. Bei gegebenen oder beliebig genommenen Axen die Hyperbel geometrisch zu beschreiben.

Auflösung 1. Ueber der verlängerten großen Axe (Fig. 44) beschreibe man aus A mehrere concentrische Kreise; errichte in B' die Perpendikel B'N, BN', ... und suche die vierte Proportionale PM, P'M' zu jenen Perpendikeln und den Axen; so sind M, M', ... Punkte der zu beschreibenden Hyperbel.

Beweis. Nach §. 112. 1. ist

$$a^2 : b^2 = PB \cdot PB' : PM^2;$$

aber $B'N^2 = B'P \cdot B'p = B'P \cdot BP$, folglich auch

$$a : b = B'N : PM; \text{ u. s. w.}$$

Auflösung 2. Auf der verlängerten großen Axe (Fig. 38) nehme man einen Theil $B'r > B'F$ und beschreibe mit ihm, als Halbmesser, aus f einen Bogen, welcher von einem andern, den man mit Br, als Halbmesser, aus F zieht, z. B. in M durchschnitten wird; so ist, weil nun die Differenz der Radien vektoren für eben diesen Punkt $= 2a$ ist, M ein gesuchter Punkt der Hyperbel.

Anmerkung. Wären nur a und p gegeben; so könnte man b wegen $a : b : p$ konstruiren. Oder wären nebst der großen Axe auch die Brennpunkte gegeben; so fände man dadurch, daß man aus B mit dem Halbmesser $= AF$ einen Bogen beschriebe, der das indefinite Perpendikel LAL' z. B. in L schnitte, ebenfalls die kleine Axe b (§. 113. Zus. 2).

§. 117. **Aufgabe.** Für irgend einen Punkt M der Hyperbel die Tangente zu ziehen. (Fig. 38).

Auflösung. Die den an M von den Radien vektoren FM, fM gebildeten Winkel halbirende Gerade Tq ist die verlangte Tangente.

Beweis. Wäre noch ein Punkt p' der Tangente TMq mit der Hyperbel gemein; so wären $fM - FM = 2a$ oder $= fQ$, wenn man $MQ = FM$ macht. Nun sind in den kongruenten Drei. Fbm, bMQ die Winkel bei b gleiche und rechte, also auch die Drei. Fbp', bQp' kongruent und $Fp' = Qp'$. Daher wäre auch $fp' - Qp' = 2a = fQ$, oder $fp' = fQ + Qp'$, was unmöglich ist (Geom. §. 62).

Zusatz. Verlängert man die Radien vektoren, so sind die W. qMS, qMR sowohl unter sich, als den Winkeln FMT', fMT gleich. Wenn daher erstens MBN den Schnitt eines hyperbolischen Hohlspiegels vorstellt; so wird, weil Winkel FMT = SMq der von F aus auf M fallende Strahl so nach S reflektirt, als ginge er von f aus; und umgekehrt: die in der Richtung SMf den Spiegel in M treffenden Strahlen werden in F gesammelt.

Da zweitens fM mit TM denselben Winkel bildet, welchen mit eben dieser die Verlängerung von FM macht; so wird, wenn MBN den Schnitt eines hyperb. Converspiegels vorstellt, jeder von f ausgehender und auf M fallender Strahl so nach R reflektirt, als wenn er von F ausgegangen wäre; und umgekehrt: ein nach der Richtung RM in M auffallender Strahl wird nach f reflektirt.

§. 118. Aufgabe. Die algebraischen Ausdrücke der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale der Hyperbel zu finden.

Auflösung. Für irgend einen Punkt M der Curve seyen AP = x' und PM = y' die Coordinaten. Vergleicht man die Gleichung der Hyperbel, nämlich $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0$ (§. 90. I. (γ)) mit der allgemeinen (1) §. 92, und setzt daher $A = \frac{1}{a^2}$; $B = -\frac{1}{b^2}$ und C = 0; so entwickelt man auf ähnliche Weise, wie im §. 105 für die Ellipse,

1) $\frac{yy'}{b^2} - \frac{xx'}{a^2} = -1$, als Gleichung für die Tangente;

2) $y - y' = -\frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x')$, als Gl. für d. Normale Mn;

3) Subtang. $PT = x' - \frac{a^2}{x'}$ und

4) Subnorm. $Pn = \frac{y'^2}{\text{Subt.}} = \frac{b^2x'}{a^2} = \frac{px'}{a}$, oder statt

$x' = AP = AB + BP = a + x$ gesetzt,

$$Pn = p + \frac{px}{a}.$$

Zusatz 1. Weil nach 4) $Pn : x' = p : a$, so ist das Verhältniß der Subnormale zu der vom Mittelpunkte an genommenen Abscisse konstant, und für $x = a$, wird $Pn = p$, aber in jedem andern Falle, wo $x' < a$, ist die Subnormale der Hyperbel $>$, der Parabel $=$ und der Ellipse $< p$.

Zusatz 2. Aus $Pn : PM : PT$ ist auch

1) Subtang. $= \frac{u^2 - a^2}{u}$ (§§. 112. 118. 4)) oder $= \frac{2ax + x^2}{a + x}$,

woraus weiter folgt, daß wegen $Mn^2 = PM^2 + Pn^2$

$= \frac{b^2u^2}{a^2} - b^2 + \frac{b^4u^2}{a^4}$

2) $Mn^2 = \frac{b^2}{a^4}(a^2u^2 - a^4 + b^2u^2)$

oder $= \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2) + \left(\frac{ap + px}{a}\right)^2$, oder, da $p = \frac{b^2}{a}$,

$= \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2) + \left(\frac{ab^2 + b^2x}{a}\right)^2$ sey.

Eben so entwickelt man wegen $MT^2 = PM^2 + PT^2$

3) $MT^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2) + \left(\frac{u^2 - a^2}{a}\right)^2 = \left(\frac{b^2u^2}{a^2} + u^2 - a^2\right)\left(\frac{u^2 - a^2}{u^2}\right)$

oder $= \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2) + \left(\frac{2ax + x^2}{a + x}\right)^2$.

Zusatz 3. Setzt man in den Gleichungen für die Subtangente $x = -a$ oder $u = 0$, so wird $PT = -\frac{a^2}{0} = -\infty$, d. i. es gibt in diesem Falle keine Tangente und Subtangente. Aber für $u = a$ oder $x = 0$ wird $PT = \frac{0}{a} = 0$, d. i. die Subtangente verschwindet im Scheitel B der Hyperbel.

Hieraus ist klar, daß die Subtangente der Hyperbel, wie des Kreises und der Ellipse, zugleich von der großen Axe und der Abscisse, für die Parabel aber einzig von letzterer abhänge. Sind daher zwei Ellipsen oder eine Ellipse und ein Kreis über derselben Axe (Fig. 56) beschrieben, und man zieht irgend eine gemeinschaftliche Ordinate, z. B. Fli; so stoßen die für I und

i gezogenen Tangenten in demselben Punkte T zusammen, weil beide Curven einerlei Subtangente, wie einerlei Abscisse und große Axe haben. — Dasselbe gilt hinsichtlich zweier über derselben Axe beschriebenen Hyperbeln, oder zweier Parabeln, die denselben Scheitel haben.

Zusatz 4. Nach 5) §. 118 ist $P'T \cdot u = u^2 - a^2$, oder

$u : u - a = u + a : PT$, d. i. $AP : PB = PB' : PT$ (Fig. 38),

oder $PB : PT = AP : PB'$,

d. i. die Abstände der Punkte P, B, T, A, B' sind in einer geometr. Proportion.

Zusatz 5. $AT = AP - P'T = u - \frac{u^2 - a^2}{u} = \frac{a^2}{u}$, d. i.

$u : a : AT$ oder $AP : AB : AT$.

Nimmt man ferner MV als Ordinate der kleinen Axe für denselben Punkt M, folglich AV als zugehörige Abscisse, und verlängert MT bis zur kleinen Axe, so wird, wie vorhin,

$AV : AL : At$

gefunden; d. i. die halbe große oder kleine Axe ist die mittlere Proportionale zwischen der vom Mittelpunkte genommenen Abscisse und dem Abstande des Zusammenstoßungspunktes (T oder t).

Zusatz 6. $BT = AB - AT = a - \frac{a^2}{u} = (u - a)\frac{a}{u}$, aber $B'T = (u + a)\frac{a}{u}$, daher $u : u \mp a = a : BT$ oder: $B'T$; d. i.

$AP : BP = AB : BT$

und $AP : B'P = AB' : B'T$;

Gleichungen oder Proportionen für die Abstände der Scheitel B, B' der Hyperbel vom Punkte T.

Zusatz 7. Der Abstand des Scheitels B vom Zusammenstoßungspunkte T, nämlich BT ist $= P'T - PB = \frac{2ax + x^2}{a + x} - x$

$= \frac{ax}{a + x}$.

Dieser Ausdruck belehrt uns über eine wichtige Eigenschaft der Krümmung der Hyperbel. Obgleich nämlich ihre Aeste in's

Unendliche auslaufen; so ist doch ihre Krümmung so, daß alle Tangenten, die man für irgend einen ihrer Punkte ziehen mag, der Axe nur zwischen A und B begegnen. Denn setzt man in jenem Ausdrucke $\left(BT = \frac{ax}{a+x}\right)$ statt x alle Werthe von 0 bis ∞, in welchem letzten Falle BT = a wird; so wächst BT von 0 an nur bis zur halben großen Axe BA. Dem $x = \infty$ entspricht aber ein von B unendlich entfernter Punkt der Curve, folglich geht eine für einen solchen Punkt gezogene Tangente durch den Mittelpunkt A der Hyperbel.

Diese Tangenten AX, AY (Fig. 45), welche in's Unendliche verlängert, die Hyperbel nicht, oder nur in einem unendlichen Abstande von ihrem Ursprunge treffen, heißen Asymptoten (ἀσύμπτωτοι, rectae non concidentes) der Hyperbel.

Zieht man mit PM ‖ BE (Fig. 38), so ist wegen der ähnl. Drei. TBE, TPM

$$TP : PM = TB : BE, \text{ oder } \frac{2ax+x^2}{a+x} : y = \frac{ax}{a+x} : BE,$$

$$\text{also } BE = \frac{ay}{2a+x} = \frac{b\sqrt{(2ax+x^2)}}{a+x}.$$

Da dieser Werth für $x = \infty$ wird $= b = AL$; so erhalten wir hiedurch eine leichte Methode, Asymptoten zu ziehen.

Macht man nämlich aus dem in B errichteten indefiniten Perpendikel einen Theil BE (= BE') = der halben kleinen Axe AL (Fig. 45); so sind die durch A, E und E' gezogenen geraden Linien XX', YY' die Asymptoten der Hyperbel.

§. 119. Erklärungen. 1. Eine gerade, durch den Mittelpunkt A (Fig. 45) gezogene und in den Punkten O und M der opponirten Hyperbeln begrenzte Linie heißt Durchmesser der Hyperbel.

2. Die gerade, von irgend einem Punkte D der Hyperbel mit der Tangente MT parallel gezogene und im verlängerten Durchmesser OM begrenzte Linie DC heißt jenes Durchmessers Ordinate, welcher die Abschnitten OM, CO entsprechen.

3. Stellt man sich noch 2 andere, opponirte Hyperbeln GLW, G'L'W' so konstruirt vor, daß LL' ihre große und BB' ihre kleine Axe wird; so heißen diese zusammengehörigen Hyperbeln die den ersteren zugeordneten oder conjugirten Hyperbeln, und umgekehrt. Daher, wenn man mit der Ordinate CD des Durchmessers MO parallel aus irgend einem Punkte der Hyperbel GLW eine Gerade durch A bis zur entgegengesetzten Hyperbel zieht; heißt auch diese Linie GH der beigeordnete oder conjugirte Durchmesser; MO ist dann der Hauptdurchmesser, — und umgekehrt. Spricht man von Beiden zugleich; so heißen sie kurz conjugirte Durchmesser.

Sucht man zwischen BP, PB' die mittlere Proportionale AR, wonach also $AR^2 = (u+a)(u-a)$ ist; errichtet in R ein Perpendikel, das von der durch A mit TM parallel gezogenen AH in H begrenzt wird, und macht nun AG = AH; so hat man den beigeordneten Durchmesser GA.

4. Die dritte stetige Proportionale zu MO und GH heißt der Parameter des Hauptdurchmessers MO.

§. 120. Aufgabe. Den Durchschnittspunkt eines Durchmessers mit der Hyperbel zu finden.

Auflösung. Man verbinde mit der Gleichung (y) (§. 90. I.), nämlich mit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ die Gleichung $y = \alpha x$ (§. 88. Zus. 1, indem man nur a in α ausdrückt) für die gerade, durch den Anfangspunkt A der Coordinaten gehende Linie (wie eine solche der Durchmesser ist); so hat man, je nachdem in der ersten Gleichung der Hyperbel a^2x^2 statt y^2, oder $\frac{y^2}{a^2}$ statt x substituirt wird, die gesuchten Coordinaten

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{(b^2 - a^2\alpha^2)}} = AP \text{ oder } AP',$$

$$y = \pm \frac{ab\alpha}{\sqrt{(b^2 - a^2\alpha^2)}} = PM \text{ oder } P'O.$$

Zusatz. Da BP = BP' und PM = P'O; so folgt, daß jeder Durchmesser im Mittelpunkte halbirt werde.

§. 121. Aufgabe. Eine Gleichung der Hyperbel zwischen den Coordinaten irgend eines Durchmessers MO zu finden.

Auflösung. Man ziehe pm und CQ ‖ PM und mN ‖ BB'. Sey ferner PM = y; AP = u; Qp = g und AQ = k; daher BP = AP − AB = u − a; B'P = u + a; Bp = Ap − AB = AQ − Qp − AB = k − g − a und B'p = k − g + a.

Nun ist in den ähnl. Drei. APM, AQC

1) $AP : PM = AQ : QC$; daher $QC = \frac{ky}{u}$,

und wegen der ähnl. Drei. TPM, mNC

$$PT : PM = mN (= pQ) : NC,$$

oder $\frac{u^2 - a^2}{u} : y = g : NC$ (§. 118. 3)); daher $NC = \frac{guy}{u^2 - a^2}$.

Folglich ist auch $mp = NQ = QC - NC = \frac{ky}{u} - \frac{guy}{u^2 - a^2}$.

2) $pm^2 : PM^2 = Bp \cdot pB' : BP \cdot PB'$ (§. 112. 1.),

oder $\left(\frac{ky}{u} - \frac{guy}{u^2 - a^2}\right)^2 : y^2 = (k - g - a)(k - g + a) : (u - a)(u + a)$.

Hieraus entwickelt man

$$(\varphi) \ldots - \frac{a^2 k^2}{u^2} + \frac{g^2 u^2}{u^2 - a^2} = g^2 - a^2.$$

3) Setzt man AM = a'; AH = AG (§. 120. Zus.) = b'; AC = u' und mC = y'; so ist in den ähnlichen Drei. APM, AQC

$$AM : AP = AC : AQ, \text{ oder } AQ = k = \frac{u \cdot u'}{a'},$$

und in den ähnl. Drei. mNC, AHR

$$AH : AR = mC : mN, \text{ oder } Nm = Qp = g = \frac{AR \cdot y'}{b'},$$

$$\text{oder } g^2 = \frac{AR^2 \cdot y'^2}{b'^2} = \frac{y'^2 (u'^2 - a^2)}{b'^2} \text{ (§. 119. 3).}$$

4) Diese Werthe in (φ) substituirt, hat man durch gehörige Reduktion und Division die gesuchte Gleichung

$$(\psi) \ldots - \frac{u'^2}{a'^2} = - \frac{y'^2}{b'^2} - 1, \text{ oder } y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(u'^2 - a'^2).$$

Zusatz 1. Da diese Gleichung, die Hyperbel auf die Durchmesser bezogen, mit der obigen im §. 112. 1 vollkommen stimmt; so gilt auch die dort angeführte Wahrheit hinsichtlich der Ordinaten der Durchmesser, wie denn auch die Gleichungen

$$y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(2a'x' + x'^2) \text{ und } y'^2 = \frac{p'}{a'}(2a'x' + x'^2)$$

für die auf ihre Durchmesser bezogene Hyperbel gelten werden.

Zusatz 2. Die 2 gleichen Werthe $y = \pm\frac{b'}{a'}\sqrt{(u'^2 - a'^2)}$ zeigen an, daß, wenn man $CD = Cm$ macht, der Punkt D zur Curve gehöre, und daher jeder Durchmesser seine Ordinaten oder die mit der Tangente TM parallelen Hyperbel-Sehnen halbire.

§. 122. Lehrsatz. Das Rechteck unter den Axen der Hyperbel ist gleich dem Parallelogramm unter je zwei zugeordneten Durchmessern.

Beweis. Auf die verlängerte Tangente MT fälle man das Loth Av; so ist in den ähnl. Drei. AvT, TPM

$$TM : PM = AT : Av, \text{ daher } Av = \frac{PM \cdot AT}{TM},$$

und in den ähnl. Drei. ARH, TPM

$$PT : TM = AR : AH (= AG); \text{ oder } AG = \frac{TM \cdot AR}{PT};$$

folglich $Av^2 \cdot AG^2 = \frac{PM^2 \cdot AT^2 \cdot AR^2}{PT^2}$.

Aber $PM^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2)$; $AR^2 = u^2 - a^2$ (§. 119. 5)); $AT^2 = \frac{a^4}{u^2}$ (§. 105. Zus. 2) und $PT^2 = \frac{(a^2 - u^2)^2}{u^2}$ (§. 105. 3)). Diese Werthe in der vorigen Gleichung substituirt, wird

$$Av^2 \cdot AG^2 = a^2 \cdot b^2 \text{ oder } Av \cdot AG = a \cdot b.$$

Weil ferner die bis zur Asymptote verlängerte Tangente $Mt = AG$ (wie noch unten §. 128 erhellen wird), daher AtMG ein Parallelogramm ist; so ist dessen Flächenraum $= Av \cdot tM = Av \cdot AG = ab$, oder auch $2AMG = ab$; d. i. das durch

2AMG vorgestellte, unter den halben beigeordneten Durchmessern konstruirte Parallelogramm ist gleich dem Rechtecke unter den halben Axen; also ꝛc.

Zusatz. Es sind daher die Parallelogramme unter allen zugeordneten Durchmessern einander gleich und für dieselbe Hyperbel konstante Größen.

§. 123. Lehrsatz. Der Unterschied der Quadrate jeder zwei beigeordneten Halbmesser ist gleich dem Unterschiede der Quadrate der halben Axen der Hyperbel.

Beweis. In den ähnl. Drei. TPM, ARH ist

$$TP : PM = AR : RH, \text{ oder } RH^2 = \frac{PM^2 . AR^2}{PT^2} = \frac{b^2u^2}{a^2}$$

(vergl. §. 122). Ferner ist

$$AM^2 = AP^2 + PM^2 \text{ und } AH^2 = AG^2 = AR^2 + RH^2, \text{ daher}$$

$$AM^2 - AG^2 = AP^2 + PM^2 - AR^2 - RH^2.$$

Durch Substitution der Werthe dieser Größen findet man

$$AM^2 - AG^2 = a^2 - b^2.$$

Zusatz 1. Also auch die Differenz der Quadrate irgend zweier zugeordneten Durchmesser eine konstante Größe.

Zusatz 2. Für die gleichseitige Hyperbel ist $a = b$, folglich $AM^2 - AG^2 = 0$ oder $AM = AG$, d. i. jeder Hauptdurchmesser seinem conjugirten Durchmesser gleich.

Zusatz 3. $AG^2 = AR^2 + RH^2 = u^2 - a^2 + \frac{b^2u^2}{a^2}$, und

$$TM^2 = AG^2 . \frac{u^2 - a^2}{u^2} \text{ (§. 118. Zus. 2. 3)).}$$

Nun ist in den ähnl. Drei. MPT, Mhi

$$PT^2 : TM^2 = iM^2 : hM^2$$

$$\text{oder } \frac{(a^2 - u^2)^2}{u^2} : AG^2 . \frac{u^2 - a^2}{u^2} = u^2 : hM^2, \text{ daher}$$

$$hM^2 = \frac{AG^2 . u^2}{u^2 - a^2} \text{ (indem } (a^2 - u^2)^2 \text{ auch} = (u^2 - a^2)(u^2 - a^2))$$

$$\text{und } TM^2 . hM^2 = AG^4, \text{ oder } TM . hM = AG^2.$$

Ist nun p' der halbe Parameter für MO, folglich (vermöge §. 119. 4)) $AM : AG = AG : p'$ oder $p' . AM = AG^2$; so hat man auch

$$p' . AM = TM . hM \text{ oder}$$
$$AM : TM = hM : p'.$$

Dieses enthält den Grund der Auflösung folgender

§. 124. **Aufgabe.** Wenn zwei conjugirte Durchmesser mit den von ihnen gebildeten Winkeln gegeben sind, die Axen der Hyperbel zu finden.

Auflösung. Man schneide von OM (Fig. 46) einen Theil $MR = p'$ ab, und in der Mitte von RA errichte man das Loth IK, welches nämlich in irgend einem Punkte K die verlängerte, mit AG parallele Tangente MT schneidet. Aus K mit dessen Abstande von A, als Halbmesser, ziehe man einen Kreis, der Mh in 2 Punkten T und h schneiden wird. Zieht man dann durch diese Punkte und durch A die Geraden TA, hA; so hat man **erstens** die Richtungen der Axen. Denn der Winkel TAH ist als Winkel im Halbkreise, (Geom. §. 87. Zus. 2) ein rechter, und (nach Geom. §. 126. II.)

$$AM : TM = hM : MR \text{ oder } p'.$$

Um **zweitens** auch die Größe der Axen zu bestimmen, fälle man die Perpendikel Mi, MP; nehme AB als mittlere stetige Proportionale zwischen AP und AT, und AL eben so zwischen Ai und Ah (§. 118. Zus. 5).

§. 125. **Erklärungen.** 1. Hinsichtlich der in Fig. 45 nach §. 118. Zus. 7 gezogenen Asymptoten AX, AY heißen AX', AY', welche mit AB' denselben Winkel, wie erstere mit AB, bilden, auch die **zugeordneten** Asymptoten. Da die opponirten, conjugirten Hyperbeln GLW, G'L'W', als durch bloße Umtauschung der Axen sich von den ersteren unterscheidend, mit diesen gleichsam **nur eine** Figur ausmachen; so ist klar, daß jene Asymptoten auch den conjugirten Hyperbeln zugehören.

2. Der Winkel $XAY = X'AY'$, unter welchem sich die Asymptoten im Mittelpunkte der Hyperbel schneiden, heißt

Asymptotenwinkel, dessen Hälfte wir mit α bezeichnen wollen. Die Größe desselben hängt, wie aus obiger Art, Asymptoten zu ziehen, erhellt, von dem Verhältnisse der Axen ab. Sind diese, wie bei der gleichseitigen Hyperbel, gleich; so ist $\alpha = 45^0$. Es wird aber 2α spitz oder stumpf, je nachdem die große Axe BB' entweder $>$ oder $<$ als die ihr beigeordnete LL' ist; in beiden Fällen sind die Hyperbeln ungleichseitige.

Zusatz. Um eine trigonometrische Funktion des Asymptotenwinkels durch bekannte Linien darzustellen, darf man sich nur mit dem Halbmesser AE aus A einen Kreisbogen gezogen vorstellen, dann ist, AE = sin. tot. = 1 angenommen, BE oder b = sin α; AB oder a = cos α und BF = sin. v. α. Nimmt man aber AB als Sin. tot., daß demnach

$$AB : BE = 1 : \text{tang}\,\alpha, \text{ d. i. } \text{tang}\,\alpha = \frac{b}{a} \text{ ist;}$$

so erhält man durch Substitution in der Gleichung des §. 88. Zus. 1 die Gleichung für die

Asymptote AX $\quad y = \text{tang}\,\alpha \,.\, x = \frac{b}{a} \,.\, x$ und

für die Asymptote AY $\quad y = -\frac{b}{a} \,.\, x.$

Auch hat man statt der Gleichung (7) (§. 112) der Hyperbel diese:

$$y = \pm \text{tang}\,\alpha \sqrt{(u^2 - a^2)}.$$

§. 126. Lehrsatz. Das Rechteck unter den Segmenten einer bis zu den Asymptoten verlängerten Hyperbel-Sehne ist gleich dem Quadrate der halben kleinen Axe.

Beweis. Sey für den beliebigen Punkt V (Fig. 47) diese verlängerte Sehne OVo || LL'; VH || AEO und VQ und BG || Aeo gezogen. Seyen ferner die Coordinaten der Hyperbel für den Punkt V PM = y und AP = u; eben so BG = m; GE = n; AQ = t und QV = v.

Nun ist in den ähnl. Dreie. APO, ABE

$$AB : BE = AP : PO, \text{ d. i. } a : b = u : PO;$$

daher $PO = Po = \frac{bu}{a}$; $VO = \frac{bu}{a} - y$ und $Vo = \frac{bu}{a} + y$,

folglich $VO \cdot Vo = \frac{b^2u^2}{a^2} - y^2 = b^2$ (§. 112 (γ)) $= BE^2 = AL^2$.

Zusatz 1. Da die bewiesene Eigenschaft für jeden Punkt der Hyperbel gilt; so sind alle jene Rechtecke gleich und konstante Größen.

Zusatz 2. Leicht folgt aus unserem Satze die Gleichung der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

Denn wegen der ähnl. Drei. QVO, VHo, BGE hat man

$$BE : BG = VO : VQ,$$
$$BE : GE = Vo : VH$$
$$\text{also} \quad BE^2 (= b^2) : mn = b^2 : tv;$$

d. i. $tv = mn$, welches die verlangte Gleichung ist.

Zusatz 3. Also für jeden Punkt V der Hyperbel ist $VQ \cdot VH$ oder $VQ \cdot AQ = BG \cdot GE$. Fällt nun V mit dem Scheitel B zusammen, so wird AQ wieder AG und VQ wird BG, demnach $AG \cdot BG = BG \cdot GE$ oder $AG = GE$, d. i. G die Mitte von AE. Es wird folglich $AG = BG = GE$ seyn müssen. Denn würde man über AE einen Kreis (dessen Halbmesser folglich AG wäre) beschreiben; so würde er, weil $ABE = 90^0$, durch B gehen müssen. Also ist $BG = GE$ oder $m = n$ und für eben diesen Fall $tv = m^2 = AG^2$.

Diese Gleichung drückt man auch so aus: die Potenz AG^2 oder BG^2 der Hyperbel gleicht dem Rechtecke (tv) unter der asymptotischen Abscisse und der entsprechenden Ordinate.

Zusatz 4. $BG^2 = AG^2 = \frac{1}{4}AE^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$; folglich auch $tv (= BG^2) = \frac{1}{4}(a+b)$. Also sind alle Rechtecke, wie $VQ \cdot AQ$, unter den asymptotischen Coordinaten einander gleich und konstante Größen.

Bezeichnet man daher diese Coordinaten mit x', y' und AG oder BG mit d; so kann man auch obige Gleichung der Hyperbel so ausdrücken:

$$x'y' = d^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

woraus folgt $y' = \frac{d^2}{x}$, oder $x' = \frac{d^2}{y}$; ferner $y'^2 = \frac{d^2}{x^2}$ und $d = \sqrt{xy}$; ...

Zusatz 5. Für irgend eine andere Ordinate CX und Abscisse AX ist eben so $CX . AX = AG^2 = VQ . AQ$, daher $CX : VQ = AQ : AX$, d. i. die Ordinaten der Asymptoten sind ihren entsprechenden Abscissen umgekehrt proportional.

Zusatz 6. Vermöge des Lehrsatzes ist (Fig. 45) $sZ . Zz = b^2 = AL^2$. Zieht man nun $Zz \parallel BE$, so ist auch das Rechteck unter den Abschnitten ZV, Zz, welche die Asymptote macht, gleich der halben großen Axe, folglich sind die Rechtecke einander gleich und konstante Größen.

Denn da sowohl die Drei. SVZ und ABE, als auch sZz und ABE ähnlich sind; so ist

$$SZ : ZV = BE\ (= AL) : AB$$
$$\text{und } sZ : Zz = BE\ (= AL) : AB,$$
$$\text{also } SZ . sZ : ZV . Zz = b^2 : a^2;$$
$$\text{daher } ZV . Zz = a^2.$$

§. 127. Lehrsatz. Zieht man durch irgend einen Punkt V der Hyperbel (Fig. 47) eine Sekante Vm, begrenzt in den Asymptoten; so sind ihre Theile RV, mr, liegend zwischen den Aesten der Curve und den Asymptoten, einander gleich.

Beweis. Durch V und m seyen die parallelen und verlängerten Sehnen oO, dD gezogen; so ist wegen der ähnl. Drei. rdm, roV und RVO, RmD

$$Vr : mr = Vo : md \text{ und}$$
$$VR : Rm = VO : mD$$
$$\text{also } VR . Vr : Rm . mr = VO . Vo : mD . md;$$

aber $VO . Vo = Dm . md$ (§. 126. Zus. 1); folglich auch $VR . Vr = Rm . mr$, oder $VR (Vm + mr) = mr (VR + Vm)$, woraus durch Multiplikation und Weglassung derselben Größe $VR . mr$ erhalten wird $VR . Vm = Vm . mr$, d. i. $VR = mr$.

Zusatz. Also wird jede von den Asymptoten begrenzte Tangente Tt im Berührungspunkte M halbirt.

§. 128. Lehrsatz. Zieht man für einen Punkt M der Hyperbel die Tangente Tt und dieser parallel durch einen beliebigen Punkt V eines hyperbolischen Astes die bis zu den Asymptoten verlängerte Sehne Rr; so ist das Rechteck unter den Segmenten RV, Vr I. gleich dem Quadrate der Tangente TM; II. gleich dem Quadrate des halben zugeordneten Durchmessers AN, der mit TM oder Rr parallel gezogen ist.

Beweis. I. Zieht man durch M die Gerade il || L'L; so hat man, da die Drei. TMI und RVO, und eben so Mit und Vor ähnlich sind,

$$TM : IM = RV : VO \text{ und}$$
$$Mt\,(= TM) : Mi = Vr : Vo$$
$$\text{daher } TM^2 : IM \cdot Mi = RV \cdot Vr : VO \cdot Vo;$$

aber $MI \cdot Mi = VO \cdot Vo$ (§. 126. Zus. 1), folglich auch $RV \cdot Vr = TM^2$.

II. Zieht man durch M den Durchmesser AMW (in Beziehung auf welchen AN der halbe zugeordnete Durchmesser ist); so halbirt dieser die Sehne Vm (§. 121. Zus. 2), demnach auch Rr (indem nach §. 127 RV = mr). Setzt man nun $AM = a'$; $TM = q$; $AW = u'$ und die Ordinate $WV = y'$; so hat man in den ähnl. Drei. AMT, AWR

$$AM : MT = AW : WR, \text{ oder } WR = \frac{qu'}{a'}, \text{ folglich}$$

$RV = \frac{qu'}{a'} - y'$ und $Vr = \frac{qu'}{a'} + y'$, sohin $RV \cdot Vr = TM^2$

$= \frac{q^2u'^2}{a'^2} - y'^2$, und, statt y'^2 den Werth (ψ) §. 121 substituirt,

$$\frac{q^2u'^2}{a'^2} - \frac{b'^2u'^2}{a'^2} + b'^2 = q^2, \text{ oder } (q^2 - b'^2)\left(\frac{u'^2}{a'^2} - 1\right) = 0,$$

oder $q^2 - b'^2 = 0$, d. i. $q = b'$ oder $tM = TM = AN$ (oder nach Fig. 45 $tM = AG$, was zu beweisen wir im §. 122 versprochen hatten), oder man hat $TM^2 = AN^2 = RV \cdot Vr$.

Zusatz 1.

Zusatz 1. Weil jede von den Asymptoten begrenzte Tangente im Berührungspunkte halbirt und gleich ist dem ihr parallelen Durchmesser; so ist auch die Differenz der Quadrate der Tangenten, welche den zugeordneten Durchmessern zwischen den Asymptoten parallel gezogen werden, eben so eine beständige Größe, wie der Unterschied der Quadrate dieser Durchmesser selbst (§. 122. Zus. 1).

Zusatz 2. Aus unserem Satze und §. 127. Zus. folgt die Methode, die Hyperbel geometrisch zu beschreiben, wenn die halben beigeordneten Durchmesser AN, AM (Fig. 48) mit dem Conjugationswinkel gegeben sind.

Wenn man nämlich für den Anfangspunkt M des Durchmessers AM eine Tangente zieht und MT, Mt gleich AN macht; dann durch A die geraden Linien AT, At zieht; so hat man die Asymptoten. Zieht man nun durch M mehrere in den Asymptoten begrenzte Linien PMQ, PMQ, ... und macht immer PO = QM; so gehören alle Punkte O zur Hyperbel. Eines jeden solchen Punktes O kann man sich weiter bedienen, um die Punkte V zu bestimmen, indem man durch O Sekanten, wie RS, zieht und dann SV = RO macht.

Würde man aber den Asymptotenwinkel und dessen Supplement halbiren; so hätte man die Richtungen der Axen, deren Größe nach §. 124 gefunden und sohin das dortige Problem aufgelöst werden könnte.*)

Anmerkung 1.

Die allgemeine Gleichung für die Kegelschnitte ist

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a} \text{ oder } y^2 = \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2},$$

*) Hinsichtlich der Theorie der Linien der ersten und zweiten Ordnung vergl. unter den neueren Schriften:

1) An analytical System of conic Sections, designed for the use of students in the university; by the Rev. H. P. Hamilton etc. Cambridge 1828. (Auch in's Deutsche übersetzt vom Prof. J. H. Benkendorff — Berlin, 1828).

2) Elemente der Algebra und Geometrie von J. J. Littrow, ꝛc. — Wien, 1827.

wenn man $\frac{b^2}{a}$ statt p setzt. Diese Gleichung gilt nämlich für die Ellipse, Hyperbel und Parabel, je nachdem a mit +, oder —, oder $= \infty$ gesetzt wird.

Einen allgemeinen Ausdruck des Laufes dieser Curven bietet die bekannte Euler'sche Gleichung

$$z = \pm \sqrt{(fu^2 + gu + h)}$$

dar, je nachdem der als konstant angenommene Coefficient f mit +, oder —, oder $= 0$ gesetzt wird. Gilt nämlich +; so behält z für $u = +\infty$ oder $u = -\infty$ einen reellen Werth; folglich läuft die Curve nach entgegengesetzten Richtungen in's Unendliche aus (Hyperbel). Gilt —; so wird z sowohl für $u = +\infty$, als $= -\infty$ imaginär, d. i. die Curve erstreckt sich nach keiner Richtung in's Unendliche (Ellipse; Kreis). Gilt $f = 0$; so bekommt z nur für $u = +\infty$ einen reellen, aber für $u = -\infty$ einen imaginären Werth; die Curve läuft also nur nach einer Richtung in's Unendliche aus (Parabel).

Anmerkung 2.

Zur näheren Eintheilung der Curven bedienten sich die Mathematiker folgender allgemeinen Ausdrücke der Kegelschnitte:

$$(1) \ldots \quad y^{m+1} = ax^m - x^{m+1};$$

$$(2) \ldots \quad y^m = px^{m-1};$$

$$(3) \ldots \quad ay^{m+n} = px^m(a \mp x)^n;$$

wo a die große Axe und p den Parameter bezeichnet. Nämlich $m = 1$ gesetzt, gilt (1) für den gemeinen Kreis (§. 90. Zus. 2. (δ)); $m = 2$ gesetzt, gilt (2) für die gemeine Parabel, und $m = n = 1$ gesetzt, gilt (3) für die gemeine Ellipse und Hyperbel. Diese Curven nannte man auch die konischen, quadratischen oder apollonischen. Letzteren Namen erhielten sie, weil Apollonius (um d. J. 247 vor C. G. zu Perga in Pamphilien geboren) ein berühmtes Werk über die Kegelschnitte geschrieben hat.

Setzt man für m und n andere Werthe; so entstehen gleichsam andere Curven und alle zu (1) oder (2) oder (3) gehörigen

Curven bilden eine eigene Familie, oder ein besonderes Geschlecht; und zwar ist eine Curve vom nten Geschlechte, wenn ihre Gleichung n+1 Abmessungen hat. Es gehören demnach die gemeinen Kegelschnitte zum 1. Geschlechte. Die Curven dieser 3 Geschlechter theilte man wieder nach Arten ab. Euler nahm das Merkmal für diese Unterabtheilung aus der Natur und Zahl der Aeste einer Curve und gab daher 3 Arten des 1. Geschlechtes (vergl. Anm. 1) und 16 Arten des 2. Geschlechtes; Newton aber, andere Eigenschaften der Curven berücksichtigend, zählte 72 Arten Curven desselben 2. Geschlechtes . . .

C.

Die Kegelschnitte, auf den Krümmungskreis bezogen.

§. 129. Erklärung. Wenn eine Kreislinie Mm (Fig. 49) und eine andere Curve AMB in demselben Punkte M eine gemeinschaftliche Tangente MT haben, und die erste Ablenkung der Kreislinie von der Richtung der Tangente eben so groß ist, als die erste Ablenkung der Curve AMB von derselben MT; so hat die Kreislinie Mm unter übrigens unzählig vielen Kreisbogen, die ebenfalls M und MT gemeinschaftlich haben können, einerlei Krümmung mit der Curve AMB. Diese Kreislinie heißt daher Krümmungskreis (circulus osculator) für den Punkt M; sein Halbmesser MC Krümmungs-Halbmesser (radius oculi, s. curvaturae, auch radius evolutae) und sein Mittelpunkt C der Krümmungs-Mittelpunkt. Stellt man sich jene ersten Ablenkungen als unendlich kleine Bogen vor; so kann man auch sagen: der Krümmungskreis geht zum unendlich kleinen Bogen einer Curve im Punkte M so nahe hinzu, daß, so wie zwischen TM und Mm keine andere gerade Linie möglich ist, eben so auch zwischen dem unendlich kleinen Bogen des Krümmungskreises und dem entsprechenden Bogen der Curve kein anderer Kreisbogen gezogen werden kann.

Stellt man sich eine Curve B vor, in welcher alle Mittelpunkte der Krümmung einer gegebenen Curve A liegen; so nennt man jene Curve B der Mittelpunkte die abgewickelte (developpirte) oder die Evolute der Curve A, und diese die Evolvente. Wenn z. B. in Fig. 50 die Curve mBn alle Mittelpunkte der Krümmung der gemeinen Parabel MAN enthält; so ist diese die Evolvente und mBn die Evolute oder Neil'sche Parabel.

§. 130. Aufgabe. Für einen gegebenen Punkt K eines Kegelschnittes (Fig. 43) den algebraischen Ausdruck des Krümmungs-Halbmessers zu finden.

Auflösung. Sey Kt die Tangente für K, lKr ein unendlich kleiner Bogen der Curve; KL der Durchmesser; lor die mit Kt parallele Sehne des Bogens lKr, folglich lo, or Ordinaten sowohl für KL, als für den Durchmesser des Krümmungskreises, auf welchen sie senkrecht sind. Weil ferner jeder Kreis-Halbmesser auf die Tangente im Berührungspunkte K senkrecht ist (Geom. §. 89. II.); so wird der Krümmungshalb- oder Durchmesser z. B. Kb in der Normale KN oder deren Verlängerung liegen. Man setze endlich, daß die Peripherie des Krümmungskreises dem Durchmesser KL, oder dessen Verlängerung in irgend einem Punkte a begegne; welchen Punkt man denn mit b durch die Gerade ab verbinde.

Nun ist 1) vermöge der Natur des Kegelschnittes $lo^2 : Ko \cdot oL = AH^2 : AK^2$ (vergl. §. 109. §. 122. Zus. 1) und vermöge der Natur des Kreises lo^2 oder $y^2 = (2a - x) \times$ Ko . oa, folglich durch Substitution und Reduktion

$$ao : oL = AH^2 : AK^2;$$

daher, weil die Punkte l, o, r, K unendlich nahe aneinander liegen, folglich KL von oL, wie ao von aK unendlich wenig verschieden ist, hat man

$$aK = \frac{KL \cdot AH^2}{AK^2} = \frac{2AK \cdot AH^2}{AK^2} = \frac{2AH^2}{AK}.$$

2) Der Voraussetzung gemäß ist der Winkel Kab, als ein auf den Krümmungsdurchmesser Kb stehender Peripheriewinkel, $= 90^0$, sohin sind die Drei. ASK, abK ähnlich und

$KS : KA = Ka : Kb$, d. i. $Kb = \frac{KA \cdot Ka}{KS} = \frac{2AH^2}{KS}$, oder

(1) ... $\frac{1}{2}Kb = \frac{AH^2}{KS}$, d. i. der Krümmungshalbmesser ist gleich dem Quadrate des halben zugeordneten Durchmessers, dividirt durch das von diesem Durchmesser zum Berührungspunkte der Tangente gezogene Perpendikel.

3) Nach §. 110 ist $KS \cdot AG$ oder $KS \cdot AH = AB \cdot AD = a \cdot b$, oder $KS = \frac{a \cdot b}{AH}$; daher hat man durch Substit. dieses Werthes in (1)

(2) ... $\frac{1}{2}Kb = \frac{AH^3}{a \cdot b}$,

d. i. der Krümmungshalbmesser ist gleich dem Würfel des halben zugeordneten Durchmessers, dividirt durch das Rechteck unter den halben Aren.

4) Nach dem Vorigen ist $KS^2 : a^2 = b^2 : AH^2$, aber $b^2 = KS \cdot KN$ (§. 110. Bew.), daher $AH^2 = \frac{KN \cdot a^2}{KS^2}$ und durch Substit. in (1)

(3) ... $\frac{1}{2}Kb = \frac{KN \cdot a^2}{KS^2}$.

5) $p = \frac{b^2}{a}$ oder $b^2 = ap = KS \cdot KN$, daher $KS^2 = \frac{a^2p^2}{KN^2}$ und durch Substit. in (3)

(4) ... $\frac{1}{2}Kb = \frac{KN^3}{p^2}$.

Zusatz 1. Also 4 Ausdrücke des Krümmungshalbmessers, die sich für jeden Kegelschnitt durch gehörige Substitutionen näher bestimmen lassen. So ist z. B. nach der Formel des §. 105. Zus. 1, in welcher a und b nur die halben Aren bedeuten, $NM = \frac{b}{a^2}\sqrt{(a^4 - 4a^2u^2 + 4b^2u^2)}$, wo nun a und b die ganzen Aren bezeichnen, folglich für die Ellipse nach (4)

$$\frac{1}{2}Kb = \frac{MN^3}{p^2} = \frac{b^3}{a^6 \cdot p^2}\sqrt{(a^4 - 4a^2u^2 + 4b^2u^2)^3}$$
$$= \frac{1}{a^4b}\sqrt{(\ldots)^3}, \text{ indem } p^2 = \frac{b^4}{a^2},$$
$$= \frac{1}{b}\sqrt{(\ldots)^3}, \text{ wenn } a = 1 \text{ gesetzt wird.}$$

Zusatz 2. Für den besondern Fall, wo K mit dem Scheitel B der Curve zusammenfällt, oder die Abstisse x verschwindet, folglich für Ellipse und Hyperbel nach §§. 105. 118. Zus. 1 das Quadrat der Normale KN oder

$$MN^2 = PM^2 + PN^2 = 2px \mp \frac{px^2}{a} \pm \left(p - \frac{px}{a}\right)^2 = p^2,$$

und eben so auch für die Parabel nach §. 96

$$MN^2 = 2px + p^2 = p^2,$$

d. i. für alle 3 Curven die Normale $MN = p$ wird; ist der Krümmungshalbmesser $= \frac{MN^3}{p^2} = p$, oder der Durchmesser der Krümmung gleich dem ganzen Parameter, daher für die Parabel gleich dem vierfachen Abstande des Brennpunktes oder der Directrix vom Scheitel (§. 94. Zus.).

Man kann folglich auch umgekehrt sagen: wenn jene Curven einerlei Parameter haben; so haben sie auch für den Scheitel denselben Krümmungshalbmesser, oder Krümmungskreis.

Weil man ferner schon vermöge der Erklärung §. 129 statt des Krümmungsbogens der Curve den des Krümmungskreises nehmen kann; so kann man z. B. einen sphärischen Hohlspiegel statt eines parabolischen setzen, indem der Durchmesser des Krümmungskreises für den Scheitel der Parabel dem Parameter derselben gleich ist, also für beide Spiegel einerlei Brennpunkt Statt findet (§. 101. Zus. 1).

Anmerkung. Diese Theorie findet unter Andern eine sehr nützliche Anwendung bei der Berechnung der Parallelgrade auf dem Erdsphäroide (vergl. z. B. Mayer's prakt. Geom. IV. Bd. S. 101 u. ff.).

VI.

Die Differenz- und Differenzial-Rechnung.

A.

Einleitung.

§. 151. Erklärungen.

1. Die in einem Ausdrucke oder einer Gleichung mittelst der verschiedenen mathematischen Operationen verbundenen Größen sind entweder solche, deren Werthe sich beliebig ändern lassen, oder solche, die bei aller Werthsänderung jener Größen immer denselben Werth behalten. Die ersteren (mit $x, y, z, \ldots$ bezeichnet) werden *veränderliche*, *variable*, und die letzteren (mit $a, b, c, \ldots$ bezeichnet) *konstante* Größen genannt. So sind z. B. in der Gleichung für den Kreis: $y^2 = ax - x^2$ oder $y = \sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 90. Zus. 2. (δ)) die Ordinaten y, x veränderliche Größen, der Durchmesser a aber eine Konstante. Sollte daher für eine *gegebene* Abscisse die zugehörige Ordinate in allen möglichen Kreisen gesucht werden; so würde man die Abscisse, statt mit x, nun z. B. mit b und den jetzt veränderlichen Durchmesser z. B. mit z bezeichnen, daher setzen:

$$y^2 = bz - b^2.$$

2. In wiefern man vorzugsweise den wegen der Variablen x veränderlichen Werth des Ausdruckes $\sqrt{(ax - x^2)}$ oder der ihm gleichen Größe y berücksichtiget; sieht man vorerst von den vorhandenen konstanten Größen des Ausdruckes ab, und nennt x die *unabhängige* Variable, y aber die *abhängige* und selbst wieder veränderliche Größe, oder die *Funktion* von x.

Es erhellt leicht, daß in den Ausdrücken:

$$u = a + x; \quad u = bx - y; \quad u = xyz; \ldots$$

die veränderliche Größe u nicht nur entweder von einer einzigen oder von mehreren Variablen, sondern auch von der Form

abhänge, wie u entweder selbst noch mit den letzteren Größen, oder nur diese unter einander und etwa noch mit Konstanten verbunden sind. Um daher die Natur oder das Gesetz der Abhängigkeit einer entweder *gesonderten* (wie in den vorigen, als aufgelöst zu betrachtenden, Gleichungen), oder einer *ungesonderten* (wie z. B. in: $y^2 - ax + x^2 = 0$) Funktion u oder y zu erforschen, müssen Materie und Form des ihr gleichen Ausdruckes in Betrachtung kommen. (Vergl. „*allgem. Größenl.*" §§. 18. 19.)

Die obigen Ausdrücke: $a + x$; $bx - y$; ... sind Funktionen *verschiedenen Inhaltes* und *verschiedener Form*; aber z. B. $ax + bx + cx^2 + \ldots$ und $ay + by + cy^2 + \ldots$ sind Funktionen von *einerlei Form*. Beide sind nicht zu verwechseln mit der *einförmigen* oder *vielförmigen* Funktion. Diese heißt nämlich einförmig, wie $u = a + x$, wenn sie für jeden besondern Werth der unabhängigen Variablen nur einen einzigen Werth erhält; im Gegentheile nennt man sie *zwei-* oder *drei-* ... oder überhaupt *vielförmig*. So ist die obige Kreisfunktion $y^2 = ax - x^2$ eine zweiförmige, indem man erhält $y = +\sqrt{(ax - x^2)}$ und $y = -\sqrt{(ax - x^2)}$.

Zur sehr bequemen Bezeichnung der mannigfachen Ausdrücke, als Funktionen gewisser Variablen, haben die neueren Mathematiker die Buchstaben f, F, φ, ψ, ... gewählt, deren jedem die als unabhängig betrachteten veränderlichen Größen durch einen Einschluß beigefügt werden. So bezeichnen z. B. $f(x, y)$, $F(x, y)$ verschieden geformte Funktionen von x und y (wie $a - x + y$ und xy); eben so sind $f(x)$, $\varphi(x)$, ... Zeichen verschieden geformter Funktionen von x (wie $a + x$ oder ax^m), und $f(y)$, $\varphi(y)$ in demselben Calkul Funktionen von y, die von jenen nur in der Bezeichnung der veränderlichen Größe verschieden sind. Die Konstanten, die (wie a in obigen Ausdrücken) in der Funktion vorhanden seyn können, werden in der Regel bei dieser Bezeichnung gar nicht, oder nur besonderer Zwecke wegen mit in das Funktionszeichen (wie $f(x, y, z, a)$) aufgenommen.

3. Hinsichtlich der Form theilt man die Funktionen überhaupt in *algebraische* und *transcendente* ein. Jene sind solche Ausdrücke, in welchen die Veränderlichen unter sich und

mit Konstanten mittelst der arithmetischen Grundoperationen (Addit. und Subtr.; Multipl. und Division; Potenzirung und Wurzelausziehung) verbunden sind. Alle übrigen Funktionen heißen transcendente, wie die Exponentialgrößen (z. B. a^x); die logarithmischen, trigonometrischen Funktionen (wie $\log x$; $\sin x$; ... $\text{arc. sin } x$, ...). In allen diesen Ausdrücken kommen nämlich Größen vor, welchen, wie den Sinussen, unzählige Werthe entsprechen. Daher gehören denn auch unendliche Reihen, deren Werthe sich durch keinen algebraischen Ausdruck in einer endlichen Anzahl von Gliedern darstellen lassen, zu den transcendenten Funktionen.

4. Unter diesen, sowohl algebraischen als transcendenten, Funktionen einer Veränderlichen, werden die, wie

$$a \pm x;\ ax;\ \frac{a}{x};\ x^m;\ a^x;\ \log x;\ \sin x;\ \text{arc. sin } x;\ \ldots$$

welche das Resultat einer einzigen, mit der veränderlichen x vorgenommenen, Operation sind, von solchen Funktionen unterschieden, welche sich mit Hülfe mehrerer Operationen aus einer Variablen herleiten lassen, wie z. B.

$$x^x;\ \sqrt[x]{x};\ \frac{\log x}{x};\ \text{tang } x \left(\text{indem tang} = \frac{\sin}{\cos}\right);\ \text{arc. tang } x;\ \ldots$$

Jene heißen einfache; diese zusammengesetzte Funktionen.

5. Zu den Letzteren rechnet man auch die Funktionen von Funktionen (wie $\log \sin x$), welche nämlich das Resultat mehrerer successiver Operationen sind, deren erste mit der veränderlichen Größe, und deren jede folgende Operation mit dem Resultate der zunächst vorhergegangenen Operation vorgenommen wird. Solche Funktionen sind durch $ff(x)$; $fff(x)$, ... oder $f^2(x)$, $f^3(x)$, ... bezeichnet. Ist z. B. $f(x) = (1+ax)^m$, und man setzt diese Funktion statt x; so ist die aus $f(x)$ entsprungene Funktion $f^2(x) = [1+a(1+ax)^m]^m$.

6. Die algebraische Funktion heißt rational, wenn die in ihr vorkommenden Veränderlichen nur ganze Zahlen zu Exponenten haben; das Gegentheil ist die irrationale Funktion, wie $\sqrt{(1+ax)}$ oder $(1+ax)^{\frac{1}{2}}$. Die Funktion ist ferner eine ganze, wenn jene Exponenten + Zahlen sind; das Gegentheil

ist die gebrochene oder Bruchfunktion, wie z. B. $(1+ax)^{-2}$ oder $\frac{1}{(1+ax)^2}$, ...

Jede rationale und ganze Funktion hat Glieder von der Form: $Ax^m y^n z^p \ldots$, wo A den aus Konstanten zusammengesetzten Coefficienten bezeichnet. Die höchste Summe der Exponenten eines dieser Glieder bestimmt die Ordnung oder den Grad der Funktion; so ist $a+bx$ eine ganze Funktion des ersten Grades, die man auch die lineäre Funktion nennt (§. 88).

Die rationale ganze Funktion, die in jedem Gliede eine Potenz derselben Variablen enthält, hat die Form:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Mx^m,$$

und ist von der mten Ordnung. Die Ordnung der rationalen Bruchfunktion, als Quotient aus 2 solchen Polynomien, wird durch die Differenz jener höchsten Ordnungsexponenten des Zählers und Nenners bestimmt, nachdem die Funktion auf die einfachste Form $\frac{Z}{N}$ gebracht ist, in welcher die Funktionen Z und N keinen Faktor weiter gemeinschaftlich haben.

7. Die Funktion heißt gleichartig (homogen), wenn jedes ihrer Glieder dieselbe Summe der Ordnungsexponenten hat; so ist

$$Ax^m y^n + Bx^p y^q + Cx^r y^s$$

eine gleichartige Funktion, wenn $m+n = p+q = r+s$ ist, die einzelnen Exponenten mögen übrigens + oder − seyn. Man erkennt folglich die Dimension einer solchen Funktion, die keine Konstante zum Gliede haben kann, aus jener Summe der Exponenten eines einzelnen Gliedes. So ist auch die Bruchfunktion

$$\frac{Ax^m}{y^n} + \frac{Bx^p}{x^q + y^q}$$

eine gleichartige, wenn die die Dimension bestimmende Differenz $m-n = p-q$ ist.

8. Eine Funktion von mehreren Größen heißt eine symmetrische, wenn bei beliebiger Verwechslung dieser Größen Werth

und Zeichen der Funktion ungeändert bleibt. So ist jede der Funktionen

$$x+y;\ x^y+y^y;\ xyz;\ \sin x+\sin y+\sin z;\ \ldots$$

symmetrisch in Beziehung auf die Veränderlichen, die jede Funktion enthält. Nicht symmetrische Funktionen von x und y sind z. B. $x-y;\ x^y;\ \ldots$ Eben so sind $a+b;\ a^2+b^2;\ ab;$ symmetrische Funktionen von a und b.

§. 132. Erklärung und Eintheilung der Differenzen-Rechnung.

Um die Beschaffenheit, oder die Art und Größe der Abhängigkeit einer Funktion (z. B. y^2) von den veränderlichen Größen, von welchen ihr Werth abhängt, zu erkennen, darf man nur das geometrische Verhältniß, oder (was dasselbe ist) den Exponenten des Verhältnisses, in welchem die Zunahme der Funktion zur Zunahme ihrer veränderlichen Größen steht, bestimmen; wobei man auch statt „Zunahme" setzen kann „Abnahme", da diese als negative Zunahme zu betrachten ist.

Drückt man z. B. die Funktion y^2 durch x aus, oder setzt $x=y^2$ und läßt die Variable y, von welcher der Werth der Funktion x oder y^2 abhängig ist, um den Theil Y, demnach auch die Funktion selbst um einen Theil X zunehmen; so geht obige Gleichung in diese

$$x+X=(y+Y)^2=y^2+2yY+Y^2$$

über. Aus letzterer Gleichung hat man (wegen $x=y^2$)

$$X=2yY+Y^2 \text{ oder den Exponenten } \frac{X}{Y}=2y+Y.$$

Die erste dieser Gleichungen lehrt, daß, wenn die Variable y um Y wächst, die Funktion y^2 oder x um $2yY+Y^2\ (=X)$ wachse; und die zweite Gleichung oder der Exponent $\frac{X}{Y}$ läßt erkennen, daß die Funktion y^2 so beschaffen sey, daß ihre Zunahme X die Zunahme der Variablen y um die Summe der doppelten Größe y und ihrer Zunahme übersteige. Man erkennt demnach aus diesem Verhältnisse der beiderseitigen Veränderungen von x und y die Natur der Funktion x vollkommen.

Die Wissenschaft, welche dieses Verhältniß der wechselseitigen Zunahmen der veränderlichen Größen und der Funktion bestimmen lehrt, heißt überhaupt Differenzen-Rechnung, indem die aufzufindende Zunahme (oder Abnahme) X der Funktion x oder y^2 die Differenz zwischen der unveränderten und veränderten Funktion, nämlich $X = (x+X) - x$ ist.

Die Zunahme Y jeder variablen Größe y, folglich auch der Funktion selbst (§. 131. 2.) ist entweder eine endliche, d. i. eine solche, die, so klein man sie auch nehmen mag, doch zu der veränderlichen Größe y noch in einem merklichen oder solchen Verhältnisse steht, daß Y als gegen y nicht als verschwindend betrachtet werden kann und darf; — oder eine unendlich kleine, d. i. eine solche, die in dem Zustande betrachtet wird, wo sie in Null übergeht, oder gegen die Variable y, wie gegen jede andere Größe, mit der sie zu vergleichen ist, verschwindet.

Die endliche Zunahme Y von y wird mit $\triangle y$, demnach auch die Zunahme X der Funktion x oder y^2 mit $\triangle x$ bezeichnet, und jede erhält den Namen „Differenz." Eben so wird die Gleichung (im obigen Beispiele)

$$X = 2yY + Y^2 \text{ oder } \triangle x = 2y\triangle y + (\triangle y)^2$$

Differenzgleichung, und die Wissenschaft, die sich mit dem Auffinden der Differenzen der Funktionen beschäftiget, Differenz-Rechnung (im engeren Sinne) genannt. Allein die Zunahme Y oder X, als unendlich kleine, wird mit dy oder dx bezeichnet, und erhält den unterscheidenden Namen „Differenzial." Das Differenzial einer Funktion finden, heißt „Differenziiren"; die Gleichung

$$X = 2yY + Y^2 \text{ oder } dx = 2ydy + (dy)^2$$

„Differenzialgleichung", und die Wissenschaft, das Differenzial einer gegebenen Funktion, mithin auch das Verhältniß oder den Exponenten des Verhältnisses ihres Differenzials zum Differenzial einer jeden ihrer veränderlichen Größen, — oder kurz eine Differenzialgleichung zu finden, heißt Differenzial-Rechnung.

Anmerkung. Daß man die Differenz oder das Differenzial einer Funktion z. B. xy oder x^2 finden solle, bezeichnet

wie künftig durch $\Delta(xy)$, $\Delta(x^2)$ oder kürzer durch $\Delta.xy$, $d.xy$ oder $\Delta.x^2$, $d.x^2$. Eben so bedeutet künftig z. B. Δx^2 (statt $(\Delta x)^2$) oder dx^2 (statt $(dx)^2$) und allgemein: Δx^m oder dx^m die Potenz der Differenz oder des Differenzials von x selbst; es ist daher z. B. Δx^2 (= $\Delta x . \Delta x$) weder mit $\Delta(x^2)$, noch mit $\Delta x . x$ zu verwechseln.

B.

Erste Grundsätze der Differenz- und Differenzial-Rechnung.

§. 133. 1. Grundsatz.

Es ist für die Zunahme Δz oder dz der Funktion z einerlei, ob die Gleichung für diese Funktion konstante, mit den Variablen durch + oder − verbundene, Größen enthalte, oder nicht. Denn die Konstanten haben keine Zunahme.

So, wenn $z = x$, ist $z + \Delta z = x + \Delta x$, oder auch $z + dz = x + dx$; folglich (wegen $z = x$) die Differenzgleichung:

$\Delta z = \Delta x$ und die Differenzialgleichung: $dz = dx$.

Aber auch, wenn z. B. $z = x + a - b$ ist, hat man wieder $z + \Delta z = x + \Delta x + a - b$, daher $\Delta z = \Delta x$. Eben so wenn $b + y = x - c$ ist, findet man wieder $dy = dx$, oder das Verhältniß $\frac{\Delta z}{\Delta x} = 1$, oder $\frac{dz}{dx} = 1$, d. i. gleich dem Coefficienten der unabhängigen Variablen x.

2. Grundsatz.

Ist aber die Konstante Coefficient einer veränderlichen Größe; so ist sie auch in der Differenz- oder Differenzialgleichung Coefficient der Zunahme eben jener Variablen.

Denn wenn $z = ax$ ist, wird $z + \Delta z = a(x + \Delta x) = ax + a\Delta x$, demnach (wegen $z = ax$) $\Delta z = a\Delta x$, und eben

so auch $dz = a dx$. Es ist also jetzt das gesuchte Verhältniß oder dessen Exponent

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = a \text{ oder } \frac{dz}{dx} = a,$$

d. i. überhaupt gleich dem Coefficienten der unabhängigen Variablen, welche Zahl auch durch a vorgestellt werde.

3. Grundsatz.

Wenn in der gegebenen Gleichung der Funktion die veränderlichen Größen durch + oder − verbunden sind; so behalten ihre Zunahmen in der gesuchten Gleichung dieselbe Verbindung.

Denn sey $z = ax + by - cv$; so ist nach 2. Grundsatz

$z + \Delta z = ax + a\Delta x + by + b\Delta y - (cv + c\Delta v)$, woraus

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y - c\Delta v.$$

So ist von $z = x + y - v$ die Differenzialgleichung:

$$dz = dx + dy - dv.$$

§. 134. 4. Grundsatz.

Wenn in gegebener Gleichung der Funktion die Variablen der Letzteren durch Multiplikation verbunden sind; so erhält man

a) die Differenzgleichung, wenn man 1) die Differenz jeder einzelnen Veränderlichen mit den übrigen Veränderlichen, als wären diese konstante Größen, — 2) jede Veränderliche mit dem Produkte der Differenzen oder Zunahmen der übrigen Variablen, und 3) die Zunahmen aller Veränderlichen selbst mit einander multiplizirt, und alle erzeugten Produkte addirt;

b) die Differenzialgleichung, indem man, wie vorhin unter 1) das Differenzial jeder einzelnen Variablen nach §. 133. 2. Grundsatz sucht, als wären die übrigen Veränderlichen konstant, und dann diese Produkte addirt.

1. Sey

1. Sey nämlich $z = xy$ die gegebene Gleichung; so ist

$z+\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)=xy+y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y$, d. i.

a) $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x . \Delta y$, oder

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = y + x . \frac{\Delta y}{\Delta x} + \Delta y.$$

Weil eben so $z + dz = (x+dx)(y+dy)$ ist, so ist

$$dz = ydx + xdy + dx . dy.$$

Allein da die Zunahmen dx, dy, in dem Zustande betrachtet, wo man sie in Nullen verwandelt, schon gegen x und y verschwinden (§. 132); so verschwindet um so mehr das Produkt dx . dy sowohl gegen xdy, als gegen ydx; folglich hat man

b) $dz = ydx + xdy$, und $\frac{dz}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$, oder $\frac{dz}{dy} = y\frac{dx}{dy} + x$.

2. Sey $z = xyv$; so entwickelt man, wie vorhin,

a') $\Delta z = yv\Delta x + xv\Delta y + xy\Delta v + x\Delta y\Delta v + y\Delta x\Delta v + v\Delta x\Delta y + \Delta x . \Delta y . \Delta v$;

und aus dem vorhin angeführten Grunde

b') dz oder $d(xyv) = yv . dx + xv . dy + xy . dv$. U. s. w.

§. 135. 5. Grundsatz:

Wenn in der gegebenen Gleichung der Funktion die Variable der Letztern zur Potenz erhoben vorkommt; so findet man

α) die Differenzgleichung entweder mit Hülfe des vorigen 4. Grundsatzes, oder durch Entwickelung der Potenz der Veränderlichen + ihrer Zunahme nach der Binomial-Formel (allgem. Größenl. §§. 65. 66);

β) die Differenzialgleichung, indem man die veränderliche Größe unter dem gegebenen, aber um die Einheit verminderten Exponenten der Potenz sowohl mit dem ungeänderten Exponenten, als auch mit dem Differenzial der Veränderlichen multiplizirt.

1. Sey $z = x^2$ gegeben; so ist das eben so viel, als man hätte in $z = xy$ (unter 1. des vor. Grundſ.) statt y nochmals dieſelbe Veränderliche x, oder $x = y$ geſetzt. Subſtituirt man daher auch in obiger Differenzgleichung a) ſtatt y nun x und demnach auch $\triangle x$ statt $\triangle y$; ſo findet man

$$\alpha)\ \triangle z = \triangle(x^2) = x\triangle x + x\triangle x + \triangle x.\triangle x = 2x\triangle x + \triangle x^2,$$

$$\text{und } \frac{\triangle z}{\triangle x} = 2x + \triangle x.$$

Weil aber für dx jede Potenz dieſes Differenzials, wie dx^2, gegen jedes der übrigen Glieder, in welchen ſich eine ſolche Potenz als Faktor nicht vorfindet, wie hier gegen 2xdx, aus dem im §. 134 angeführten Grunde verſchwindet; ſo erhellt, daß

$$\beta)\ d.x^2 \text{ oder } dz = 2x^{2-1}dx = 2xdx \text{ und } \frac{dz}{dx} = 2x \text{ ſey.}$$

2. Sey $z = x^3 = x^2.x$; ſo iſt

$$z + \triangle z = \triangle(x^2)(x + \triangle x)$$
$$= [x^2 + 2x\triangle x + \triangle x^2](x + \triangle x)$$
$$= x^3 + 3x^2\triangle x + 3x\triangle x^2 + \triangle x^3; \text{ alſo}$$

$$\alpha')\ \triangle z = 3x^2\triangle x + 3x\triangle x^2 + \triangle x^3, \text{ und}$$

$$\frac{\triangle z}{\triangle x} = 3x^2 + 3x\triangle x + \triangle x^2.$$

Es verſchwinden aber, wie bemerkt wurde, für dx die 2 letzten Glieder in $\alpha')$, nämlich $3x.dx^2 + dx^3$; folglich iſt

$$\beta')\ d.x^3 \text{ oder } dz = 3x^2dx, \text{ und } \frac{dz}{dx} = 3x^2.$$

3. Sey allgemein $z = x^m$; ſo iſt eben ſo allgemein $z + \triangle z = (x + \triangle x)^m$, daher nach der Binomialformel

$$= x^m + mx^{m-1}\triangle x + \frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2}\triangle x^2$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}x^{m-3}\triangle x^3 + \ldots \text{ Alſo}$$

$$\alpha'')\ \triangle z = mx^{m-1}dx + \frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2}\triangle x^2 + \ldots \text{ und}$$

$$\frac{\triangle z}{\triangle x} = mx^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2}.\triangle x + \ldots$$

Es ist aber auch eben so

$$z+dz=(x+dx)^m=x^m+mx^{m-1}dx+\frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2}dx^2+\ldots$$

also $dz=mx^{m-1}dx+\frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2}dx^2+\ldots$, oder

β') $dz=mx^{m-1}.dx$ und $\frac{dz}{dx}=mx^{m-1}$,

indem das zweite und so jedes folgende Glied der rechten Seite der vorigen Differenzialgleichung wegen der Faktoren dx^2, dx^3 ... verschwindet.

Zusatz. Es ist eben so

$$d(a+b\sqrt{y})=d(a+b.y^{\frac{1}{2}})=\tfrac{1}{2}by^{\frac{1}{2}-1}.dy=\frac{b.dy}{2\sqrt{y}},$$

und $d(\sqrt[3]{ay})=d(a^{-\frac{1}{3}}.y^{-\frac{1}{3}})=-\tfrac{1}{3}a^{-\frac{1}{3}}.y^{-\frac{4}{3}}=\frac{-1}{3y\sqrt[3]{ay}}$.

(Vgl. §. 133. 1. und 2. Grundsf. und allgem. Größenl. §. 52 mit Zus. 2 und 4).

§. 136. 6. Grundsatz:

Wenn in der Gleichung der Funktion die Veränderlichen der Letztern durch Division verbunden sind, oder überhaupt unter der Bruchform vorkommen; so erhält man

erstens die Differenzgleichung, indem man die Zunahme des Zählers mit dem Nenner, dann die Zunahme des Nenners mit dem Zähler multiplizirt, dieses letzte Produkt von jenem ersten abzieht, und den so entstandenen Unterschied durch das Produkt — aus der Summe des veränderlichen Nenners und seiner Zunahme in den Nenner — dividirt;

zweitens die Differenzialgleichung auf gleiche Weise, nur daß jener als neuer Zähler entwickelte Unterschied durch das Quadrat des vorgegebenen Nenners dividirt wird.

Sey $z = \frac{x}{y}$, demnach $z + \Delta z = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y}$; so entwickelt man hieraus

$yz + y\Delta z + z\Delta y + \Delta y . \Delta z = x + \Delta x$, oder (durch Div. mit y)

$z + \Delta z + \frac{z\Delta y}{y} + \frac{\Delta y . \Delta z}{y} = \frac{x}{y} + \frac{\Delta x}{y}$, und $\left(\text{wegen } z = \frac{x}{y}\right)$

$\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)\Delta z + \frac{x}{y^2}\Delta y = \frac{\Delta x}{y}$, oder

$\frac{y + \Delta y}{y} . \Delta z = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}$, daher denn

erstens: $\Delta z = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{(y + \Delta y)y}$, wie es der Grundsatz ausspricht.

Weil man eben so aus $z + dz = \frac{x + dx}{y + dy}$ findet

$$yz + ydz + zdy + dy . dz = x + dx,$$

aber $dy . dz$ gegen jedes der übrigen Glieder verschwindet; so entwickelt man auf gleiche Weise

zweitens: $dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Dieselbe Differenzialgleichung findet man auch nach dem vorhergehenden 4. und 5. Grundsatz. Da nämlich $d . z = d . \frac{x}{y} = d . xy^{-1}$ ist; so hat man $dz = y^{-1}dx + x . d(y^{-1}) = y^{-1}dx - xy^{-2}dy$, also $dz = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; und das Differenzial-Verhältniß ist hier

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} . \frac{dy}{dx} \text{ und } \frac{dz}{dy} = \frac{1}{y} . \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y^2}.$$

Zusatz. Für $d . z = d . \frac{a}{y}$ ist $dz = -\frac{ady}{y^2}$; daher $\frac{dz}{dy} = -\frac{a}{y^2}$. U. s. w.

C.

Anwendung der ersten Grundsätze der Differenz- und Differenzial-Rechnung.

1.

Entwickelung allgemeiner Differenzenformeln für die trigonometrischen und Kreis-Funktionen überhaupt.

a. Differenzformeln.

§. 137. In der Formel nr. 91 des §. 20 wird $\varphi > \psi$, oder (nach anderer Bezeichnung) $x > y$ genommen. Setzt man nun, daß y durch Hinzuthun von $\triangle y$ gleich x, und eben so sin y durch Addition von $\triangle \sin y$ gleich sin x werde, oder daß $x = y + \triangle y$ und $\sin x = \sin y + \triangle \sin y$ sey; so geht jene Formel in diese über:

(1) $\triangle \sin y = 2 \cos (y + \frac{1}{2}\triangle y) \cdot \sin \frac{1}{2}\triangle y$.

Eben so hat man, sich erinnernd, daß beim Wachsen des Bogens Cosinus, Cotangente und Cosekante abnehmen, die Formeln:

(2) $-\triangle \cos y = 2 \sin (y + \frac{1}{2}\triangle y) \cdot \sin \frac{1}{2}\triangle y$ (aus nr. 93).

(3) $\triangle \tang y = \frac{\sin \triangle y}{\cos (y + \triangle y) \cdot \cos y}$ (aus nr. 131).

(4) $-\triangle \cot y = \frac{\sin \triangle y}{\sin (y + \triangle y) \cdot \sin y}$ (aus nr. 134).

Weil endlich $\cos y - \cos x = \frac{1}{\sec y} - \frac{1}{\sec x} = \frac{\sec x - \sec y}{\sec y \cdot \sec x}$

$= (\sec x - \sec y) \cos x \cdot \cos y$, also $\sec x - \sec y = \frac{\cos y - \cos x}{\cos x \cdot \cos y}$

$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cdot \sin \frac{1}{2}(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$ nach nr. 93 ist; so findet man hieraus durch Substitution

(5) $\triangle \sec y = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(y + \frac{1}{2}\triangle y) \cdot \sin \frac{1}{2}\triangle y}{\cos (y + \triangle y) \cdot \cos y}$.

(6) $\triangle \operatorname{cosec} y = \frac{2\cos\frac{1}{2}(y+\frac{1}{2}\triangle y).\sin\frac{1}{2}\triangle y}{\sin(y\dotplus\triangle y).\sin y}$ *). Man findet nämlich diese Formel, indem man, da allgemein $\operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}$ ist, wie vorher bei (5) verfährt, und zuletzt die Formel nr. 91 zu Hülfe nimmt.

b. Differenzialformeln.

§. 138. Sey $\sin x = y$ daher $y + dy = \sin(x+dx)$ $= \sin x \cdot \cos dx + \sin dx \cdot \cos x$ (§. 18. nr. 65); so hat man hieraus, weil der Sinus eines unendlich kleinen Bogens mit eben diesem zusammenfällt, d. i. $\sin dx = dx$, und ferner $\cos dx$ (wie $\cos o$ zu betrachten, daher nach §. 7. Zus. 3) $= 1\,(=r)$ ist, $y + dy = \sin x + dx \cdot \cos x$; also

(1) dy oder $d(\sin x) = dx \cdot \cos x$;

d. i. das Differenzial des Sinus eines Bogens ist gleich dem Produkte aus dem Differenzial eben dieses Bogens in den Cosinus desselben Bogens.

Setzt man $x = 90^0 - z$; so ist (nach §. 133. 1. u. 2. Grundsf.) $dx = -dz$; ferner $\sin(90^0 - z) = \cos z$ und $\cos(90^0 - z)$ $= \sin z$ (§. 5. Zus. 2). Demnach geht die Gleichung (1) in diese über:

(2) $d(\cos z) = -dz \cdot \sin z$;

d. i. das Differenzial des Cosinus eines Bogens oder Winkels ist gleich dem — Produkte aus dem Differenzial dieses Bogens in den Sinus desselben Bogens oder Winkels.

Weil ferner, $y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (§. 11. nr. 12) gesetzt,

$$dy = \frac{\cos x \cdot d(\sin x) - d(\cos x) \cdot \sin x}{\cos x^2} \quad \text{(§. 130)}$$

$$= \frac{dx \cdot \cos x^2 + dx \cdot \sin x^2}{\cos x^2} \quad \text{(vermöge (1) und (2))};$$

so hat man wegen $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$:

(3) dy oder $d(\operatorname{tang} x) = \frac{dx}{\cos x^2}$, oder nach §. 10. nr. 13.

$$d(\operatorname{tang} x) = \sec x^2 \cdot dx = (1 + \operatorname{tang} x^2) \cdot dx.$$

*) Man vergleiche auch Euler's „Calc. differ." Part. prior.

In (3) wieder $x = 90^0 - z$, demnach $dx = -dz$, ferner $\text{tang}(90^0 - z) = \cot z$ ſtatt $\text{tang}\, x$ und $\cos(90^0 - z) = \sin z$ ſtatt $\cos x$ geſetzt, hat man (§. 13. nr. 54 vergl.)

(4) $d(\cot z) = \frac{-dz}{\sin z^2} = -\operatorname{cosec} z^2 . dz = -(1+\cot z^2)\,dz.$

(5) $d(\sec x) = d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{-d(\cos x)}{\cos x^2}$ (§. 136)

$= \frac{dx . \sin x}{\cos x^2} = \frac{dx . \text{tang}\, x}{\cos x} = dx . \text{tang}\, x . \sec x.$

(6) $d(\operatorname{cosec} x) = d\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{-dx . \cos x}{\sin x^2} = \frac{-dx . \cot x}{\sin x}$

$= -dx . \cot x . \operatorname{cosec} x.$

(7) $d(\sin v.\, x) = dx . \sin x$ (§. 13. nr 36 mit §. 135 u. nach (2)).

(8) $d(\cos v.\, x) = -dx . \cos x.$

Zuſatz 1. Aus dieſen Formeln ergibt ſich die Veränderung eines Bogens oder Winkels x, ſobald man die Aenderung ſeiner trigonom. Funktion ($d . \sin x$; $d . \cos x$; ...) kennt. Es iſt nämlich aus den vorigen (1), (2), (3), ...

(1) $dx = \frac{d \sin x}{\cos x}$. (2) $dx = -\frac{d \cos x}{\sin x}$. (3) $dx = \frac{d \text{tang}\, x}{\sec x^2}$.

(4) $dx = \frac{-d \cot x}{\operatorname{cosec} x^2}$. (5) $dx = \frac{d \sec x}{\text{tang}\, x . \sec x}$. (6) $dx = \frac{-d \operatorname{cosec} x}{\cot x . \operatorname{cosec} x}$

(7) $dx = \frac{d \sin v.\, x}{\sin x}$. (8) $dx = -\frac{d \cos v.\, x}{\cos x}$.

Zuſatz 2. Wie $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ oder $\sin x^2 = 1 - \cos x^2$, eben ſo iſt $\sin y^2 = 1 - \cos y^2$, folglich auch

$\sin x^2 - \sin y^2 = \cos y^2 - \cos x^2 = \sin(x+y) . \sin(x-y)$

nach §. 25. nr. 185. Hier iſt denn wieder $x > y$, und wie im §. 137 ſey auch $x = y + \triangle y$ oder $x - y = \triangle y$ und $\sin x = \sin y + \triangle \sin y$. Man hat demnach vermöge jener Gleichung

(1) u. (2) $\triangle(\sin y^2) = -\triangle(\cos y^2) = \sin(2y + \triangle y) . \sin \triangle y$;

(3) $\triangle(\text{tang}\, y^2) = \frac{\sin(2y + \triangle y) . \sin \triangle y}{\cos(y + \triangle y)^2 . \cos y^2}$ (§. 25. nr. 186);

(4) $\triangle(\cot y^2) = \frac{\sin(2y + \triangle y) . \sin \triangle y}{\sin(y + \triangle y)^2 . \cos y^2}$ (ebend. nr. 186).

Die entsprechenden Differenzialformeln findet man nach der Form $d(x^2) = 2x\,dx$ sehr leicht; indem hier $x = \sin y$ und $dx = d(\sin y) = dy \cos y$ ist. Man hat demnach

(1') und (2') $d(\sin y^2) = -d(\cos y^2) = 2 \sin y \cdot \cos y \cdot dy$;

(3') $d(\operatorname{tang} y^2) = 2 \operatorname{tang} y \cdot d(\operatorname{tang} y) = 2 \operatorname{tang} y \cdot \frac{dy}{\cos y^2}$;

(4') $-d(\cot y^2) = 2 \cot y \cdot \frac{dy}{\sin y^2}$.

Zusatz 3. Wenn $x = \text{arc. sin } y$, oder $x = \text{arc. cos } y$ eines Kreises Bogen (für den Halbmesser $= 1$) bezeichnet, dessen Sinus oder Cosinus ist $= y$; so ist im ersten Falle $\sin x = y$ und $\cos x = \sqrt{(1-y^2)}$ nach §. 9. nr. 1; im zweiten Falle ist $\cos x = y$ und $\sin x = \sqrt{(1-y^2)}$ nach §. 10. nr. 11. Demnach hat man vermöge (1) und (2) des vorigen Zusatzes dx oder

(a) $d(\text{arc. sin } y) = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$ und (b) $d(\text{arc. cos } y) = \frac{-dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$.

Allein bei diesen Formeln ist vorausgesetzt, daß x ein Bogen eines Kreises sey, dessen Halbmesser $= 1$ ist. Wird daher allgemein dieser Halbmesser durch r, und durch x ein Bogen bezeichnet, dessen linearer Sinus ist $= \frac{y}{r}$ (vergl. §. 4. Zus. 2); so ist nun $\cos x = \sqrt{(r^2 - y^2)}$ und $\sin x = \sqrt{(r^2-y^2)}$. Ferner ist $r \cdot \sin x = y$ und $dx = \frac{r \cdot d(\sin x)}{\cos x}$, oder

$$dx = d\left(\text{arc. sin } \frac{y}{r}\right) = \frac{r \cdot dy}{\sqrt{(r^2-y^2)}} \text{ und } d\left(\text{arc. cos } \frac{y}{r}\right) = \frac{-r \cdot dy}{\sqrt{(r^2-y^2)}}.$$

Eben so ist $\operatorname{tang} x = \frac{y}{r}$ oder nach §. 7. 1. $\frac{r \cdot \sin x}{\cos x} = \frac{y}{r}$, oder $\frac{r^2 \sin x}{\cos x} = y$; u. s. w. Der Kürze wegen werden wir in den folgenden Formeln die unter Berücksichtigung des Halbmessers $= r$ geltenden Differenziale den gewöhnlichen Differenzialen (für den Halbm. $= 1$) durch $=$ beifügen, ohne diesem Zeichen eigends, z. B. $\text{arc. tang } \frac{y}{r}$, vorzusetzen.

Es drücke eben so, wie oben, $x = \text{arc. tang } y$ oder $x = \text{arc. cot } y$ eines Kreises Bogen aus, dessen Tangente oder Co-

tangente y ist; so ist nun im ersten Falle $\text{tang}\, x = y$ und $\sec x^2 = 1+y^2$ (§. 15. nr. 31); im zweiten Falle $\cot x = y$, und $\text{cosec}\, x^2 = 1+y^2$ (ebend. nr. 34), daher nach (3) und (4) des nötigen Zus. nun dx oder

(c) $d(\text{arc. tang } y) = \frac{dy}{1+y^2} = \frac{r^2 dy}{r^2+y^2}$ und

(d) $d(\text{arc. cot } y) = \frac{-dy}{1+y^2} = \frac{-r^2 dy}{r^2+y^2}$. — Es sey ferner in gleichem Sinne $x = \text{arc. sec } y$, oder $x = \text{arc. cosec } y$; folglich im ersten Falle $\sec x = y$ und $\text{tang}\, x \cdot \sec x = y \cdot \sqrt{(y^2-1)}$ (§. 11. nr. 20); im zweiten Falle $\text{cosec}\, x = y$ und $\cot x \cdot \text{cosec}\, x = y \cdot \sqrt{(y^2-1)}$ (§. 12. nr. 26); so hat man vermöge (5) und (6) des vor. Zus. dx oder

(e) $d(\text{arc. sec } y) = \frac{dy}{y\sqrt{(y^2-1)}} = \frac{r^2 dy}{y\sqrt{(y^2-r^2)}}$, und

(f) $d(\text{arc. cosec } y) = \frac{-dy}{y\sqrt{(y^2-1)}} = \frac{-r^2 dy}{y\sqrt{(y^2-r^2)}}$.

Bezeichnet endlich $x = \text{arc. sin v. } y$, oder $x = \text{arc. cos v. } y$ einen Bogen, dessen Quersinus oder Quercosinus y ist; so hat man wieder $\sin \text{v. } x = y$ und $\sin x = \sqrt{(2y-y^2)}$ (§. 9. Zus.); ferner $\cos \text{v. } x = y$ und $\cos x = \sqrt{(2y-y^2)}$ (§. 10. Zus.), folglich nach (7) und (8) des vor. Zus. dx oder

(g) $d(\text{arc. sin v. } y) = \frac{dy}{\sqrt{(2y-y^2)}} = \frac{r \cdot dy}{\sqrt{(2ry-y^2)}}$, und

(h) $d(\text{arc. cos v. } y) = \frac{-dy}{\sqrt{(2y-y^2)}} = \frac{-rdy}{\sqrt{(2ry-y^2)}}$.

2.

Entwickelung logarithmischer Differenzialformeln der trigonometrischen Funktionen.

§. 139. Um diese Formeln zu entwickeln, ist vor Allem nothwendig, die

Aufgabe: Man soll das Differenzial des Logarithmus einer veränderlichen Größe x finden, den Modul des Logarithmensystems allgemein $= m$ gesetzt —

aufzulösen, was so vollbracht wird:

Sey $\log x = y$; so hat man $y + dy = \log(x + dx)$, also dy oder $d(\log x) = \log(x + dx) - \log x = \log \frac{x+dx}{x} = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$. Nun ist nach §. 142 der allgem. Größenl. allgemein:

$\log(1+z) = m\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + - \ldots\right)$, also auch

$\log\left(1+\frac{dx}{x}\right) = m\left(\frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - + \ldots\right)$, oder

$d(\log x) = \frac{m dx}{x}$, indem die auf $\frac{dx}{x}$ folgenden Glieder als gegen jenes verschwindend zu betrachten sind.

Zusatz 1. Also ist für das natürliche Logarithmensystem, wo $m = 1$ ist (allgem. Größenl. §. 140), und log. kurz mit λ bezeichnet wird,

$$d(\lambda x) = \frac{dx}{x}.$$

Zusatz 2. Setzt man in diesem Differenzial $\sin x$, oder $\tang x$, ... statt x; so entwickelt man nun mit Hülfe der Formeln im §. 138 und der, in den §§. 9. 10. ... enthaltenen, trigonometrischen Formeln, deren Numern wir hierbei anführen, leicht die logarithmischen Differenziale der trigonom. Funktionen. Nämlich:

(1) $d(\lambda \sin x) = \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \frac{dx \cdot \cos x}{\sin x} = dx \cdot \cot x$ (nr. 25).

(2) $d(\lambda \cos x) = \frac{-dx \cdot \sin x}{\cos x} = -dx \cdot \tang x$ (nr. 18).

(3) $d(\lambda \tang x) = \frac{dx}{\cos x^2 \cdot \tang x} = \frac{dx}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{2dx}{\sin 2x}$

(nr. 146), oder ($x = \frac{1}{2}\varphi$ gesetzt) $d(\lambda \tang \frac{1}{2}\varphi) = \frac{2d\frac{1}{2}\varphi}{\sin \varphi}$.

(4) $d(\lambda \cot x) = -\frac{2dx}{\sin 2x}$ (auf ähnliche Art, wie (3), zu finden).

(5) $d(\lambda \sec x) = \frac{d(\sec x)}{\sec x} = dx \cdot \tang x$. Eben so:

(6) $d(\lambda \operatorname{cosec} x) = -dx \cdot \cot x$.

(7) $d(\lambda \sin v.\, x) = \frac{dx \cdot \sin x}{\sin v.\, x} = \frac{dx \cdot \sin x}{1-\sqrt{(1-\sin x^2)}}$ (nr. 36)

$= \frac{dx \cdot \sin x}{1-\frac{1}{\sec x}}$ (nr. 30) $= \frac{dx \cdot \sin x \cdot \sec x}{\sec x - 1} = \frac{dx \cdot \tang x}{\sec x - 1}$

(nach nr. 30 mit nr. 18).

(8) $d(\lambda \cos v.\, x) = -\frac{dx \cdot \cot x}{\cosec x - 1}$ (wie (7) zu finden).

Und speciell: für x gesetzt $45^0 + x$, hat man aus (5), weil nun $\sin 2x = \sin(90^0 + 2x) = \cos 2x$ (§. 5. Zus. 2) ist,

(9) $d(\lambda \tang(45^0 + x)) = \frac{2dx}{\cos 2x}$; eben so (10) $d \cdot \lambda \tang(45^0 - x) = -\frac{2dx}{\cos 2x}$. — Uebrigens erhellt, daß, weil $d \cdot \log x$ allgemein $= \frac{mdx}{x}$ ist, jede rechte Seite der vorigen Gleichungen noch mit dem Modul des künstlichen Systems multiplizirt werden müsse, aus welchem der Logar. der trigonom. Funktion genommen wird.

Anmerkung.

Um die klare Einsicht in die bisher angeführten Fundamentaloperationen des Differenziirens nicht zu erschweren, wählten wir immer die einfachsten Funktionen. Von der richtigen Behandlung dieser ist dann leicht der Uebergang zur Differenziation zusammengesetzterer Formen, wie die noch weiter unten folgenden Differenziale zeigen werden. An diesem Orte mögen zwei Beispiele genügen:

1. Sey die Funktion

$$\sqrt{(x^2+ax)} + \tfrac{1}{2}a \cdot \lambda[x + \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(x^2+ax)}]$$

zu differenziiren. Nach §. 135 ist das Differenzial von $\sqrt{(x^2+ax)}$ oder von

$$(x^2+ax)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(x^2+ax)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2xdx + adx) = \frac{(x+\frac{1}{2}a)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax)}}.$$

Ferner ist nach §. 139. Zus. 1 das Differenzial jenes zweiten Gliedes

$$= \tfrac{1}{2}a \frac{dx + \frac{(x+\frac{1}{2}a)dx}{\sqrt{(x^2+ax)}}}{x+\frac{1}{2}a+\sqrt{(x^2+ax)}} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot dx[\sqrt{(x^2+ax)} + x + \frac{1}{2}a]}{\sqrt{(x^2+ax)}(x+\frac{1}{2}a+\sqrt{(x^2+ax)})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(x^2+ax)}};$$

daher ist das gesuchte ganze Differenzial

$$= \frac{(x+\frac{1}{2}a)dx + \frac{1}{2}adx}{\sqrt{(x^2+ax)}} = \frac{(a+x)dx \cdot \sqrt{(x^2+ax)}}{x(x+a)}$$

$$= \frac{dx}{x}\sqrt{(x^2+ax)} = dx\sqrt{\frac{x^2+ax}{x^2}} = dx\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)}.$$

Man findet auf gleiche Weise:

$$d.[\tfrac{1}{2}x.\sqrt{(1+x^2)} + \tfrac{1}{2}l(x+\sqrt{(1+x^2)})] = dx\sqrt{(1+x^2)}.$$

2. Sey die Funktion

$$\tfrac{1}{2}x.\sqrt{(a^2-x^2)} + \tfrac{1}{2}a^2.\text{arc.sin}\frac{x}{a}$$

zu differenziiren. Nach §§. 154. 155 ist

$$d.\tfrac{1}{2}x.\sqrt{(a^2-x^2)} = \tfrac{1}{2}dx.\sqrt{(a^2-x^2)} + \tfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}.-2xdx.\tfrac{1}{2}x,$$

$$= \tfrac{1}{2}dx.\sqrt{(a^2-x^2)} - \frac{\frac{1}{2}x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{\frac{1}{2}a^2-x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}dx.$$

Das Differenzial des zweiten Gliedes unserer Funktion ist nach §. 158. Zus. 5.

$$\frac{\frac{1}{2}a^2.dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}};$$

folglich das ganze Differenzial

$$\frac{\frac{1}{2}a^2-x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}dx + \frac{\frac{1}{2}a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}dx = \frac{a^2-x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}dx = dx\sqrt{(a^2-x^2)}.$$

3.

Entwickelung einfacher Differenzialformeln für die Dreiecke;

α) für ebene geradlinige Dreiecke.

§. 140. **Aufgabe 1. Wenn eine Seite c (Fig. X.) und ihr anliegender Winkel B ungeändert bleiben; wie verhalten sich die Veränderungen**

1) der beiden andern Seiten a, b?

Auflösung. Da a und c die beiden den Winkel B einschließenden Seiten sind; so ist nach §. 29 $b^2 = a^2+c^2-2ac\cos B$ und hieraus

$$2c.\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{a}.$$

Diese Gleichung nach §. 136 und zugleich nach §§. 135. 133 (1) differenziirt, findet man, da die erste Seite der Gleichung lauter Konstanten enthält, und der neue Nenner a^2 durch Multiplikation verschwindet,

$$0 = a(2a \cdot da - 2bdb) - (a^2 + c^2 - b^2)\,da;$$

oder $2ab \cdot db = (a^2 + b^2 - c^2)\,da$, oder $db = \frac{(a^2+b^2-c^2)\,da}{2ab}$.

Aber nach demselben §. 29 ist $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, folglich

$db = \cos C \cdot da$, oder $\frac{db}{da} = \cos C$, oder $da : db = 1 : \cos C$.

2) des Winkels A und der anliegenden Seite b?

Auflösung. Die Gleichung: $c \cdot \sin B = b \cdot \sin C$ (§. 4. Zus. 1) differenziirt, hat man, wie vorhin,

$$0 = b \cdot d \cdot \sin C + \sin C \cdot db \text{ (§. 134)} = b \cdot \cos C \cdot dC + \sin C \cdot db$$
(§. 138. (1)),

und hieraus, da A um so viel abnimmt, als C wächst, demnach $+dC = -dA$ ist,

$$\sin C \cdot db = b \cdot \cos C \cdot dA, \text{ oder } \frac{db}{dA} = \frac{b \cdot \cos C}{\sin C} = b \cdot \cot C.$$

3) des W. A und der gegenüberliegenden Seite a?

Auflösung. Die Werthe von db aus 2) und 1) gleichgestellt, entwickelt man

$$da = \frac{b \cdot dA}{\sin C} \text{ oder } da : dA = b : \sin C.$$

Aufgabe 2. Seyen A und a konstant; die Veränderungen zu finden

1') eines Winkels C und der ihm gegenüberliegenden Seite c.

Auflösung. $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$ differenziirt, ist

$$0 = c \cdot \cos C \cdot dC - \sin C \cdot dc, \text{ und hieraus}$$

$dC = \frac{\sin C \cdot dc}{c \cdot \cos C} = \frac{dc \cdot \operatorname{tang} C}{c}$. Eben so ist $dB = \frac{db \cdot \operatorname{tang} B}{b}$.

2) der beiden andern Seiten b, c.

Auflösung. Weil wieder, wie unter 2), $dB = \frac{1}{2}dC$, folglich aus 1)

$$\frac{db \cdot \tang B}{b} = -\frac{dc \cdot \tang C}{c} \text{ ist, so hat man}$$

$$db = -\frac{b}{c} \cdot dc \cdot \cot B \cdot \tang C = -\frac{\sin B}{\sin C} \cdot dc \cdot \frac{\cos B}{\sin B} \cdot \frac{\sin C}{\cos C},$$

$$\text{d. i. } db = \frac{-dc \cdot \cos B}{\cos C}.$$

Aufgabe 5. Seyen die beiden Seiten b, c konstant; die Veränderungen zu finden

1") der gegenüberstehenden Winkel B, C.

Auflösung. Aus $c \cdot \sin B = b \cdot \sin C$ wird durch Differ. u. Divis. $\frac{c \cdot \cos B \cdot dB}{c \cdot \sin B} = \frac{b \cdot \cos C \cdot dC}{b \cdot \sin C}$, oder $\cot B \cdot dB = \cot C \cdot dC$, oder $dB \cdot \tang C = dC \cdot \tang B$. Hieraus ist

$$dB = \frac{dC \cdot \tang B}{\tang C} \text{ und } \frac{dB}{dC} = \frac{\tang B}{\tang C}.$$

2") des eingeschlossenen W. A und z. B. des W. B.

Auflösung. Aus $A = 2R - B - C$ hat man $dA = -dB - dC$, daher durch Substitution des Werthes von dC aus 1")

$$dA = \frac{-(\tang B + \tang C) \cdot dB}{\tang B} = \frac{-\sin(B+C) \cdot dB}{\sin B \cdot \cos C \cdot \tang B} \text{ (§. 20. nr. 151).}$$

Aber $\sin(B+C) = \sin(2R - A) = \sin A$, folglich ist

$$dA = \frac{-\sin A \cdot dB}{\sin B \cdot \cos C} = \frac{-a \cdot dB}{\cos C \cdot b} \text{ (durch Subst.).}$$

3") des eingeschlossenen W. A und der Seite a.

Auflösung. Aus $\cos A = \frac{b^2+c^2}{2bc} - \frac{a^2}{2bc}$ (1)), wo $\frac{b^2+c^2}{2bc}$ konstant, hat man $-dA \cdot \sin A = \frac{-4bc \cdot ada}{4b^2c^2}$ (§§. 156. 185), oder

$$dA = \frac{a \cdot da}{bc \cdot \sin A}. \quad \text{Aber } \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \text{ also auch}$$

$$dA = \frac{da}{c \cdot \sin B} = \frac{da \cdot \cos B}{c} \text{ (§. 13. nr. 33.).}$$

4") der dritten Seite a und eines umfangeschlossenen Winkels B.

Auflösung. Aus 3") und 2") ist $\frac{da}{c \cdot \sin B} = \frac{-a \cdot dB}{b \cdot \cos C}$, folglich, wie vorhin:

$$da = \frac{-c \cdot \sin B \cdot \sin A \cdot dB}{\sin B \cdot \cos C} = \frac{-c \cdot \sin A \cdot dB}{\cos C}.$$

Aber $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$, daher auch

$$da = -a \cdot \operatorname{tang} C \cdot dB \text{ und } \frac{da}{dB} = -a \cdot \operatorname{tang} C.$$

Zusatz 1. Weil bei 2 konstanten Winkeln des Dreiecks auch der dritte ungeändert, daher auch bei Aenderung der Seiten die Figur sich immer ähnlich bleibt; so hat man immer $da : db = a : b$, u. s. w.

Zusatz 2. Haben beide Differenziale in einer der obigen Gleichungen einerlei Zeichen (+ oder —); so sind beide Zu- oder Abnahmen; bei entgegengesetzten Zeichen aber ist die eine Aenderung als Zunahme, die andere als Abnahme zu betrachten.

β) für sphärische Dreiecke.

§. 141. Aufgabe 1. Wenn die Seite b (Fig. XXIX.) und der anliegende Winkel A ungeändert bleiben; in welchem Verhältnisse stehen die Aenderungen

1) der übrigen Seiten a, c?

Auflösung. Nach §. 48 (15) ist $\cos A \cdot \sin b = \frac{\cos a}{\sin c} - \cos b \cdot \cot c$. Diese Gleichung differenziirt, hat man

$$0 = \frac{-\sin c \cdot \sin a \cdot da - \cos a \cdot \cos c \cdot dc}{\sin c^2} + \frac{\cos b \cdot dc}{\sin c^2} \text{ (§. 136 mit §. 138), und hieraus}$$

$$da = \frac{(\cos b - \cos a \cdot \cos c)\, dc}{\sin c \cdot \sin a}, \text{ oder, vermöge derselben vorigen Formel (15),}$$

$$da = \cos B \cdot dc \text{ und } \frac{da}{dc} = \cos B.$$

2) der übrigen Winkel B, C?

Auflösung. Auf ganz ähnliche Weise wird durch Differentiirung der Gleichung

$$\cos b \cdot \sin A = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin C} \quad (\S.\ 49.\ (17))$$

und wegen $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ gefunden:

$$-dB = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} \cdot dC;$$

aber der Faktor von dC ist vermöge derselben Formel (17) $= \cos a$, daher

$$-dB = \cos a \cdot dC \text{ und } \frac{-dB}{dC} = \cos a.$$

3) der Seite a und des Winkels B?

Auflösung. Nach §. 44 ist $\sin b \cdot \sin A = \sin a \cdot \sin B$; daher

$0 = \sin a \cdot \cos B \cdot dB + \sin B \cdot \cos a \cdot da$, und hieraus

$$-dB = \frac{\sin B \cdot \cos a \cdot da}{\sin a \cdot \cos B} = \operatorname{tang} B \cdot \cot a \cdot da.$$

4) der Seite a und des Winkels C?

Auflösung. In 3) den Werth von $-dB$ aus 2) gesetzt, ist

$$\frac{dC}{da} = \frac{\operatorname{tang} B}{\sin a}.$$

5) der Seite c und des Winkels C?

Auflös. Die Werthe von da aus 1) u. 4) gleichgestellt, ist

$$\frac{dC}{dc} = \frac{\sin B}{\sin a}.$$

6) der Seite c und des Winkels B?

Auflös. Die Werthe von da aus 3) u. 1) gleichgestellt, ist

$$\frac{-dB}{dc} = \frac{\sin B}{\operatorname{tang} a}.$$

Aufgabe 2. Seyen A und a konstant; das Verhältniß der Aenderungen der übrigen Stück zu finden:

1) einer

1) einer Seite z. B. c und des ihr gegenüberliegenden Winkels C.

Auflöſ. Durch Differenziirung von $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c}$ entwickelt man

$$dc = \frac{\sin c}{\cos c} \cdot \frac{\cos C}{\sin C} \cdot dC, \text{ oder } \frac{dc}{dC} = \frac{\tang c}{\tang C}, \text{ oder } \frac{db}{dB} = \frac{\tang b}{\tang B}.$$

2) der übrigen Winkel B, C.

Auflöſ. Aus $\cos A = \cos a \cdot \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C$ (§. 49. (16)) iſt

$$0 = \cos a(\sin B \cdot \cos C \cdot dC + \sin C \cdot \cos B \cdot dB) + \cos B \cdot \sin C \cdot dC + \cos C \cdot \sin B \cdot dB \text{ (§§. 154. 158)},$$

$$\text{oder } 0 = \frac{dB(\cos a \cdot \sin C \cdot \cos B + \cos C \cdot \sin B) + dC[\cos a \cdot \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C]}{\sin B \cdot \sin C}$$

Hieraus entwickelt man

$$-dB(\cos a \cdot \cot B + \cot C) = dC(\cos a \cdot \cot C + \cot B).$$

Wenn man hierin ſtatt $\cot B = \frac{\sin a \cdot \cot b}{\sin C} - \cos a \cdot \cot C$, und ſtatt $\cot C = \frac{\sin a \cdot \cot c}{\sin B} - \cos a \cdot \cot B$ (§. 47. (12')), dann ſtatt cot c, cot b die Werthe nach §. 12. nr. 25 ſubſtituirt; ſo findet man, nach Weglaſſung von sin a,

$$-dB \cdot \frac{\cos c}{\sin c \cdot \sin B} = dC \cdot \frac{\cos b}{\sin b \cdot \sin C} \text{ und } \frac{-dB}{dC} = \frac{\cos b}{\cos c},$$

indem die Nenner der vorigen Brüche nach §. 40 gleich ſind.

3) des Winkels C und der Seite b.

Auflöſ. Aus der letzten Gleichung in 1') u. 2') findet ſich

$$\frac{-dC}{db} = \frac{\tang B \cdot \cos c}{\sin b}.$$

4) der Seiten b, c.

Auflöſ. Die Werthe von dC aus 3') und 1') zuſammengeſtellt, iſt

$$-db \cdot \frac{\tang B \cdot \cos c}{\sin b} = \frac{dc \cdot \tang C}{\tang c}, \text{ oder}$$

$$-db \cdot \frac{\sin B \cdot \sin c}{\cos B} = dc \cdot \frac{\sin C \cdot \sin b}{\cos C}, \text{ oder } \frac{-db}{dc} = \frac{\cos B}{\cos C} \text{ (§. 40).}$$

Aufgabe 5. Seyen 2 Seiten b, c konstant; das Verhältniß der Aenderungen der übrigen Stücke des Kugeldreieckes zu finden, und zwar

1") der Seite a und des ihr gegenüberstehenden Winkels A.

Auflös. Aus $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$ (§. 40. (14)) ist

$$-da \cdot \sin a = -\sin b \cdot \sin c \cdot \sin A \cdot dA, \text{ oder } dA = \frac{\sin a}{\sin b \cdot \sin c \cdot \sin A} da.$$

Hierin den Werth für $\sin a$ aus $\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A$ (§. 40), dann in der neuen Gleichung den Werth für $\sin B$ aus $\sin B \cdot \sin c = \sin C \cdot \sin b$ substituirt, findet man:

$$dA = \frac{da}{\sin B \cdot \sin c} = \frac{da}{\sin b \cdot \sin C}, \text{ oder } \frac{dA}{da} = \frac{1}{\sin B \cdot \sin c} = \frac{1}{\sin b \cdot \sin C}.$$

2") der Winkel B, C.

Auflös. Die Differenziation von $\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin C}$ gibt

$$0 = \sin C \cdot \cos B \cdot dB - \sin B \cdot \cos C \cdot dC, \text{ woraus}$$

$dC \cdot \tang B = dB \cdot \tang C$, oder $\frac{dB}{dC} = \frac{\tang B}{\tang C}$ ist.

3") der Winkel A, B.

Auflös. $\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A$ differenzirt, ist

$$-\sin B \cdot \cos a \cdot da - \sin a \cdot \cos B \cdot dB = -\sin b \cdot \cos A \cdot dA.$$

Hierin für da den Werth aus 1") substituirt, hat man

$$dB \cdot \cos B \cdot \sin a = dA \cdot \sin b \,(\cos A - \cos a \cdot \sin B \cdot \sin C).$$

Nun ist aus §. 49 (16) (nach Verwechslung der Buchstaben) der eingeschlossene Faktor $= -\cos B \cdot \cos C$, folglich, indem man durch $\cos B$ dividirt,

$$dB \cdot \sin a = -dA \cdot \sin b \cdot \cos C, \text{ und hieraus}$$

$$-\frac{dA}{dB} = \frac{\sin a}{\sin b \cdot \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \cdot \cos c} \text{ (wie oben).}$$

4") der Winkel A, C.

Auflös. Seiten und Winkel gehörigverwechselt, ist, wie vorhin,

$$-\frac{dA}{dC} = \frac{\sin a}{\sin c \cdot \cos B} = \frac{\sin A}{\sin C \cdot \cos b}.$$

5") der Seite a und des Winkels B.

Auflöſ. $-dA = \frac{-da}{\sin b . \sin C}$ (1") $= \frac{dB . \sin a}{\sin b . \sin C}$ (5"), woraus

$$-\frac{da}{dB} = \sin a . \tang C \text{ folgt.}$$

6") der Seite a und des Winkels C.

Auflöſ. Aus (2") und (5") findet ſich eben ſo:

$$-\frac{da}{dC} = \sin a . \tang B .$$

Aufgabe 4. Seyen die 2 Winkel B, C konſtant; das Verhältniß der Aenderungen der übrigen Stücke zu finden.

Auflöſung. Man ſetze in den Formeln der vorigen Aufgabe ſtatt der Seiten und Winkel die Complemente der gegenüberſtehenden Winkel und Seiten, wobei die Differenziale dieſer verwechſelten Seiten und Winkel entgegengeſetzt werden, wie ihre Tangenten und Coſinuſſe. Auf dieſe Weiſe erhält man 6 analoge Formeln:

1"') $\frac{da}{dA} = \frac{1}{\sin b . \sin C} = \frac{1}{\sin c . \sin B}$. 2"') $\frac{db}{dc} = \frac{\tang b}{\tang c}$.

3"') $\frac{da}{db} = \frac{\sin A}{\sin B . \cos c} = \frac{\sin a}{\sin b . \cos C}$. 4"') $\frac{da}{dc} = \frac{\sin A}{\sin C . \cos b} = \frac{\sin a}{\sin c . \cos B}$.

5"') $\frac{dA}{db} = \sin A . \tang c$. 6"') $\frac{dA}{dc} = \sin A . \tang b$.

Anmerkung. Die in den beiden letzten Paragraphen angeführten Differenzialformeln, die ſich durch gehörige Subſtitutionen noch ſehr vermehren laſſen, hat Klügel am Schluſſe ſeiner „analyt. Trigonom.“ analytiſch entwickelt, ſynthetiſch aber Roger Cotes in ſeinem, vom Prof. Matzk in den 1768 herausgegebenen Miſcellen mitgetheilten, Aufſatze „Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphaerici“ Cagnoli in ſeinem „Traité de Trigonom.“ Kelly erſt die Formeln für die endlichen Veränderungen der Stücke des Dreieckes auf, und leitet dann aus dieſen die Differenzialformeln ab. Allein da ſich ſowohl die höhere Geodäſie, a

Astronomie so vollkommner Meßinstrumente erfreut, daß z. B. hinsichtlich der Winkel der etwaige Fehler kaum einen halben bis vollen Grad beträgt; so reicht man bei weitem in den meisten und gewöhnlichen Fällen mit der Anwendung der aufgestellten Differenzialformeln aus.

4.

Gebrauch der in den §§. 137—141 aufgestellten Formeln bei trigonometrischen Rechnungen, durch einige Beispiele erörtert.

§. 142. **Beispiel 1. Der Bogen oder Winkel $\alpha = 28^0\,21'$ nehme um 36″ zu, um wieviel wächst $\sin\alpha$ — und umgekehrt?**

Nöthige Vorbemerkungen. a). Man kann überhaupt den dem Halbmesser $= 1$ gleichen Bogen R, den man durch die Proportion $\pi : 1. = 2q : R$ (wo q den Quadranten bezeichnet) erhält, in Minuten oder Sekunden finden, indem man im allgemeinen Ausdrucke: $R = \frac{2q}{\pi}$ die Größe 2q, in Min. oder Sek. verwandelt, durch 3,1415... dividirt. So ist, wenn man $2q = 200^0$ nach der neufranzös. Eintheilung der Kreislinie setzt, der dem Halbm. $= 1$ gleiche und in Sek. verwandelte Bogen $R'' = \frac{2000000}{3,141...} = 636619'',77237...$ und der Logar. hievon $= 5,8038801$; aber nach der gewöhnlichen Sexagesimaltheilung der Peripherie ist $R'' = \frac{180.60^2}{\pi} = 206264,8...$ und davon der Logar. $= 5,3144251$. (vgl. Geom. §. 145. Zus. 3). Man pflegt dieses häufig auch durch $R'' = \frac{1}{\sin 1''}$ auszudrücken, denn ein solcher Bogen ist genau $= \frac{1}{\text{arc. } 1''}$, d. i. ein dem Halbmesser gleicher Bogen hat so viele Sekunden, als wie oft der rectificirte Bogen von 1″ im Halbmesser 1 enthalten ist; allein statt arc. 1″ kann man auch den mit ihm zusammenfallenden sin 1″ setzen.

b). Bezeichnet l einen in Theilen des Halbmessers $r = 1$ gegebenen und n' oder n'' denselben in Minuten oder Sekunden verwandelten Bogen; so hat man allgemein

$$n' = \frac{2q \cdot 60 \cdot l}{\pi} \text{ und } n'' = \frac{2q \cdot 60^2 \cdot l}{\pi}, \text{ d. i.}$$

$n' = l \cdot R'$ oder $n'' = l \cdot R''$; woraus folgt:

$$l = \frac{n'}{R'} \text{ und } l = \frac{n''}{R''}.$$

Die ersten Formeln sprechen aus, daß ein in Theilen des Halbmessers gegebener Bogen in Min. oder Sek. ausgedrückt werde, wenn man ihn mit R' oder R'' multiplizirt; die letzteren Formeln dagegen lehren, daß ein in Min. oder Sek. gegebener Bogen in Theilen des Halbm. $= 1$ ausgedrückt werde, indem man jenen durch R' oder R'' dividirt.

Dieses vorausgeschickt, kann unser obiges Beispiel nach der Formel (1) §. 138 entweder ohne Logarithmen, oder mit Hülfe derselben aufgelöst werden. Im ersten Falle wird $d\alpha = 36''$, nachdem dieser Bogen in Theilen des Halbmessers 1 nach der Formel $l = \frac{n''}{R''} = \frac{36}{206264,8} = 0,00017455\ldots$ ausgedrückt ist, mit dem Cosin. nat. $28^0\,21' = 0,8800633$ multiplizirt, und zu diesem Produkte $= d\alpha \cdot \cos\alpha$ $(= d \cdot \sin\alpha)$ $= 0,0001536$ der Sin. nat. $28^0\,21' = 0,4748564$ addirt; die Summe gibt $\sin 28^0\,21'\,36'' = 0,4750100$.

Im zweiten Falle, wo man $\log l = \log n'' - \log R''$ hat, folglich $-\log 206264,8 = -5,3144251 = 4,6855749 - 10$ ist, steht, um $d \cdot \sin\alpha$ zu finden, die Rechnung kurz so:

$$\begin{aligned} \log \cos 28^0\,21' &= 9,9445139 - 10 \quad (\text{§. 8. Anm. 3.}) \\ \log 36 &= 1,5563025 \\ -\log R'' &= 4,6855749 - 10 \\ \log d \cdot \sin\alpha &= 0,1863913 - 4; \end{aligned}$$

also $d \cdot \sin\alpha = 0,0001536$, wie vorhin.

Ist umgekehrt für die bekannte Aenderung von $\sin\alpha$, die hier $= 0,0001536$ seyn soll, die entsprechende Aenderung $d\alpha$ des Winkels oder Bogens α $(= 28^0\,21')$ zu suchen; so hat man nach der Formel (1) des Zus. 1. §. 138 $d\alpha = \frac{d\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,0001536}{0,8800636}$

$= 0{,}00017453 = 1$, d. i. in Theilen des Halbmessers. Weiter findet man nach obiger Formel 1. R″ (oder auch mit Hülfe der Tafel IV. in Vega's größeren Logarithmentafeln) $d\alpha$ im Bogen, nämlich $d\alpha = 36''$.

Will man $(d\alpha'')$, d. i. das gesuchte Differenzial unmittelbar wieder im Bogen mit Hülfe der Logarithmen finden; so steht nun, weil $(d\alpha)'' = \frac{d \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot R'' = 1 \cdot R''$ (wie vorhin) ist, die Rechnung so:

$$\begin{aligned} \log d\sin\alpha &= \log 0{,}0001536 = 0{,}1863912 - 4 \\ \text{C.log}\cos\alpha &= \text{C.log}\cos 28^\circ 21' = 0{,}0554861 \\ \log R'' \ldots\ldots\ldots &= 5{,}5144251 \\ \log (d\alpha)'' &= 1{,}5563024, \text{ also } d\alpha = 36''. \end{aligned}$$

§. 143. Beispiel 2. Aus 2 richtig gemessenen Seiten $b = 75$ und $c = 58$ eines geradlinigen ebenen Dreieckes und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel $A = 108^\circ 24'$ wurde die dritte Seite a zu 108,52 trigonometrisch berechnet. Allein der Winkel A sey um 5′ oder 300″ unrichtig gemessen; welchen Einfluß hat dieser Fehler auf die Aenderung der Seite a?

Die Größe dieser Aenderung ist nach 3″) §. 140

$$da = \frac{bc \cdot \sin A \cdot dA}{a}, \text{ und die Rechnung diese:}$$

$$\begin{aligned} \log\sin A &= \log\sin 71^\circ 36' = 9{,}9772095 - 10 \\ \log b &= \log 75 \ldots = 1{,}8750613 \\ \log c &= \log 58 \ldots = 1{,}7634280 \\ \left.\begin{array}{l}\log 300 \ldots\ldots\ldots = 2{,}4771212 \\ -\log R'' \ldots\ldots\ldots = 4{,}6855749 - 10\end{array}\right\} &\text{(§. 142)} \\ \text{C.log } a &= \text{C.log } 108{,}52 = 7{,}9052913 \\ \log da &= 0{,}7436862 - 2; \end{aligned}$$

also $da = 0{,}055422$, d. i. um so viel hätte man die Seite a zu groß genommen, wenn A nur $= 108^\circ 19'$; aber zu klein, wenn $A = 108^\circ 29'$ hätte gemessen werden sollen.*)

*) Vergl. Kästner's I. Samml. astron. Abhandl. S. 31.

Um auf ganz ähnliche Weise auch bei Auflösung der Fälle, in welchen entweder nur ein einziges, oder gar kein Theil des Dreieckes konstant ist, mit unseren Differenzialformeln (§§. 140. 141) auszureichen, kann man so verfahren:

a) Wenn nur ein Stück $= m$ konstant ist, die Aenderungen aber von 2 andern Stücken n und p gegeben oder bekannt sind, und man soll die Aenderungen eines der 3 übrigen Theile $= q$ finden; so betrachtet man vorerst m und n als konstant, und sucht mit Hülfe der treffenden Differenzialformel, welche Veränderung der Theil q vermöge der bekannten Aenderung von p leide. Dann m und p konstant gesetzt, sucht man die Aenderung von q vermöge der bekannten Aenderung von n. Die Summe beider Werthe ist die gesuchte Veränderung von q.

b) Wenn kein Theil des Dreieckes unveränderlich, aber von den Theilen m, n, p die Aenderungen bekannt sind; so werden, um wieder die Aenderung der übrigen Theile oder von q zu finden, je 2 Theile z. B. m und n als konstant betrachtet, und, wie vorhin, wird die Aenderung von q, hervorgebracht durch die bekannte Veränderung des je dritten Theiles, hier von p, gesucht. Die Summe dieser für q bewirkten Veränderungen ist dann die gesuchte Aenderung von q.

Allein das Beschwerliche dieser an und für sich richtigen Methode in der Anwendung macht für die wichtigsten Fälle jener Art die Entwerfung eigener Formeln wünschenswerth. Einen dieser Fälle aus der höheren Geodäsie drückt das

Beispiel 3. aus.*) Es sey die Basis $a = 1000'$ um $2'$, der Winkel $B = 30^0\,6'$ um $5'$ oder $300''$, der andere an a liegende Winkel $C = 140^0\,8'$ um $4' = 240''$ zu groß gemessen, so daß also die wahren Größen $a = 998$, $B = 30^0\,1'$ und $C = 140^0\,4'$ seyen; welchen Einfluß würden jene Fehler auf die dem Winkel B gegenüberliegende Seite b haben?

Differenzialformel. $a : b = \sin A : \sin B$, oder $b \cdot \sin A = b \cdot \sin(180^0 - (B+C)) = b \cdot \sin(B+C)$ (§. 5. Zus. 2) $= a \cdot \sin B$.

*) Vgl. Mayer's „praktische Geom." Th. II. S. 419 — 458.

Daher auch

$$\log b + \log \sin (B+C) = \log a + \log \sin B .$$

Hieraus hat man nach §. 139. Zuf. 1 und 2.

$$\frac{db}{b} + (dB + dC)\cot(B+C) = \frac{da}{a} + dB \cdot \cot B, \text{ oder}$$

$$\frac{db}{b} + dC \cdot \cot(B+C) = \frac{da}{a} + (\cot B - \cot(B+C)) \cdot dB$$

$$= \frac{da}{a} + \left(\frac{\cos B}{\sin B} - \frac{\cos(B+C)}{\sin(B+C)}\right) \cdot dB, \text{ oder}$$

$$\frac{db}{b} + dC.\cot(B+C) = \frac{da}{a} + \frac{\cos B.\sin(B+C) - \sin B.\cos(B+C)}{\sin B \cdot \sin(B+C)} .dB;$$

$$\text{also (nach §. 18. n. 66)} \frac{db}{b} + dC.\cot(B+C) = \frac{da}{a} + \frac{\sin C}{\sin B.\sin(B+C)} .dB.$$

Nach dieser Formel, in welcher $\frac{da}{a}$, $\frac{db}{b}$ ausdrücken, wie groß die Fehler da, db hinsichtlich ihrer zugehörigen a, b seyen, steht nun, um $\frac{db}{b}$ zu finden, die Rechnung so:

1) $\log \sin C = \log \sin 140^0\,4' = 9,8074646 - 10$

$\log dB = \log 300 \ldots = 2,4771213$

$-\log R'' \ldots\ldots\ldots = 4,6855749 - 10$

Summe $= 0,9701608 - 4 = Q.$

2) $\log \sin B = \log \sin 30^0\,1' = 9,6991887 - 10$

$\log \sin(B+C) = \log \sin 9^0\,55' = 9,2360726 - 10$

Summe $= 0,9352613 - 2 = S.$

Also $Q - S \ldots = 0,0348995 - 2,$

welchem Logar. die Zahl 0,0108367 entspricht.

3) $\log dC = \log 240 \ldots = 2,3802112$

$-\log R'' \ldots\ldots\ldots = 4,6855749 - 10$

$\log \cot(B+C) = \log \cot 9^0\,55' = 10,7573897 - 10$

Summe $= 0,8231758 - 3.$

Diesem Logar. entspricht wegen $-\cot(B+C)$ die Zahl $-0,0066542$. Also $\frac{db}{b} = 0,002 \left(= \frac{da}{a}\right) + 0,0108367 - (-0,0066542) = 0,0194909 = 0,02 = \frac{1}{50}$ sehr nahe. Die angegebenen Fehler in der Basis und den anliegenden Winkeln

würden demnach bewirken, daß man die Seite b um $\frac{1}{10}$ ihrer aus den gemessenen Stücken berechneten Länge zu groß nähme. Uebrigens erhellt von selbst, daß, wenn B zu klein wäre gemessen worden, obige Zahl 0,0108... mit — hätte gesetzt werden müssen; u. s. w.

§. 144. Beispiel 4. (hinsichtlich sphärischer Dreiecke).

Vorbemerkung. Der Seefahrer wisse seinen von B bis n (Fig. XX.) zurückgelegten Weg $Bn = p = 37^\circ\, 24'\, 46''$; eben so das Complement $AB = q = 41^\circ\, 9'$ der geographischen Breite des Ortes B, und das Complement der Breite des Punktes n, wo er sich befindet, aus der an diesem Punkte beobachteten Polhöhe = eben jener Breite, nämlich $An = s = 71^\circ\, 30'$; so kann er nun den zurückgelegten Weg auch in Ansehung der geograph. Länge, und somit vollkommen bestimmen, auf welchem Punkte der Erde er sich befinde. Denn er vermag aus den bekannten Stücken den Winkel A am Pole, oder den Unterschied zwischen der bekannten Länge des Meridians AB und der gesuchten Länge des Meridians An nach §. 54. Fall 1 zu finden. Dieser Winkel A sey zu $27^\circ\, 8'$ berechnet.

Man nehme nun an, der Seefahrer sey ungewiß, ob er sich bei Messung des zurückgelegten Weges Bn nicht um einen vollen Grad geirrt habe, verlange daher den Einfluß dieses Fehlers auf den berechneten Winkel A zu kennen; so ist klar, daß, weil die 2 Seiten q und s des Dreiecks ABn konstant sind, dA nach der Formel 1") §. 141. Aufg. 3, hier:

$$dA = \frac{\sin p}{\sin q \,.\, \sin s \,.\, \sin A} \,.\, dp$$

zu suchen sey mittelst folgender Rechnung, bei welcher (wie bei jeder andern hinsichtlich des sphärischen Dreieckes) die Größe R" nicht so, wie in unsern frühern Rechnungen, mit im Ansatz kommen darf, weil jede Größe einer der Formeln des §. 141 mit den übrigen gleichartig, oder im Bogen ausgedrückt ist.

1) $\log da = \log 3600 \quad . \; . \; . \; = \; 3{,}5563025$

$\log \sin p = \log \sin 37^\circ\, 24'\, 46'' = \; 9{,}7835841 - 10$

Summe $= 13{,}3398866 - 10 = T$.

2) $\log \sin q = \log \sin 41^\circ 9' \ldots = 9{,}8182474 - 10$

$\log \sin s = \log \sin 71^\circ 30' \ldots = 9{,}9769866 - 10$

$\log \sin A = \log \sin 27^\circ 8' \ldots = 9{,}6592710 - 10$

Summe $= 0{,}4544750 - 1 = U.$

Also $T - U = \log dA \ldots = 5{,}8854116.$

Diesem Logar. entspricht sehr nahe die Zahl 7680″, d. i. der Winkel A wächst oder nimmt ab um so viel Sekunden oder um 2° 8′, je nachdem die gegenüberliegende Seite p um einen Grad zu groß oder zu klein gefunden wurde. Da, auch eine solche Ungewißheit um einen vollen Grad, wie sie nur in seltenen Fällen Statt finden kann, angenommen, die Rechnung nach einer Formel endlicher Differenzen zeigt, daß obiges Resultat nur um 5′ fehlerhaft sey; so erhellt auch hieraus die Anwendbarkeit der im §. 141 aufgestellten Differenzialformeln für die meisten Fälle.

Dieser Formeln bedient man sich übrigens mit größtem Vortheile in der Astronomie. (Vergl. Cagnoli's oben angeführtes Werk von S. 310—353).

D.

Zusammenstellung der Differenzialformeln:

1. algebraischer Funktionen.

§. 145. Die folgenden Differenziale oder Differenzialgleichungen stützen sich auf die 6 ersten, in den §§. 133—136 enthaltenen, Grundsätze:

1. $y = a + x \pm b; \ldots dy = dx.$
1′. $y = a - x + z; \ldots dy = -dx + dz.$
2. $y = uz; \ldots dy = uds + zdu.$
2′. $y = axuz; \ldots dy = auzdx + axzdu + axudz.$
3. $y = x^m; \ldots dy = mx^{m-1}.dx.$
3′. $y = ax^3; \ldots dy = 3ax^2.dx.$

3''. $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$; ... $dy = -2x^{-3}dx = -\frac{2dx}{x^3}$.

3'''. $y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; $dy = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.dx = -\frac{dx}{3x\sqrt[3]{x}}$.

3''''. $y = a + bx + cx^2 + fx^3 + gx^4 + \ldots$

$dy = bdx + 2cx.dx + 3fx^2dx + \ldots = (b + 2cx + 3fx^2 + \ldots)dx$.

3'''''. $y = (x + ax)^3$; ... $dy = 2(x + ax).d(x + ax)$

$= 2x(1 + 2a + a^2)dx$.

3''''''. $y = (a + bx^n)^m$. Man ſetze $a + bx^n = z$, daher $y = z^m$; ſo iſt $dy = mz^{m-1}.dz$ (nach 3.); aber $z^{m-1} = (a + bx^n)^{m-1}$ und $dz = nbx^{n-1}.dx$, daher die Gleichung:

$$dy = mnbx^{n-1}(a + bx^n)^{m-1}.dx.$$

3'''''''. $y(xz + uz)^3$. Sey $xz + uz = v$, daher $y = v^3$ und $dy = 3v^2.dv$. Aber $v^2 = (xz + uz)^2$ und $dv = xdz + zdx + udz + zdu$; daher das Differenzial:

$$dy = 3(xz + uz)^2.[(x + u)dz + (dx + du)z].$$

3''''''''. $y = x^p(a + bx^n)^m$. Sey $x^p = t$ und $(a + bx^n)^m = u$, daher $y = tu$; ſo hat man $dy = udt + tdu$. Aber $dt = px^{p-1}.dx$ und $du = mnbx^{n-1}(a + bx^n)^{m-1}.dx$ (3''.), folglich

$dy = (a + bx^n)^m px^{p-1}.dx + x^p mnbx^{n-1}(a + bx^n)^{m-1}.dx$

$= (a + bx^n)^{m-1}.(a + bx^n).px^{p-1}dx + x^{p-1}mnbx^n(a + bx^n)^{m-1}.dx$

$= x^{p-1}[ap + pbx^n + mnbx^n].(a + bx^n)^{m-1}.dx$, d. i.

(1) $dy = x^{p-1}[ap + (p + mn)bx^n].(a + bx^n)^{m-1}.dx$,

oder vermöge der erſten Gleichung:

(2) $dy = px^{p-1}(a + bx^n)^m dx + mnbx^{n+p-1}(a + bx^n)^{m-1}.dx$.

Daher auch ſpeciell: wenn

$y = (a + bx^2)^{\frac{1}{2}}$, demnach $m = \frac{1}{2}$; $m - 1 = -\frac{1}{2}$; $mn = \frac{1}{2}$ und $p = 0$; ſo hat man nach (1)

(a) $dy = bx(a + bx)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{bxdx}{\sqrt{(a + bx)}}$. — Und wenn

$y = x(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}$, demnach $p=1$; $p-1=0$; $n=2$; $m=-\frac{1}{2}$; $mn=-1$ und $m-1=-\frac{3}{2}$ ist; so wird nach (1)

(b) $dy = a(a+bx)^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{adx}{\sqrt{(a+bx)^3}}$. Wenn ferner $y = \frac{\sqrt{(a+bx^2)}}{x} = x^{-1}(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}$, daher $p=-1$; $p-1=-2$; ꝛc. (wie zuerst); so wird

(c) $dy = -\frac{adx}{x^2\sqrt{(a+bx)}}$.

5‴. $y = x^p(ax+bx^n)^m$. Setzt man wieder, wie 5‴., $y = tu$; so hat man, da jetzt $du = m(ax+bx^n)^{m-1}(a+nbx^{n-1})dx$ ist, allgemein, wie vorhin unter (2)

$dy = px^{p-1}(ax+bx^n)^m dx + mx^p(a+nbx^{n-1})(ax+bx^n)^{m-1}.dx$.

Daher auch speciell für $n=2$, wenn nämlich

(e) $y = x^p(ax+bx^2)^m$ ist; hat man

$dy = px^{p-1}(ax+bx^2)^m dx + mx^p(a+2bx)(ax+bx^2)^{m-1}.dx$.

4. $y = \frac{u}{x}$; ... $dy = \frac{xdu-udx}{x^2}$.

4′. $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$; ... $dy = -\frac{dx}{x^2}$.

4″. $y = \frac{a+bx}{\alpha+\beta x}$; ... $dy = \frac{(\alpha+\beta x)bdx-(a+bx)\beta dx}{(\alpha+\beta x)^2}$

$= \frac{ab-a\beta}{(\alpha+\beta x)^2}.dx$.

4‴. $y = \frac{ax+b}{(x+m)(x+n)}$. Letzteres $= \frac{A}{x+m} + \frac{B}{x+n}$ gesetzt, ist $dy = -\frac{Adx}{(x+m)^2} - \frac{Bdx}{(x+n)^2}$. Um nun A und B zu bestimmen, muß

$\frac{A(x+n)+B(x+m)}{(x+m)(x+n)}$ oder $\frac{(A+B)x+An+Bm}{(x+m)(x+n)}$

$= \frac{ax+b}{(x+m)(x+n)}$ seyn, daher auch $A+B=a$ und $An+Bm=b$.

Hieraus ist denn $A = a - B$, daher $an - Bn + Bm = b$ und $B = \frac{an-b}{n-m}$; ferner $B = a - A$, folglich $am - Am + An = b$, und $A = \frac{am-b}{m-n}$.

Zusatz. Die Kreisfunktionen sind nach §. 90. Zus. 2 (in (δ) und (δ')), indem man r statt a setzt, $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ und $\sqrt{(2rx - x^2)}$, je nachdem man die Abscisse x vom Mittelpunkte oder vom Scheitel des Kreises anrechnet. Daher denn die Differenziale dieser Kreisfunktionen

(α) $dy = \frac{-xdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$ (nach 5'''. (a), indem hier $+b = -1$ ist);

(β) $dy = \frac{1}{2}(2r-2x)(2rx-x^2)^{-\frac{1}{2}}.dx = \frac{(r-x)dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$, vermöge 5''. (ε), indem hier $p = 0$; $+b = -1$; $m = \frac{1}{2}$ ist.

2. Differenziale transcendenter Funktionen.

a. Logarithmischer und Exponential-Funktionen.

§. 146. Nach §. 139 mit Zus. 1 ist

5. $d.\log x = \frac{mdx}{x}$ und $d.\lambda x = \frac{dx}{x}$; eben so allgemein:

$d.\lambda x^m = \frac{m\lambda x^{m-1}dx}{x}$ (vergl. unten 5''''.), oder speciell:

$d.\lambda x^2 = \frac{2\lambda x.dx}{x}$; u. s. w. Setzt man statt x verschiedene Werthe, und entwickelt nach den im §. 145 gegebenen Formeln dx; so erhält man noch folgende specielle Formeln:

5'. $d.\lambda(a^2 + my^2) = \frac{2mydy}{a^2+2y^2}$ (3. 1.). Eben so:

(1) $d.\lambda(x^2 - a^2) = \frac{2xdx}{x^2-a^2}$; aber

(2) $d.\lambda\frac{1}{a^2-x^2} = d.-\lambda(a^2-x^2) = -\frac{-2xdx}{a^2-x^2} = \frac{2xdx}{a^2-x^2}$.

5''. $d.[\lambda.(a+y)(b+y)] = d[\lambda(a+y) + \lambda(b+y)]$

$= \frac{dy}{a+y} + \frac{dy}{b+y} = \frac{a+b+2y}{(a+y)(b+y)}.dy.$

5^{iv}. $d.\lambda\frac{a+y}{a-y} = d.[\lambda(a+y)-\lambda(a-y)]$

$= \frac{dy}{a+y}+\frac{dy}{a-y} = \frac{2ady}{a^2-y^2}$. — Für $y=b+z$ ist

(1) $d.\lambda\frac{a+b+z}{a-b-z} = \frac{2adz}{a^2-b^2-2bz-z^2}$. — Für $a=1$ ist

(2) $d.\lambda\frac{1+y}{1-y} = \frac{2dy}{1-y^2}$; und (3) $d.\lambda\frac{y-a}{y+a} = \frac{2ady}{y^2-a^2}$.

5^{v}. $d.\lambda(y+\sqrt{(a^2+y^2)}) = \frac{dy}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$. Denn weil hier

$x = y+\sqrt{(a^2+y^2)}$, folglich $dx = dy+ydy(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= dy+\frac{ydy}{\sqrt{(a^2+y^2)}} = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}+y}{\sqrt{(a^2+y^2)}}.dy$ ist; so hat man

$\frac{dx}{x} = \frac{(\sqrt{(a^2+y^2)}+y)dy}{\sqrt{(a^2+y^2)}.(y+\sqrt{(a^2+y^2)})}$. — Eben so ist

(4) $d.\lambda(a+y+\sqrt{(2ay+y^2)}) = \frac{dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}}$, weil nun

$dx = dy+(a+y)dy(2ay+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist.

5^{vi}. $d.\lambda\frac{a+\sqrt{(a^2+y^2)}}{y} = -\frac{ady}{y\sqrt{(a^2+y^2)}}$. Denn da hier

$x = \frac{a+\sqrt{(a^2+y^2)}}{y}$, daher nach 4. und 5^{iii}. (a)

$dx = \frac{y^2dy(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}-(a+(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.dy}{y^2}$

$= \frac{y^2-a\sqrt{(a^2+y^2)}-a^2-y^2}{y^2\sqrt{(a^2+y^2)}}.dy$ ist; so ist

$\frac{dx}{x} = \frac{-a(a+\sqrt{(a^2+y^2)}.dy}{y^2\sqrt{(a^2+y^2)}}.\frac{y}{a+\sqrt{(a^2+y^2)}}$.

5^{vii}. $d.\lambda\frac{a-\sqrt{(a^2-y^2)}}{y} = \frac{ady}{y\sqrt{(a^2-y^2)}}$ (wie vorhin zu finden).

5^{viii}. $d.\lambda(y+\sqrt{(y^2-a^2)}) = \frac{dy}{\sqrt{(y^2-a^2)}}$ (5^{vii}.) — Wenn daher $y = \frac{bu-c^2}{u}$ ist; so wird durch Subst. und Red.

$\frac{c^2du}{u[\sqrt{(b^2-a^2)}u^2-2bc^2u+c^4]}$.

5ter. $d.\lambda x^n$ d. i. $d.(\lambda x)^n = n.(\lambda x)^{n-1}.\frac{dx}{x}$. Denn setzt man $\lambda x = y$, demnach $d.\lambda x^n = d.y^n$; so ist dieses Differenzial $= ny^{n-1}dy$; aber $dy = \frac{dx}{x}$. Und statt n gesetzt $n+1$, ist eben so:

(ψ) $d.\lambda x^{n+1} = \frac{(n+1)\lambda x^n dx}{x}$, oder $\frac{d.\lambda x^{n+1}}{n+1} = \frac{\lambda x^n dx}{x}$

$5''$. $d.x^n\lambda x = n.\lambda x.x^{n-1}dx + \frac{x^n dx}{x}$

$= (n.\lambda x.x^{n-1} + x^{n-1}).dx$

$= (n.\lambda x + 1)x^{n-1}.dx$.

$5'''$. $d.\lambda\lambda x = \frac{dx}{x\lambda x}$. Denn $\lambda x = z$ gesetzt, ist

$d.\lambda z = \frac{dz}{z} = \frac{d.\lambda x}{\lambda x} = \frac{dx}{x.\lambda x}$. Eben so:

$d.\lambda\lambda\lambda x = \frac{dx}{x\lambda x.\lambda\lambda x}$.

6. $x = a^y$ ... $dx = a^y.dy.\lambda a$. Denn (nach allgem. Größenl. §. 141. III.) ist $\lambda x = y\lambda a$, daher $\frac{dx}{x} = dy\lambda a$. Eben so ist

$d.e^x = e^x dx$ oder $d.e^{mx} = me^x dx$ (wegen $\lambda e = 1$ nach dem allgem. Größenl. §. 140. Anf. 1).

6'. $x = y^z$, also $\lambda x = z\lambda y$, folglich

$\frac{dx}{x} = \lambda y.dz + z\frac{dy}{y} = \frac{y\lambda y.dz + zdy}{y} = y^{-1}(y\lambda y dz + zdy)$;

also $dx = y^{z-1}(y\lambda y.dz + zdy)$, oder nach der 1. Gleichung:

$dx = y^z\left(\lambda y.dz + z.\frac{dy}{y}\right)$. Eben so wird für $x = y^y$

$d.y^y = y^y(1+\lambda y)dy$.

6''. $x = a^{b^u}$; ... $dx = a^{b^u}.b^u.du.\lambda a.\lambda b$. Denn sey $b^u = y$ oder $x = a^y$; so ist $dx = a^y.dy.\lambda a$; aber $dy = d.b^u = b^u.du.\lambda b$; also ꝛc.

6'''. $x = e^{e^u}$; ... $dx = e^{e^u}.e^u.du$ (wegen $\lambda e = 1$).

$$6'.\ x = y^{v^z};\ \ldots\ dx = y^{v^z}.v^z\left(\lambda y.\lambda v.dz + \frac{z.\lambda y.dv}{v} + \frac{dy}{y}\right).$$

Denn $v^z = u$, daher $x = y^u$ gesetzt, ist nach (6') $dx = y^{v^z}\left(\lambda y.du + v^z.\frac{dy}{y}\right)$; aber $du = d.v^z = v^z\left(dz.\lambda v + z\frac{dv}{v}\right)$; also ꝛc.

b. trigonometrischer Funktionen.

§. 147. Da die fraglichen Differenziale schon im §. 138 mit Zus. 2 aufgestellt sind; so fügen wir hier des Systems wegen nur noch einige Zusätze bei. Nämlich;

Zusatz 1. Sind Produkte oder Potenzen dieser Funktionen zu differenziiren; so verfährt man vorerst nach unseren ersten Grundsätzen und dann nach einer Formel des eben citirten §. 5. Z. B. man sucht $d.\sin\varphi^n$; vorerst ist denn $n.\sin\varphi^{n-1}.d\sin\varphi$, und nun, $d\varphi.\cos\varphi$ statt $d.\sin\varphi$ gesetzt,

$$d.\sin\varphi^n = n.\sin\varphi^{n-1}.d\varphi.\cos\varphi. \text{ — U. s. w.}$$

Zusatz 2. Mittelst derselben Differenzialformeln der trigonometrischen Funktionen wird man leicht die verschiedenen Ausdrücke des Differenzials dx eines Bogens oder Winkels x in den Differenzialen jener Funktionen und in diesen Funktionen selbst ableiten; wobei wir denn zur Ersparung jeder Wiederholung wieder auf die Formeln im §. 138 Zus. 1 verweisen.

Zusatz 3. Aus eben diesen Formeln für dx fließen wieder andere, häufig gebrauchte Differenziale für Bogen, deren trigonometrische Funktionen als bekannt betrachtet werden. Diese Formeln (d. arc. sin x; d. arc. cos x, u. s. w.) finden sich oben im Zus. 3 desselben §. 138 aufgestellt.

c. logarithmisch-trigonometrischer Funktionen.

§. 148. Wenn man in $d.\lambda x = \frac{dx}{x}$ statt x setzt $\sin x$, oder $\cos x$, oder $\tang x$, ...; so bekommt man die gesuchten Differenziale, die wir bereits im §. 139, Zus. 2 entwickelt haben. Daher hier nur noch die Ableitung einiger anderen merkwürdigen und sehr nützlichen Differenzialformeln!

Zusatz 1.

Zuſatz 1. Setzt man in der Formel $d.\lambda\frac{1+y}{1-y}=\frac{2dy}{1-y^2}$ (§. 146. 5". (2)) $y=\tang\varphi\sqrt{-1}$; ſo hat man $dy=\sqrt{-1}\cdot\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}$ (§. 138, (3)) und $1-y^2=1-(\tang\varphi\sqrt{-1})=1+\tang\varphi^2$ (wegen $\sqrt{-1})^2=-1$ nach §. 58 der allg. Größenl.); alſo

$$7.\ d.\lambda\frac{1+\tang\varphi\sqrt{-1}}{1-\tang\varphi\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\cdot\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2(1+\tang\varphi^2)}$$
$$=2\sqrt{-1}\,.\,d\varphi\ (\text{§. 11. nr. 18.}),$$
$$=d(2\sqrt{-1})\varphi.$$

Daher iſt auch die Funktion

(1) $2\varphi\sqrt{-1}=\lambda\frac{1+\tang\varphi\sqrt{-1}}{1-\tang\varphi\sqrt{-1}}$, und zwar ohne Konſtante $=C$. Denn ſetzt man in der vorigen Gleichung $(2\varphi\sqrt{-1})+C$; ſo entwickelt man für $\varphi=0$ die Gleichung $C=\lambda\frac{1}{1}=\lambda 1=0$ (allgem. Größenl. §. 137. Zuſ. 2); d. i. die Konſtante verſchwindet in dieſem, daher auch in jedem andern Falle (vergl. den folg. §. 150).

Aus (1) iſt ferner

(2) $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\lambda\frac{1+\tang\varphi\sqrt{-1}}{1-\tang\varphi\sqrt{-1}}$, oder wegen $\tang\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$

(3) $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\lambda\frac{\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1}}$, oder $\left(\text{wie } -\lambda\frac{a}{b}=\lambda b-\lambda a=\lambda\frac{b}{a}\right)$

(4) $\varphi=-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\lambda\frac{\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}}$. Oder, wenn man in (5) Zähler und Nenner des letzten Bruches mit $\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}$ multiplizirt, wodurch der Nenner in $\cos\varphi^2+\sin\varphi^2=1$ übergeht, iſt auch

(5) $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}.\lambda.(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})^2=\frac{2}{2\sqrt{-1}}.\lambda.(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})$, alſo

(6) $\varphi\sqrt{-1}=\lambda(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})$, oder, weil dieſe Gleichung auch für $n\varphi$ gültig bleibt,

$$6^{\circ}.\ x = y^{v^z};\ldots dx = y^{v^z}.v^z\left(\lambda y.\lambda v.dz + \frac{z.\lambda y.dv}{v} + \frac{dy}{y}\right).$$

Denn $v^z = u$, daher $x = y^u$ gesetzt, ist nach (6) $dx = y^{v^z}\left(\lambda y.du + v^z.\frac{dy}{y}\right)$; aber $du = d.v^z = v^z\left(dz.\lambda v + z\frac{dy}{y}\right)$; also ꝛc.

b. trigonometrischer Funktionen.

§. 147. Da die fraglichen Differenziale schon im §. 138 mit Zus. 2 aufgestellt sind; so fügen wir hier des Systems wegen nur noch einige Zusätze bei. Nämlich;

Zusatz 1. Sind Produkte oder Potenzen dieser Funktionen zu differenziiren; so verfährt man vorerst nach unseren ersten Grundsätzen und dann nach einer Formel des eben citirten §. 5. Z. B. man sucht $d.\sin\varphi^n$; vorerst ist denn $n.\sin\varphi^{n-1}.d\sin\varphi$, und nun, $d\varphi.\cos\varphi$ statt $d.\sin\varphi$ gesetzt,

$$d.\sin\varphi^n = n.\sin\varphi^{n-1}.d\varphi.\cos\varphi. \text{ — U. s. w.}$$

Zusatz 2. Mittelst derselben Differenzialformeln der trigonometrischen Funktionen wird man leicht die verschiedenen Ausdrücke des Differenzials dx eines Bogens oder Winkels x in den Differenzialen jener Funktionen und in diesen Funktionen selbst ableiten; wobei wir denn zur Ersparung jeder Wiederholung wieder auf die Formeln im §. 138 Zus. 1 verweisen.

Zusatz 3. Aus eben diesen Formeln für dx fließen wieder andere, häufig gebrauchte Differenziale für Bogen, deren trigonometrische Funktionen als bekannt betrachtet werden. Diese Formeln ($d.\text{arc.}\sin x$; $d.\text{arc.}\cos x$, u. s. w.) finden sich oben im Zus. 3 desselben §. 138 aufgestellt.

c. logarithmisch-trigonometrischer Funktionen.

§. 148. Wenn man in $d.\lambda x = \frac{dx}{x}$ statt x setzt $\sin x$, oder $\cos x$, oder $\tang x$, ...; so bekommt man die gesuchten Differenziale, die wir bereits im §. 139, Zus. 2 entwickelt haben. Daher hier nur noch die Ableitung einiger anderen merkwürdigen und sehr nützlichen Differenzialformeln!

Zusatz 1.

Zuſatz 1. Setzt man in der Formel $d.\lambda\frac{1+y}{1-y}=\frac{2dy}{1-y^2}$ (§. 146. 5". (2)) $y=\tang\varphi\sqrt{-1}$; ſo hat man $dy=\sqrt{-1}\cdot\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}$ (§. 138, (3)) und $1-y^2=1-(\tang\varphi\sqrt{-1})=1+\tang\varphi^2$ (wegen $\sqrt{-1})^2=-1$ nach §. 58 der allg. Größenl.); alſo

$$7.\ d.\lambda\frac{1+\tang\varphi\sqrt{-1}}{1-\tang\varphi\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\cdot\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2(1+\tang\varphi^2)}$$
$$=2\sqrt{-1}\,.\,d\varphi\ (\text{§. 11. nr. 18.}),$$
$$=d(2\sqrt{-1})\varphi.$$

Daher iſt auch die Funktion

(1) $2\varphi\sqrt{-1}=\lambda\frac{1+\tang\varphi\sqrt{-1}}{1-\tang\varphi\sqrt{-1}}$, und zwar ohne Konſtante $=C$. Denn ſetzt man in der vorigen Gleichung $(2\varphi\sqrt{-1})+C$; ſo entwickelt man für $\varphi=0$ die Gleichung $C=\lambda\frac{1}{1}=\lambda 1=0$ (allgem. Größenl. §. 137. Zuſ. 2); d. i. die Konſtante verſchwindet in dieſem, daher auch in jedem andern Falle (vergl. den folg. §. 150).

Aus (1) iſt ferner

(2) $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\lambda\frac{1+\tang\varphi\sqrt{-1}}{1-\tang\varphi\sqrt{-1}}$, oder wegen $\tang\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$

(3) $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\lambda\frac{\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1}}$, oder $\left(\text{wie } -\lambda\frac{a}{b}=\lambda b-\lambda a=\lambda\frac{b}{a}\right)$

(4) $\varphi=-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\lambda\frac{\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}}$. Oder, wenn man in (3) Zähler und Nenner des letzten Bruches mit $\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}$ multiplizirt, wodurch der Nenner in $\cos\varphi^2+\sin\varphi^2=1$ übergeht, iſt auch

(5) $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}.\lambda.(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})^2=\frac{2}{2\sqrt{-1}}.\lambda.(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})$, alſo

(6) $\varphi\sqrt{-1}=\lambda(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})$, oder, weil dieſe Gleichung auch für $n\varphi$ gültig bleibt,

(6') $n\varphi\sqrt{-1} = \lambda(\cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1})$. — In (4) den letzten Bruch mit $\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}$ multiplizirt, ist

(7) $-\varphi\sqrt{-1} = \lambda(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})$. Weil aber auch $n\varphi\sqrt{-1} = n.\lambda(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$ ist; so hat man vermöge (6') auch

(8) $\cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1} = (\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n$. — Für die Basis e des natürl. Log.-Systems ist (nach allgem. Größenl. §. 136. Zus. 5) aus (6)

(9) $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$, und aus (7)

(10) $e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}$. Die Addition beider gibt $e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2\cos\varphi$, daher

(11) $\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}})$; und eben so durch Subtr.

(12) $\sin\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}})$.

Zusatz 2. Setzt man $\text{tang}\,\varphi = \frac{C}{B}$, so daß also $\varphi = \text{arc. tang}\,\frac{C}{B}$ ist; so hat man nach vor. Zus. 1 (1)

(α) $\text{arc. tang}\,\frac{C}{B} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}.\lambda\frac{B+C\sqrt{-1}}{B-C\sqrt{-1}}$, wo B und C jede Zahlen bedeuten können. — Des letzten Bruches Zähler und Nenner mit $\sqrt{-1}$ multiplizirt, wird

(β) $\text{arc. tang}\,\frac{C}{B} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\lambda\frac{B\sqrt{-1}-C}{B\sqrt{-1}+C}$, oder

$$= -\frac{1}{2\sqrt{-1}}\lambda\frac{B\sqrt{-1}+C}{B\sqrt{-1}-C}$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda\frac{B\sqrt{-1}+C}{B\sqrt{-1}-C}.$$ Weil ferner nach §. 22 nr. 170 $\text{tang}\,2\varphi = \frac{2}{\cot\varphi - \text{tang}\,\varphi} = \frac{1}{\frac{B}{C} - \frac{C}{B}} = \frac{2BC}{B^2-C^2}$ ist; so hat man

(γ) $2\,\text{arc. tang}\,\frac{C}{B} = \text{arc. tang}\,\frac{2BC}{B^2-C^2}$, mithin durch Subſtit. aus (α)

$$\text{arc. tang}\,\frac{2BC}{B^2-C^2} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\lambda\frac{B+C\sqrt{-1}}{B-C\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\lambda\frac{B\sqrt{-1}-C}{B\sqrt{-1}+C}.$$

Subſtituirt man in §. 22. nn. 150. 154 $\frac{C}{2B}$ ſtatt $\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$ und $\frac{B^2\pm C^2}{2BC}$ ſtatt $1\pm\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi^2$; ſo hat man $\sin\varphi = \frac{2BC}{B^2+C^2}$ und $\cos\varphi = \frac{B^2-C^2}{B^2+C^2}$, oder es erhellt, daß ein Bogen, deſſen Tangente iſt $\frac{2BC}{B^2-C^2}$ zum Coſinus die Größe $\frac{B^2-C^2}{B^2+C^2}$ und zum Sinus die Größe $\frac{2BC}{B^2+C^2}$ habe, demnach auch

(δ) $\text{arc. sin}\,\frac{2BC}{B^2+C^2} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\lambda\frac{B+C\sqrt{-1}}{B-C\sqrt{-1}}$, und

$$\text{arc. cos}\,\frac{B^2-C^2}{B^2+C^2} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\lambda\frac{B\sqrt{-1}-C}{B\sqrt{-1}+C}\ \text{ſey.}$$

Wenn man endlich in nr. 4 des §. 9 und nr. 13 des §. 10 ſtatt $\text{tang}\,\varphi$ ſetzt $\frac{C}{B}$, und $\frac{\sqrt{(B^2+C^2)}}{B}$ ſtatt $\sqrt{(1+\text{tang}\,\varphi^2)}$; ſo hat man $\sin\varphi = \frac{C}{\sqrt{(B^2+C^2)}}$ und $\cos\varphi = \frac{B}{\sqrt{(B^2+C^2)}}$, oder es erhellt, daß ein Bogen, deſſen Tangente iſt $\frac{C}{B}$, zum Sinus jene erſte und zum Coſinus jene zweite Größe habe, daß folglich nach (α) auch

(ε) $\text{arc. sin}\,\frac{C}{\sqrt{(B^2+C^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\lambda\frac{B+C\sqrt{-1}}{B-C\sqrt{-1}}$ und nach (β)

$$\text{arc. cos}\,\frac{B}{\sqrt{(B^2+C^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\lambda\frac{B\sqrt{-1}-C}{B\sqrt{-1}+C}\ \text{ſey.} — \text{U.ſ.w.}$$

3. Höhere Differenziale.

§. 149. Die bisher angeführten Differenziale heißen Differenziale des erſten Grades zum Unterſchiede der

höheren Differenziale überhaupt, die man im Allgemeinen durch wiederholtes Differenziiren der unmittelbar vorhergehenden Differenziale erzeugt. Man hat daher die Rechnung zur Auffindung der höheren Differenziale auch den Differentio-Differenzial-Calcul genannt, und die durch ihn gewonnenen Differenziale in die des zweiten, dritten, ... Grades unterschieden.

a. Sey $y = x^m$ und x verändere sich gleichförmig; so hat man die Differenzialgleichung

vom 1. Grade.	Differenzialexponent.
$dy = mx^{m-1} . dx;$	$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$
vom 2. Grade.	
$d^2y = d(mx^{m-1}dx)$ $= m.m-1.x^{m-2}dx^2;$	$\frac{d^2y}{dx^2} = m.m-1.x^{m-2}.$
vom 3. Grade.	
$d^3y = d(m.m-1.x^{m-2}dx^2)$ $= m.m-1.m-2.x^{m-3}dx^3;$	$\frac{d^3y}{dx^3} = m.m-1.m-2.x^{m-3}.$

U. s. w.

Da $dy = mx^{m-1} . dx$, folglich $dy^2 = (mx^{m-1}dx)^2 = m^2 . x^{2m-2}dx^2$ ist; so hat man auch

$\frac{d^2y}{dy^2} = \frac{m.m-1x^{m-2}dx^2}{m^2.x^{2m-2}dx^2} = \frac{m-1}{m} . \frac{1}{x^m} = \frac{m-1}{m} . \frac{1}{y}$; eben so:

$\frac{d^3y}{dy^3} = \frac{m-1.m-2}{m^2} . \frac{1}{y^2}$. U. s. w.

b. Sey $z = xy$ und dx konstant; so erhält man die Differenzialgleichung vom

1. Gr. $dz = ydx + xdy.$

2. Gr. $d^2z = d(ydx + xdy) = dydx + dxdy + xd^2y.$

$= 2dy . dx + xd^2y.$ Eben so:

3. Gr. $d^3z = 2d^2ydx + dxd^2y + xd^3y = 3d^2ydx + xd^3.y.$

4. Gr. $d^4z = 3d^3ydx + dxd^3y + xd^4y = 4d^3ydx + xd^4.y.$

U. ſ. w.

c. Sey $z = \frac{y}{x}$ und dx konſtant; ſo hat man:

$$dz = \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{dy}{x} - \frac{ydx}{x^2}.$$

$$d^2z = d\left(\frac{dy}{x} - \frac{ydx}{x^2}\right) = \frac{xd^2y - dxdy}{x^2} - \frac{x^2dydx - ydx.2xdx}{x^4}$$

$$= \frac{d^2y}{x} - \frac{dxdy}{x^2} - \frac{dydx}{x^2} + \frac{2ydx^2}{x^3}$$

$$= \frac{d^2y}{x} - \frac{2dxdy}{x^2} + \frac{2ydx^2}{x^3}. \text{ Eben ſo findet man}$$

$$d^3z = \frac{d^3y}{x} - \frac{3dxd^2y}{x^2} + \frac{6dx^2dy}{x^3} - \frac{6ydx^3}{x^4}. \text{ U. ſ. w.}$$

d. Sey $x = \sin\varphi$ und $y = \cos\varphi$; ſo hat man, $d\varphi$ konſtant geſetzt,

$dx = \cos\varphi.d\varphi$; $dy = -\sin\varphi.d\varphi$ (§. 138. (1) (2)).

$d^2x = d(\cos\varphi.d\varphi) = -\sin\varphi.d\varphi^2$; $d^2y = -\cos\varphi.d\varphi^2$.

$d^3x = -\cos\varphi.d\varphi^3$; $d^3y = +\sin\varphi.d\varphi^3$.

$d^4x = +\sin\varphi.d\varphi^4$; $d^4y = +\cos\varphi.d\varphi^4$. U. ſ. w.

e. Sey $y = e^x$ und $z = e^{-x}$ (wo e wieder die Baſis des natürl. Logar.-Syſtems); ſo hat man

1) $x = \lambda y$, daher $dx = \frac{dy}{y}$ (§. 139. Zuſ. 1) und

$dy = ydx = e^x.dx$. Ferner, dx konſtant geſetzt,

$d^2y = d(ydx) = dydx = e^xdx^2$. Eben ſo findet ſich das Differenzial des 3. Grades:

$d^3y = e^x.dx^3$. U. ſ. w.

2) iſt wegen $-x$ in $z = e^{-x}$ der Exponent $x = \lambda\frac{1}{z}$, daher

$$dx = d \cdot \lambda \frac{1}{z} = -\frac{dz}{z^2} : \frac{1}{z} = -\frac{dz}{z};$$

also $dz = -zdx = -e^{-x}dx$. Ferner für dx konstant,

$d^2z = d(-zdx) = -dzdx = +e^{-x}dx^2$. Eben so

$d^3z = -e^{-x}dx^3 \ldots$ U. s. w.

Zusatz. Taylor's Lehrsatz. Sey $u = x^n$, oder u eine solche Funktion von x (was nach §. 151. 2 mit $u = \varphi x$ bezeichnet wird), daß, wenn u in $u + \triangle u$ $(= U)$ übergeht, x sich um die Größe $\triangle x$ $(= k)$ verändert, demnach allgemein sey

$$u + \triangle u = (x + \triangle x)^n \text{ oder } U = (x+k)^n = \varphi(x+k);$$

so erhält man hieraus nach der Binomialformel:

$$u + \triangle u = x^n + nx^{n-1}\triangle x + \frac{n.n-1.x^{n-2}\triangle x^2}{1.2} + \frac{n.n-1.n-2x^{n-3}\triangle x^3}{1.2.3} + \ldots$$

oder durch Substitution zugleich nach (a)

$$U = \varphi(x+k) = u + k \cdot \frac{du}{dx} + \frac{k^2}{1.2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \ldots + \frac{k^n}{1.2\ldots n} \cdot \frac{d^nu}{dx^n}$$

Ist hiebei k eine negative Zunahme oder eine Abnahme, d. i. gilt $-\triangle x$ wie $-\triangle u$, so stellt U eine Differenz vor, und die Zeichen der Glieder der vorigen Reihe alterniren (allgem. Größenl. §. 65. Zus. 3). Man kann übrigens k beliebig klein, z. B. $= 0{,}001 = 0{,}0001, \ldots$ d. i. so klein wählen, daß das zweite Glied größer wird, als die Summe der folgenden Glieder.

Aus dieser, auch der Taylor'sche Lehrsatz (von seinem Erfinder, einem engländischen Mathematiker) genannten, Formel werden für die Fälle, in welchen u eine Funktion mehre-

rer Veränderlichen ist, was durch $u = \varphi(x, y)$ oder $u = \varphi(x, y, z)$ angedeutet wird, folgende höheren Formeln abgeleitet:

Erstens sey $u = \varphi(x, y)$, und x ändere sich um die endliche Größe k, während vorerst y konstant bleibe; so hat man, wie vorhin:

$$(1)\quad \varphi(x+k, y) = u + k \cdot \frac{du}{dx} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \ldots$$

und eben so, x als konstant, y aber variabel betrachtet und $\triangle y$ mit r bezeichnet, ist:

$$(2)\quad \varphi(x, y+r) = u + r \cdot \frac{du}{dy} + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{r^3}{2.3} \cdot \frac{d^3u}{dy^3} + \ldots$$

In Beziehung ferner auf $\frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x, y)}{dx}$ in (1) wird

$$(3)\quad \frac{d\varphi(x, y+r)}{dx} = \frac{du}{dx} + r \cdot \frac{d \cdot \frac{du}{dx}}{dy} + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot \frac{du}{dx}}{dy^2} + \ldots$$

$$= \frac{du}{dx} + r \cdot \frac{d^2u}{dx.dy} + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d^3u}{dx.dy^2} + \frac{r^3}{2.3} \cdot \frac{d^4u}{dx.dy^3} + \ldots$$

Eben so in Beziehung auf $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2\varphi(x, y)}{dx^2}$ in (1) wird

$$(4)\quad \frac{d^2\varphi(x, y+r)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + r \cdot \frac{d^3u}{dx^2.dy} + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d^4u}{dx^2.dy^2} + \ldots$$

u. s. w.

Wenn man nun diese statt u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ... in diesem Falle, wo y in $y+r$ übergeht, entwickelten Werthe in der Reihe (1) substituirt; so hat man die Entwickelung:

$$\varphi(x+k, y+r) = u + k \cdot \frac{du}{dx} + r \cdot \frac{du}{dy} + kr \cdot \frac{d^2u}{dx.dy} + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2}$$
$$+ \frac{k^3}{2.3} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{k^2.r}{2} \cdot \frac{d^3u}{dx^2.dy} + \frac{kr^2}{2} \cdot \frac{d^3u}{dx.dy^3}$$
$$+ \frac{r^3}{2.3} \cdot \frac{d^3u}{dy^3} + \ldots$$

Wenn zweitens $u = \varphi(x, y, z)$ ist und x in $x+k$, y in $y+r$ und z in $z+t$ übergeht; so findet man auf gleiche Weise:

$$\varphi(x+k, y+r, z+t) = u + k.\frac{du}{dx} + \frac{r.du}{dy} + t.\frac{du}{dz} + \frac{k^2}{2}.\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$+ \frac{kr.d^2u}{dxdy} + \frac{r^2}{2}.\frac{d^2u}{dy^2} + kt.\frac{d^2u}{dx.dz} + \frac{t^2}{2}.\frac{d^2u}{dz^2} + \ldots$$

U. s. w.

VII.

Die Integralrechnung.

A.

Einige Vorerinnerungen.

§. 150. **Erklärungen.** Die **Integralrechnung** ist die Wissenschaft des Verfahrens, aus einem vorgegebenen Differenzial denjenigen Ausdruck, aus welchem ursprünglich das Differenzial nach den Grundsätzen und Regeln der Differenziation entsprungen ist, — oder (was dasselbe ist) aus der gegebenen Differenzialgleichung die ursprüngliche Gleichung, durch deren Differenziation erstere entstanden ist, — wieder aufzufinden oder herzustellen.

Das durch $\int.$ oder $\int$ (z. B. $\int(dx)$ oder $\int.dx$) bezeichnete Verfahren, oder die der Differenziation entgegengesetzte Operation, wird die **Integration** und der hiedurch aufzufindende oder aufgefundene Ausdruck, wie $\int.dx$ oder x, das **Integral** von dx oder das **Integral** x genannt.

Da also die Integralrechnung das Umgekehrte der Differenzialrechnung ist; so ist im Allgemeinen, durch die Grundsätze und Regeln des Differenziirens, oder durch die genaue Kenntniß der richtigen Entwickelung der Differenziale zugleich auch das **Fundament** des Integrirens gelegt, ohne daß es Noth thue, das Verfahren, das Integral zu finden, in bestimmten Regeln auszusprechen. Weil man z. B. weiß, daß $d(axy) = a(ydx + xdy)$ ist; so kennt man auch so fort das Integral von diesem Differenzial. Eben so weil $d.x^m = mx^{m-1}.dx$; so ist umgekehrt $\int.mx^{m-1}.dx = x^m$. Die Regel folglich, $mx^{m-1}dx$ zu integriren, das der Regel der Differenziation des

Ausdruckes x^m umgekehrte Verfahren aussprechend, wäre diese: Man erhöhe in dem vorigen (so wie in jedem andern, auf gleiche Weise gebildeten) Differenzial den Exponenten von x um die Einheit, und dividire den so veränderten Ausdruck sowohl durch den neuen Exponenten, als auch durch das Differenzial der in dem Ausdrucke enthaltnen veränderlichen Größe.

Die Prüfung, ob man ein gegebenes Differenzial richtig integrirt habe, bleibt, wie überhaupt hinsichtlich aller entgegengesetzten Operationen, auch hier die Differenziirung des gefundenen Integrals, durch welche der vorgegebene Differenzialausdruck wieder hergestellt werden muß.

Nebst dieser Prüfung findet noch die Untersuchung Statt, ob dem richtig entwickelten Integral, als solchem, noch eine Konstante und welche durch + oder — beizufügen sey? Weil nämlich z. B. von ax, wie von $ax \pm b$ das Differenzial nur ist adx; so ist auch das Integral von adx zunächst nur ax, und hiedurch zwar eine der möglichen ursprünglichen Funktionen, aber nicht auch jede andere, z. B. $ax + b$, oder $ax - b$, wieder hergestellt. Diese folglich nothwendige, und in jedem besondern Falle auf die Natur der Funktion, auf welche sich ein gegebenes Differenzial bezieht, zu gründende Untersuchung pflegt der Mathematiker dadurch anzudeuten, daß er dem gefundenen Integral vorerst den Buchstaben C, und zwar gewöhnlich mit +, beifügt.

Die in vielen Fällen ausreichende Regel, die Konstante C zu finden, beruht auf der Annahme, daß für $x = 0$ auch das Integral, welches jene Variable enthält, verschwinde. Man setzt daher vorerst das ganze Integral $I + C = 0$, läßt dann aus I die Größen weg, die wegen $x = 0$ verschwinden, wodurch die neue Gleichung $K + C = 0$ oder auch $C = 0$ entsteht. Im ersten Falle ist die Konstante $C = -K$, und im andern Falle ist dem Integral I keine Konstante beizufügen.

B.

Entwickelung und Zusammenstellung der Integralformeln.

a.

Integrale in Beziehung auf algebraische Funktionen.

§. 151. Vergl. hiebei §. 145.

1. $\int dx = x + C$. 2. $\int a dx = ax + C$.

3. $\int (dx + dy) = x + y + C$. 4. $\int (a dy \pm b dy) = ax \pm bx + C$.

5. $\int (x dy + y dx) = xy + C$.

6. $\int \frac{z dx - x dz}{z^2} = \frac{x}{z} + C$.

6'. $\int \frac{a dx}{x^2} = -\frac{a}{x} + C$. 6''. $\int \frac{-dx}{x^2} = \frac{1}{x} + C$.

7. $\int m x^{m-1} dx = x^m + C$. 7'. $\int b x^{n-1} dx = \frac{b x^n}{n} + C$.

7''. $\int a \sqrt{x} . dx = \frac{a x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} a x \sqrt{x} + C$.

7'''. $\int x^{\frac{m}{n}} . dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{n . \sqrt[n]{x^{m+n}}}{m+n} + C$. Und speziell:

7''''. $\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C$; $\int x^{-6} dx = C - \frac{1}{5} x^{-5}$;

$\int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$; $\int x^{-\frac{3}{2}} dx = C - 2 x^{-\frac{1}{2}}$.

7'''''. Von $dy = x^{n-1} (a + b x^n)^m$ ist das Integral $y = \frac{1}{(m+1) nb} . (a + b x^n)^{m+1}$. Denn wenn man in nr. 5''. §. 145 $m+1$ statt m, daher $(m+1) nb = 1$ setzt; so hat man unsere vorgegebene Differenzialgleichung. Wollte man daher die ihr entsprechende Integralgleichung wie in 5''. annehmen, nämlich $y = (a + b x^n)^{m+1}$; so würde man dieses Integral um den Faktor $(m+1) nb$, der in der gegebenen Differenzialgleichung fehlt, oder $= 1$ ist, zu groß nehmen. Daher wird das richtige Integral durch Division durch diesen Faktor erhalten.

Sey einfacher $dy = (a+bx)^m . dx$ zu integriren. Man setze $a+bx = u$; so ist $dx = \frac{du}{b}$ und $dy = \frac{u^m du}{b}$. Folglich die gesuchte Integralgleichung

$$y = \frac{u^{m+1}}{(m+1)b} = \frac{(a+bx)^{m+1}}{(m+1)b} + C.$$

7''. Sey $dy = (ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \ldots)dx$ zu integriren.

Man hat $y = \left(\frac{1}{\alpha+1}ax^{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}.bx^{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1}.cx^{\gamma+1} + \ldots\right) + C.$

7'''. $\int (dx = 2ydy . \sqrt{(4y^2+p^2)})$. Man hat $x = \frac{1}{8}(4y^2+p^2)\sqrt{(4y^2+p^2)}$. Denn man setze $4y^2+p^2 = z$; so ist $dz = 8ydy$, daher $\frac{1}{4}dz = 2ydy$: folglich nun $dx = \frac{1}{4}dz . z^{\frac{1}{2}}$, deren Integral ist $x = \frac{1}{6}z^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}z . z^{\frac{1}{2}} =$ (durch Subst.) obigem Integral.

b.

Integrale in Beziehung auf logarithmische und Exponential-Funktionen und solche Differenziale, welche irrationale Faktoren haben.

§. 152. Vergl. §. 146.

8. $\int \frac{dx}{x} = \lambda \frac{x}{C}$; eben so: $\int \frac{adx}{x} = a\lambda \frac{x}{C}$ und $\int \frac{adx}{b+x} = a\lambda \frac{b+x}{C}$. Bei diesen Integralen wird nämlich die Konstante am bequemsten als Logarithmus angenommen, dessen entsprechende Zahl ein Faktor oder Divisor der zu dem Logar. gehörigen Größe ist.

9. Das Integral von $dy = \frac{dx}{a+bx}$ ist $y = \frac{1}{b} . \lambda \frac{a+bx}{C}$. Denn $a+bx = u$ gesetzt, ist $bdx = du$, oder $dx = \frac{1}{b}du$ und $dy = \frac{1}{b} . \frac{du}{u}$, ꝛc. Eben so ist $\int \frac{adx}{b+cx} = \frac{a}{c} . \lambda \frac{b+cx}{C}$.

10. $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a} . \lambda \frac{x}{a+bx} + C$. Denn es ist $\frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{dx}{ax} - \frac{bdx}{a(a+bx)}$, und hievon das Integral: $\frac{1}{a} . \lambda x$

$$-\frac{b}{ab}\lambda(a+bx) \text{ vermöge 8. u. 9.)} = \frac{1}{a}\lambda x - \frac{1}{a}\lambda(a+bx)$$

$$= \frac{1}{a}\lambda\frac{x}{a+bx}.$$

Bemerkung. Sind Differenziale von der Form $\frac{x^m dx}{a+bx}$ zu integriren, so löst man den Ausdruck $\frac{x^m}{a+bx}$ nach allgem. Größenl. §. 41. Zus. 3 in eine Reihe auf, deren Ergänzung ist der zuletzt angesetzte, kein x weiter enthaltende Rest, durch $a+bx$ dividirt. Die einzelnen Quotienten, mit dx multiplizirt gedacht, werden dann nach 7''. des vorigen Paragraphen und die erwähnte Ergänzung nach 9. integrirt.

So ist für $m = 4$

$$\frac{x^4}{a+bx} = \frac{x^3}{b} - \frac{ax^2}{b^2} + \frac{a^2x}{b^3} - \frac{a^3}{b^4} + \frac{a^4}{b^4(a+bx)}. \text{ Demnach}$$

$$\int\frac{x^4}{a+bx} = \int\left(\frac{x^3dx}{b} - \frac{ax^2dx}{b^2} + \frac{a^2xdx}{b^3} - \frac{a^3dx}{b^4}\right) + \int\frac{a^4dx}{b^4(a+bx)}$$

$$= \frac{x^4}{4b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2x^2}{2b^3} - \frac{a^3x}{b^4} + \frac{a^4}{b^5}\lambda(a+bx).$$

Auf gleiche Weise wird bei Differenzialen von der Form: $\frac{dx}{x^m(a+bx)}$ oder $\frac{x^{-m}dx}{a+bx}$ die Potenz x^{-m}, indem man a als beständigen Divisor wählt, so lange durch $a+bx$ dividirt, bis der Rest nur noch x^{-1} enthält.

So ist für $m = 4$

$$\frac{x^{-4}dx}{a+bx} = dx\left(\frac{x^{-4}}{a} - \frac{bx^{-3}}{a^2} + \frac{b^2x^{-2}}{a^3}\right) - \frac{b^3x^{-2}dx}{a^3(a+bx)},$$

welches letzte Glied, als Ergänzung des Quotienten, nach nr. 10 integrirt wird.

$$11.\ \int\left(dy = \frac{dx}{(a+x)(b+x)}\right) = \left(y = \frac{1}{b-a}\lambda\frac{a+x}{b+x} = \frac{1}{a-b}\lambda\frac{b+x}{a+x} + C\right).$$

Denn $\frac{1}{(a+x)(b+x)}$ kann entweder in $\frac{1}{(b-a)(a+x)}$

$-\frac{1}{(b-a)(b+x)}$ oder in die Brüche $\frac{1}{(a-b)(b+x)}$ $-\frac{1}{(a-b)(a+x)}$ zerlegt werden, so daß man entweder hat

$$\int\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b+x}-\frac{1}{a+x}\right)dx=\frac{1}{a-b}[\lambda(b+x)-\lambda(a+x)], \text{ oder}$$

$$\int\frac{1}{b-a}\left(\frac{dx}{a+x}-\frac{dx}{b+x}\right)=\frac{1}{b-a}[\lambda(a+x)-\lambda(b+x)].$$

12. $\int\left(dy=\frac{dx}{(a+x)(b-x)}\right)=\left(y=\frac{1}{a+b}\cdot\lambda\frac{a+x}{b-x}+C\right)$,

indem $\frac{1}{(a+x)(b-x)}dx=\left(\frac{1}{(a+b)(a+x)}+\frac{1}{(a+b)(b-x)}\right)dx$

$=\frac{1}{a+b}\left(\frac{dx}{a+x}+\frac{dx}{b-x}\right)$ ist.

13. $\int\frac{2adx}{x^2-a^2}=\lambda\frac{x-a}{x+a}+C$ (nach §. 146. 5‴. (3)). Daher

14. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\lambda\frac{x-a}{x+a}+C$, und $\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2ab}\lambda\frac{a+bx}{a-bx}$.

Aber $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}$ arc. tang $\frac{x}{a}+C$ (§. 158. Zus. 5. (c)),

oder $\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{ab}$ arc. tang $\frac{bx}{a}$.

15. $\int\frac{xdx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}\lambda(x^2-a^2)+C$ (§. 146. 5′. (1)); oder

$\int\frac{xdx}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\lambda(a^2+x^2)+C$ (ebend.); oder

$\int\frac{xdx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2}\lambda\frac{1}{a^2-x^2}+C$ (ebend. (2)).

16. $\int\frac{dx}{x(a^2-x^2)}=\frac{1}{2a^2}\lambda\frac{x^2}{a^2-x^2}+C$. Denn $\frac{1}{x(a^2-x^2)}=\frac{1}{a^2x}+\frac{x}{a^2(a^2-x^2)}$,

daher $\int\frac{dx}{x(a^2-x^2)}=\int\frac{1}{a^2}\left(\frac{dx}{x}+\frac{xdx}{a^2-x^2}\right)$

$=\frac{1}{a^2}\left(\lambda x+\frac{1}{2}\lambda\frac{1}{a^2-x^2}\right)$ (nr. 15.)

$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\lambda x^2+\lambda\frac{1}{a^2-x^2}\right)$, also ꝛc.

17. $\int$

17. $\int\frac{dx}{x(a^2+x^2)}=\frac{1}{2a^2}\lambda\frac{x^2}{a^2+x^2}+C$, indem $\frac{1}{x(a^2+x^2)}$
$=\frac{1}{a^2x}-\frac{x}{a^2(a^2+x^2)}$ ist.

17'. $\int dx\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)}=\sqrt{(x^2+ax)}+\frac{1}{2}a.\lambda[x+\frac{1}{2}a+\sqrt{(x^2+ax)}]+C.$

17''. $\int dx\sqrt{(1+x^2)}=\frac{1}{2}x.\sqrt{(1+x^2)}+\frac{1}{2}\lambda(x+\sqrt{(1+x^2)})+C.$
(§. 139. Anmerk.)

Wenn in den Differenzialen derselben Form höhere Potenzen von x vorkommen; so dienen folgende allgemeinen Integralformeln:

Sey $dy=\frac{x^m dx}{(a+bx)^n}$, wo m und n ganze + Zahlen seyn sollen, zu integriren. Man findet:

18. $y=C+\frac{1}{(m-n+1)b}.\frac{x^m}{(a+bx)^{n-1}}-\frac{ma}{(m-n+1)b}.\int\frac{x^{m-1}dx}{(a+bx)^n}.$

Von der Richtigkeit dieser Formel überzeugt man sich leicht durch Differenziation des ersten Gliedes, das man durch $P.x^m(a+bx)^{-n+1}$ ausdrücken kann. Es ist nämlich

$d.Px^m(a+bx)^{-n+1}=P(a+bx)^{-n+1}.mx^{m-1}dx$
$+Px^m(-n+1)(a+bx)^{-n}bdx=\frac{mPx^{m-1}dx}{(a+b)^{n-1}}+\frac{P(-n+1)bx^m dx}{(a+bx)^n}$
$=\frac{m}{(m-n+1)b}.\frac{x^{m-1}dx(a+bx)}{(a+bx)^n}+\frac{(-n+1)bx^m.dx}{(m-n+1)b(a+bx)^n}$
$=\frac{am}{(m-n+1)b}.\frac{x^{m-1}dx}{(a+bx)^n}+\frac{bmx^m dx}{(a+bx)^n}+\frac{(-n+1)b}{(m-n+1)b}.\frac{x^m.dx}{(a+bx)^n};$

das erste Glied hier destruirt sich gegen das letzte unserer Integralformel, und die 2 andern Glieder sind reducirt $\frac{x^m dx}{(a+bx)^n}$, d. i. gleich unserem vorgegebenen Differenzial.

Formeln, wie nr. 18, die noch ein angezeigtes Integral als Glied enthalten, hat man involutorische Integrale genannt, bei welchen die Integration nur theilweise Statt findet, was man so erörtert:

Seyen X und Z Funktionen von x; ferner $dy = d(XZ) = XdZ + ZdX$. Man habe aber nur $dy = ZdX$; so ist $y = ZX - \int XdZ$. XdZ wieder in 2 Faktoren Z' und dX', deren letzter das Differenzial dx enthält, zerlegt und demnach $XdZ = Z'dX$ gesetzt, wird $\int(XdZ) = Z'X' - \int X'dZ'$, folglich $y = ZX - Z'X' + \int X'dZ'$. So wird mit diesem Zerlegen fortgefahren, bis man auf ein einfaches Differenzial kommt, dessen Integral mittelst einer bekannten Formel gefunden wird. So kommt man bei nr. 18 zuletzt auf $\int\frac{dx}{(a+bx)^n} = \frac{1}{(n-1)b} \cdot \frac{1}{(a+bx)^{n-1}}$.

Auf gleiche Weise zeigt die Differenziation die Richtigkeit der folgenden ähnlichen Integrale:

19. Gegeben: $dy = \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}$; Integralgleichung:

$$y = C - \frac{1}{(m-1)a} \cdot \frac{1}{x^{m-1}(a+bx)^{n-1}} - \frac{(m+n-1)b}{(m-1)a} \cdot \int\frac{dx}{x^{m-1}(a+bx)^n}.$$

20. Gegeben: $dy = \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$; Integralgleichung:

$$y = C + \frac{1}{2(n-1)a} \cdot \frac{x}{(a+bx^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a} \cdot \int\frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}},$$

wobei man zuletzt auf $\int\frac{dx}{a+bx^2}$ kommt, mittelst nr. 14 bestimmbar.

21. Gegeben: $dy = \frac{x^m dx}{(a+bx^2)^n}$; Integralgleichung:

(α) $$y = C + \frac{1}{(m-2n+1)b} \cdot \frac{x^{m-1}}{(a+bx^2)^{n-1}} - \frac{(m-1)a}{(m-2n+1)b} \int\frac{x^{m-2}dx}{(a+bx^2)^n};$$

wobei man für ein gerades m in dem $\frac{1}{2}(m+1)$ten Gliede das Integral $\int\frac{dx}{(a+bx^2)^n}$ erhält, das nach nr. 20 in einer Reihe entwickelt wird, und von den Logar. oder Bogen abhängt. Aber für ein ungerades m erhält man $\int\frac{dx}{(a+bx^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)b} \cdot \frac{1}{(a+bx^2)^{n-1}}$.

(β) $$y = C - \frac{1}{2(n-1)b} \cdot \frac{x^{m-1}}{(a+bx^2)^{n-1}} + \frac{m-1}{2(n-1)b} \int\frac{x^{m-2} \cdot dx}{(a+bx^2)^{n-1}}.$$

(γ) $y = C - \frac{1}{(m-1)a} \cdot \frac{1}{x^{m-1}(a+bx^2)^{n-1}} - \frac{(m+2n-3)b}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-2}(a+bx^2)^n}$;

wobei man für ein gerades m zuletzt kommt auf $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$ (nr. 20.) und für ein ungerades m auf

22. $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)^n} = C + \frac{1}{2(n-1)a} \cdot \frac{1}{(a+bx^2)^{n-1}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x(a+bx^2)^{n-1}}$,

welche involutorische Formel auf $\frac{dx}{x(a+bx^2)}$ führt, mittelst einer der obigen Formeln bestimmbar.

23. $\int n(\lambda x)^{n-1} \cdot \frac{dx}{x} = \lambda(x)^n + C$. (§. 146. 5‴.).

24. $\int \frac{dx}{x\lambda x} = \lambda\lambda x + C$ (ebend. 5″.).

25. $\int a^x \cdot dx \cdot \lambda a = a^x + C$ (ebend. 6.); daher auch

26. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\lambda a} + C$.

27. $\int y^z \left(\lambda y \cdot dz + \frac{z dy}{y}\right) = y^z + C$ (ebend. 6′.).

28. $\int a^{b^x} \cdot dx \cdot \lambda a \cdot \lambda b = a^{b^x} + C$ (ebend. 6″.).

29. $\int x^{y^v} \cdot y^v \left(\frac{v dy \cdot \lambda x}{y} + dv \cdot \lambda x \cdot \lambda y + \frac{dx}{x}\right) = x^{y^v} + C$

(ebend. 6‴.).

Bemerkung. Oft führt eine kleine Aenderung im gegebenen Differenzial zum gesuchten Integral. Sey z. B. $adx = ydy - xdy$ zu integriren. Durch Beisetzung von $-ady$ hat man $a(dx-dy) = (y-x-a)dy$, oder $dy = \frac{a(dx-dy)}{y-x-a}$, oder $-dy = \frac{a \cdot d(y-x-a)}{y-x-a}$, dessen Integral $-y = a\lambda(y-x-a)$ ist.

30. Gegeben: $dy = \frac{dx}{a^2+2bx+x^2}$, wo $a^2 < b^2$ sey; Integral: $y = C + \frac{1}{2\sqrt{(b^2-a^2)}} \cdot \lambda \frac{x+b-\sqrt{(b^2-a^2)}}{x+b+\sqrt{(b^2-a^2)}}$. Denn man setze $a^2+2bx+x^2 = (p+x)(q+x) = pq+(p+q)x+x^2$; so ist $pq = a^2$ oder $p = \frac{a^2}{q}$; $p+q = 2b$ und $q = 2b-p$,

daher auch $p = \frac{a^2}{2b-p}$ oder $p^2-2bp = -a^2$, woraus $p = b+\sqrt{(b^2-a^2)}$, folglich auch $q = 2b-p = b-\sqrt{(b^2-a^2)}$, und endlich $dy = \frac{dx}{(p+x)(q+x)}$. Hievon ist das Integral $y = \frac{1}{p-q}\lambda\frac{q-x}{p+x}$, was, die Werthe von p und q substituirt, obiges Integral gibt.

Aber wenn in $dy = \frac{dx}{a^2+2bx+x^2}$ die Größe $a^2 > b^2$ ist; so ist das Integral:

31. $y = \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \cdot \text{arc. tang}\frac{b+x}{\sqrt{(a^2-b^2)}} + C$. Denn $x = u-b$ gesetzt, wird $dy = \frac{du}{u^2+a^2-b^2}$ und das Integral nach 14. $y = \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{arc. tang}\frac{u}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$. Aber $u = x+b$.

32. $\int\frac{dx}{a^2+2bx-x^2} = C + \frac{1}{2\sqrt{(a^2+b^2)}} \cdot \lambda\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-b+x}{\sqrt{(a^2+b^2)}+b-x}$. Denn $a^2+2bx-x^2 = (p+x)(q-x) = pq+(q-p)x-x^2$ gesetzt, ist $a^2 = pq$; $2b = q-b$ und nach 12.

$$\int\frac{dx}{(p+x)(q-x)} = \frac{1}{p+q}\lambda\frac{p+x}{q-x}.$$

Aber man entwickelt, wie in 30.,

$p = -b+\sqrt{(a^2+b^2)}$ und $q = b+\sqrt{(a^2+b^2)}$; etc.

33. $\int\frac{dx}{a^2+2ax+x^2} \doteq \int(a+x)^{-2}.dx = C - \frac{1}{a+x}$ (§. 151. 7).

34. $\int\frac{cxdx}{a^2+2bx+cx^2} = \frac{1}{2}\lambda(a^2+2bx+cx^2) - \int\frac{bdx}{a^2+2bx+cx^2}$, (welches letzte Glied nach einer der vorigen Formeln gefunden wird). Denn die Differenziation gibt sogleich

$\frac{\frac{1}{2}(2bdx+2cxdx)}{a^2+2bx+cx^2}$ oder $\frac{cxdx}{a^2+2bx+cx^2} + \frac{bdx}{a^2+2bx+cx^2}$.

35. Sey 1) $dy = \frac{xdx}{a^2+2bx+cx^2}$ zu integriren. Der Kürze wegen setze man den ganzen Nenner $= u$ oder $d.\lambda(a+2bx+cx^2)$ d. i. $\frac{2bdx+2cxdx}{u} = d.\lambda u$; so hat man hieraus

$\frac{xdx}{u} = \frac{1}{2c} \cdot udl u - \frac{b}{c} dx$, oder, durch u dividirt,

$\frac{xdx}{u} = \frac{1}{2c} \cdot dl u - \frac{b}{c} \cdot \frac{dx}{u}$; daher denn

$\int \frac{xdx}{u} = \frac{1}{2c} \cdot l u - \frac{b}{c} \int \frac{dx}{u}$.

Wenn folglich 2) in

$dy = \frac{(A+Bx)dx}{a^2+2bx+cx^2}$ der Nenner wieder $= u$ gesetzt wird, so ist

$y = A \int \frac{dx}{u} + B \int \frac{xdx}{x}$, wo beide Integrale nach den vorigen Formeln zu finden sind; oder man hat durch Reduktion

$y = \frac{B}{2c} l u + \frac{cA - bB}{c} \int \frac{dx}{u}$.

36. Um $dy = \frac{dx}{x(a^2+2bx+cx^2)}$ zu integriren, setze man den Faktor von $dx = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{a^2+2bx+cx^2}$

$= \frac{Aa^2+(Ac+B)x^2+(2ab+C)x}{x(a^2+2bx+cx^2)}$. Damit nun dieser Bruch jenem Faktor gleich sey, muß dessen Zähler $Aa^2+\ldots = 1$, folglich $Ac+B=0$, d. i. $B=-Ac$; eben so $C=-2Ab$ und $Aa^2=1$, demnach $A=\frac{1}{a^2}$; $C=\frac{-2b}{a^2}$ und $B=\frac{-c}{a^2}$ seyn. Unter dieser Voraussetzung geht die gegebene Gleichung in diese über:

$dy = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{dx}{x} - \frac{cxdx}{a^2(a^2+2bx+cx^2)} - \frac{2bdx}{a^2(a^2+2bx+cx^2)}$;

hievon sind die einzelnen Integrale:

1) $\frac{1}{a^2} lx$ oder $\frac{1}{2a^2} lx^2$;

2) $-\frac{1}{2a^2} l(a^2+2bx+cx^2) + \frac{b}{a^2} \int \frac{dx}{a^2+2bx+cx^2}$ (34.)

3) $-\frac{2b}{a^2} \int \frac{dx}{a^2+2bx+cx^2}$; also durch Reduktion

$$y = \frac{1}{2a^2}\lambda\frac{x^2}{a^2+2bx+cx^2} - \frac{b}{a^2}\int\frac{dx}{a^2+2bx+cx^2} + C,$$

wobei das letzte Glied nach 30. oder 31. gefunden wird.

57. In $dy = \frac{dx}{(a^2+2bx+cx^2)^n}$ den Nenner $= u^n$ gesetzt, ist

$$y = \frac{1}{2(n-1)(a^2c-b^2)}\cdot\left[\frac{b+cx}{u^{n-1}} + (2n-3)\int\frac{cdx}{u^{n-1}}\right] + C.$$

Denn setzt man im Differenzial auch $cx = z-b$, wodurch $x = \frac{z-b}{c}$; $dx = \frac{dz}{c}$ oder $cdx = dz$; $cx^2 = \frac{z^2-2bz+b^2}{c}$; $a^2+2bx+cx^2 = a^2 - \frac{b^2}{c} + \frac{z^2}{c}$ wird; so hat man

$$dy = \frac{\frac{1}{c}dz}{a^2 - \frac{b^2}{c} + \frac{z^2}{c}}.$$

Dieses Differenzial mit nr. 20 verglichen, daher $a^2 - \frac{b^2}{c}$ oder $\frac{a^2c-b^2}{c}$ dem dortigen a und $\frac{1}{c}$ dem dortigen b gleich gesetzt, und die Glieder des Integrals mit $\frac{1}{c}$ multiplizirt, hat man unter Beibehaltung von $u = a^2+2bx+cx^2$, was in jener Formel $a+bx^2$ ist,

$$y = \frac{1}{2(n-1)(a^2c-b^2)}\cdot\frac{z}{u^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)(a^2c-b^2)}\cdot\int\frac{dz}{u^{n-1}},$$

woraus durch Reduktion und Subst. für z und dz obiges angesetzte Integral folgt.

Bemerkung. Mehrere dieser Formeln lassen sich sowohl anders ableiten, als auch durch Kreisbogen darstellen. Wenn man nämlich in der Formel 14.

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\lambda\frac{a+bx}{a-bx}$$

statt x setzt $c+x$; so ist nun

$$(M)\quad \int\frac{dx}{a^2-b^2c^2-2b^2cx-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\lambda\frac{a+bc+bx}{a-bc-bx} + C.$$

Hierin der Kürze wegen $a^2 - b^2c^2 = \alpha$; $-2b^2c = \beta$; $b^2 = \gamma$ gesetzt, dann $b = \sqrt{\gamma}$; $c = \frac{-\beta}{2\gamma}$; $a = \frac{\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{2\sqrt{\gamma}}$ entwickelt, ist allgemein:

$$(N)\quad \int \frac{dx}{\alpha+\beta x-\gamma x^2} = \frac{1}{\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}} \lambda \frac{\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}+2\gamma x-\beta}{\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}-2\gamma x+\beta},$$

und für $-\gamma$ ist

$$(P)\quad \int \frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = \frac{1}{\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)}} \lambda \frac{\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)}-2\gamma x-\beta}{\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)}+2\gamma x+\beta}.$$

Nun ist der Nenner $\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}$; ferner ist eben jene Größe, als Glied des zweiten Bruches auch $= \frac{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}}{\sqrt{-1}}$, folglich wird durch Substitution und Reduktion die zweite Seite in (P)

$$= \frac{2}{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} \lambda \frac{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}+\sqrt{-1}(2\gamma x+\beta)}{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}-\sqrt{-1}(2\gamma x+\beta)}.$$

Stellt man sich hierin jedes Glied des letzten Bruches durch $\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}$ dividirt vor und setzt

$$\frac{2\gamma x+\beta}{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}} = \text{tang}\,\varphi,$$

d. i. gleich einem Winkel oder Bogen, dessen Tangente ist jene erste Größe; so hat man auch

$$\frac{2}{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-1}} \lambda \frac{1+\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}} = \frac{2}{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}} \cdot \varphi$$

(vermöge §. 148. Zus. 2. (α)); daher auch

$$(Q)\quad \int \frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = \frac{2}{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}} \text{arc. tang} \frac{2\gamma x+\beta}{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}}.$$

§. 153. Fortsetzung.

38. Wenn in $dy = \frac{M}{N} dx$ der Coefficient $\frac{M}{N}$ eine rationale Bruchfunktion von x, und der Exponent dieser Variablen im Zähler kleiner, als im Nenner ist; wenn überdieß die einfachen Faktoren des Nenners N bekannt sind; so zerlegt man, um zu integriren, den Bruch $\frac{M}{N}$ in Faktoren von der einfachen

Form: $\frac{A}{\alpha+\beta x}+\frac{B}{\gamma+\delta x}+\ldots$ Jeden dieser Brüche mit dx multiplizirt gedacht, hat man

$$\int\frac{M}{N}dx = A\cdot\int\frac{dx}{\alpha+\beta x}+B\int\frac{dx}{\gamma+\delta x}+\ldots=\frac{A}{\beta}\lambda(\alpha+\beta x)$$
$$+\frac{B}{\delta}\lambda(\gamma+\delta x)+\ldots+C \quad (\S.\ 152.\ \text{nr. } 9).$$

Das Zerlegen des Nenners N in seine einfachen Faktoren setzt voraus, daß man, $N=0$ gesetzt, nun die Wurzeln dieser Gleichung, oder doch wenigstens eine Wurzel, demnach einen einfachen Faktor, dargestellt durch $\alpha+\beta x$, finden könne. Durch diesen den Nenner N dividirt, enthält der Quotient das Produkt S aus den übrigen Faktoren, so daß N durch $(\alpha+\beta x).S$ ausgedrückt ist. Setzt man sonach durch Zerlegung $\frac{M}{N}=\frac{A}{\alpha+\beta x}+\frac{P}{S}$; so ist klar, daß, weil M von niedrigerer Dimension als N seyn soll, der Zähler A kein x enthalten könne, und daß eben so der Zähler P, von niedrigerer Dimension als S und eine ganze rationale Funktion von x seyn werde. Die vorige Gleichung gibt ferner

$$M = AS+P(\alpha+\beta x) \text{ oder } P=\frac{M-AS}{\alpha+\beta x}.$$

Der letzte Ausdruck ist ein Messen wegen P = einer ganzen rationalen Funktion. Setzt man daher $\alpha+\beta x$, als Faktor von $M-AS$, $=0$, folglich $x=-\frac{\alpha}{\beta}$ und substituirt diesen Werth in $M-AS$; so wird auch diese Größe $=0$ und der Zähler $A=\frac{M}{S}$, d. i. dadurch bestimmt, daß man in den Funktionen M und S den Werth $x=-\frac{\alpha}{\beta}$ substituirt. Auf gleiche Weise kann man auch den Zähler B bestimmen.

Derselbe Zweck wird auch bei Vermeidung jener Division, durch die S gefunden wird, so erreicht:

Aus $N = (\alpha+\beta x)S$ ist $S = \frac{N}{\alpha+\beta x}$, diesen Werth in $A = \frac{M}{S}$ substituirt, hat man $A = \frac{\alpha+\beta x}{N} . M$ unter der Voraussetzung, daß man wegen $\alpha+\beta x = 0$ überall $-\frac{\alpha}{\beta}$ statt x substituirte. Aber unter derselben Voraussetzung wird, weil auch N den Faktor $\alpha+\beta x$ enthält, $\frac{(\alpha+\beta x) . M}{N} = \frac{0}{0}$ d. i. A gleich dem Differenzialverhältnisse $\frac{d(\alpha+\beta x) . M}{d . N} = \frac{(\alpha+\beta x)dM+\beta M dx}{dN} = \frac{\beta M dx}{dN}$, weil für $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ das erste Glied im Zähler des vorigen Bruches verschwindet; d. i. man bestimmt A, wenn man nach aufgefundenem dN überall $-\frac{\alpha}{\beta}$ statt x setzt.

Beispiel. Sey $\frac{M}{N} = \frac{a+bx}{(\alpha+x)(\gamma+x)(\varepsilon+x)}$. Man hat in Beziehung auf $\alpha+x$ nun

$$A = \frac{M}{S} \text{ (wie oben)} = \frac{a+bx}{(\gamma+x)(\varepsilon+x)} = \frac{a-b\alpha}{(\gamma-\alpha)(\varepsilon-\alpha)},$$

indem man im vorigen Ausdrucke überall $-\alpha$ (wegen $\beta = 1$) statt x substituirt. Auf gleiche Weise wird in Beziehung auf den Faktor $\gamma+x$ des Nenners N ein Bruch

$$B = \frac{a+b\gamma}{(\alpha-\gamma)(\varepsilon-\gamma)}, \text{ und } C = \frac{a-b\varepsilon}{(\alpha-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)}$$

in Beziehung auf $\varepsilon+x$ erhalten. Die gegebene Bruchfunktion ist also in die drei einfachen Brüche

$$\frac{A}{\alpha+x} + \frac{B}{\gamma+x} + \frac{C}{\varepsilon+x}$$

zerlegt, in welchen A, B, C die vorhin angezeigten Werthe haben.

Sey nun speziell: $\frac{M}{N} = \frac{1+x^2}{1+2x-3x^2+4x^3-4x^4}$. Den Nenner $= 0$ gesetzt, findet man $x = 1$ als eine Wurzel der Gleichung; daher ist $1-x$ ein Faktor von N. (Vergl. oben „Höhere Algebra“). Diesen mit $\alpha+\beta x$ verglichen, ist jetzt

$\alpha = 1$ und $\beta = -1$. Ohne nun hier den Quotienten $S = \frac{N}{1-x}$ durch Division zu suchen, bestimmt man $A = \frac{\beta M.dx}{dN} = \frac{-M.dx}{dN}$ dadurch, daß man vorerst N differenziirt; man findet $dN = (2 - 6x + 12x^2 - 16x^3)dx$. In diesem Ausdrucke statt x gesetzt $-\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{-1} = +1$; wird $A = \frac{-2}{-8} = +\frac{1}{4}$.

§. 154. Fortsetzung.

39. Wenn in $dy = \frac{M}{N}dx$ der Coefficient $\frac{M}{N}$ die Potenz des einfachen Faktors $\alpha + \beta x$ enthält; so wird er in Brüche von der Form

$$\frac{A}{(\alpha+\beta x)^n} + \frac{B}{(\alpha+\beta x)^{n-1}} + \frac{C}{(\alpha+\beta x)^{n-2}} + \ldots$$

zerlegt. Addirt man zu denselben noch die aus den übrigen Faktoren des Nenners entspringenden Brüche von der Form

$$\frac{\mathfrak{A}}{\gamma+\delta x} + \frac{\mathfrak{B}}{\varepsilon+\eta x} + \ldots,$$

deren Zähler $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ nach §. 153 bestimmt werden; so hat man

$$y = \int \frac{M}{N}dx = A\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x)^n} + B\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x)^{n-1}} + \ldots$$
$$+ \mathfrak{A}\int \frac{dx}{\gamma+\delta x} + \mathfrak{B}\int \frac{dx}{\varepsilon+\eta x} + \ldots,$$

wo die Integrale derjenigen Brüche, in deren Nennern die Potenzen von $\alpha+\beta x$ vorkommen, nach §. 145. nr. 5". gefunden werden, indem man statt $A\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x)^n}$ schreibt $A.\int dx(\alpha+\beta x)^{-n}$; u. s. w.

Um die Zähler A, B, C, ... zu bestimmen, sey z. B. $N = (\alpha+\beta x)^n.S$, wo S wieder das Produkt aus den übrigen Faktoren, deren keiner folglich $= \alpha+\beta x$ ist, bedeutet. Ferner sey P eine rationale Funktion von x; so hat man, wie im §. 155 durch Zerlegung

$\frac{M}{N} = \frac{A}{(\alpha+\beta x)^4} + \frac{B}{(\alpha+\beta x)^3} + \frac{C}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{D}{\alpha+\beta x} + \frac{P}{S}$, woraus

$$P = \frac{M - AS - BS(\alpha+\beta x) - CS(\alpha+\beta x)^2 - DS(\alpha+\beta x)^3}{(\alpha+\beta x)^4}$$

$$= \frac{S\left(\frac{M}{S} - A - B(\alpha+\beta x) - C(\alpha+\beta x)^2 - D(\alpha+\beta x)^3\right)}{(\alpha+\beta x)^4}$$

Weil nun P eine ganze Funktion iſt, aber S keinen $\alpha+\beta x$ als Faktor enthält; ſo muß $(\alpha+\beta x)^4$ ein Maß des Zählers $\left(\frac{M}{S} - A - \text{etc.}\right) = Z$ ſeyn; d. i. Z muß den Faktor $\alpha+\beta x$ viermal enthalten, folglich werden auch die 3 Differenzialquotienten $\frac{dZ}{dx}$; $\frac{d^2Z}{dx^2}$ und $\frac{d^3Z}{dx^3}$ (vergl. §. 149.) noch denſelben Faktor $\alpha+\beta x$ haben. Setzt man daher dieſen Faktor wieder $= 0$, mithin $x = \frac{-\alpha}{\beta}$; ſo verſchwindet für dieſen Werth nicht bloß die Funktion Z, ſondern auch jeder jener Differenzialquotienten; d. i. für $x = \frac{-\alpha}{\beta}$ hat man, $\frac{M}{S}$ durch W bezeichnet,

1) Z oder $W - A - B(\alpha+\beta x) - (\alpha+\beta x)^2 - D(\alpha+\beta x)^3 = 0$;

2) $\frac{dZ}{dx}$ oder $\frac{dW}{dx} - B\beta - 2C(\alpha+\beta x)\beta - 3D(\alpha+\beta x)^2\beta = 0$;

3) $\frac{d^2Z}{dx^2}$ oder $\frac{d^2W}{dx^2} - 2C\beta^2 - 3.2D(\alpha+\beta x)D\beta^2 = 0$;

4) $\frac{d^3Z}{dx^3}$ oder $\frac{d^3W}{dx^3} - 3.2.1.D\beta^3 = 0$.

Und hierin $-\frac{\alpha}{\beta}$ ſtatt α ſubſtituirt, iſt

1') $W - A = 0$, daher $A = W$;

2') $\frac{dW}{dx} - \beta B = 0$, daher $B = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{dW}{dx}$;

3') $\frac{d^2W}{dx^2} - 2.1C\beta^2 = 0$, daher $C = \frac{1}{1.2\beta^2} \cdot \frac{d^2W}{dx^2}$;

4') $\frac{d^3W}{dx^3} - 3.2.1D\beta^3 = 0$, daher $D = \frac{1}{1.2.3\beta^3} \cdot \frac{d^3W}{dx^3}$.

Hieraus erhellt zugleich das Geſetz des Fortganges dieſer Größen, weßwegen ſich allgemein die Zähler der aus $(\alpha+\beta x)^n$ entſtehenden Brüche

$$\frac{A}{(\alpha+\beta x)^n} + \frac{B}{(\alpha+\beta x)^{n-1}} + \cdots + \frac{H}{\alpha+\beta x}$$

entwickeln lassen, und z. B. der Zähler H des letzten Bruches für $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ seyn wird $H = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)\beta^{n-1}} \cdot \frac{d^nW}{dx^n}$.

Beispiel. Sey $\frac{M}{N} = \frac{a+x}{(\alpha+x)^5(\gamma+x)}$, wo also $n=5$; $W = \frac{M}{S} = \frac{a+x}{\gamma+x}$; $\beta = 1$, daher $-\frac{\alpha}{\beta} = -\alpha$ ist. Wegen $n=5$ sind ferner die 4 Differenzialquotienten folgende:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\gamma-a}{(\gamma+x)^2}; \quad \frac{d^2W}{dx^2} = -\frac{2(\gamma-a)}{(\gamma+x)^3}; \quad \frac{d^3W}{dx^3} = \frac{2.3(\gamma-a)}{(\gamma+x)^4};$$

$$\frac{d^4W}{dx^4} = -\frac{6.4(\gamma-a)}{(\gamma+x)^5}.$$

Hierin $-\alpha$ statt x gesetzt, sind die Werthe der Zähler nach obigen Formeln:

$$A = W = \frac{a-\alpha}{\gamma-\alpha}; \quad B = \frac{dW}{dx} = \frac{\gamma-a}{(\gamma-\alpha)^2}; \quad C = -\frac{\gamma-a}{(\gamma-\alpha)^3};$$

$$D = \frac{\gamma-a}{(\gamma-\alpha)^4}; \quad E = -\frac{\gamma-a}{(\gamma-\alpha)^5}.$$

Da endlich der Zähler P des aus dem Faktor $\gamma+x$ entstehenden Bruches eben das ist, was unter nr. 38 (§. 153) im Beispiele der Zähler A in Beziehung auf $\alpha+x$ ist; so hat man, wenn man setzt $-\gamma$ statt α, und $(a-\gamma)^5$ statt der übrigen Faktoren, $P = \frac{a-\gamma}{(a-\gamma)^5}$. Demnach kennt man die Werthe der Zähler A, B, ... der Brüche, in welche sich die Bruchfunktion $\frac{M}{N}$ zerfällen läßt, nämlich der Brüche:

$$\frac{A}{(\alpha+x)^5} + \frac{B}{(\alpha+x)^4} + \cdots \frac{E}{\alpha+x} + \frac{P}{\gamma+x}.$$

Zusatz 1. Ist die höchste Potenz im Zähler M größer, als im Nenner N; so sondert man die höheren Potenzen durch Division ab. Es wird hiedurch z. B.

$$\frac{M}{N} = \frac{x^{12}}{x^5-1} = x^7+x^2+\frac{x^2}{x^5-1}, \text{ folglich}$$

$$\int\frac{M}{N}dx = \int x^7dx + \int x^2dx + \int\frac{x^2dx}{x^5-1},$$

welches letzte Integral nach der unten folgenden Formel nr. 40 gefunden wird.

Zusatz 2. Die gegebenen Vorschriften gelten auch, wenn im Nenner der gebrochenen Funktion $\frac{M}{N}$ sich imaginäre einfache Faktoren von der Form:

$x-a(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})$ und $x-a(\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1})$

vorfinden, deren Produkt den möglichen Trinomialfaktor $x^2-2ax\cdot\cos\varphi+a^2$ geben (indem $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$ und $\sin\varphi^2+\cos\varphi^2=1$).

Denn man setze, $\frac{M}{N}$ sey in die einfachen Brüche

$$\frac{A}{x-a(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})} + \frac{B}{x-a(\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1})}$$

zerlegt, und es sollen A und B bestimmt werden; so hat man nach §. 153 erstens $A=\frac{\beta M\cdot dx}{dN}$ oder (weil β hier $=1$) $M:\frac{dN}{dx}=\frac{M}{L}$, indem man der Kürze wegen $\frac{dN}{dx}=L$ setzt. In diesem Ausdrucke nun $-\frac{\alpha}{\beta}$, d. i. in unserem Falle $-(-a(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}))$ statt x substituirt, ist A bestimmt.

Nimmt man hiebei an, daß in einer der Größen M, L als ganzer und rationaler Funktionen von x, ein Glied x^μ vorkomme; so verwandelt sich dieses durch die vorige Substitution in

$a^\mu(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})^\mu = a^\mu(\cos\mu\varphi+\sin\mu\varphi\sqrt{-1})$ (§. 148. 7. (8)

d. i. in einen möglichen Theil $a^\mu\cos\mu\varphi$ und einen imaginär $a^\mu\sin\mu\varphi\sqrt{-1}$. Es zerfallen demnach M und L, aus wieviel Potenzen von x sie auch bestehen mögen, in mögliche und u mögliche Theile. Bezeichnet man daher die möglichen The mit M', L', und die unmöglichen mit $m\sqrt{-1}$ und $l\sqrt{-1}$; so i

$A = \frac{M'+m\sqrt{-1}}{L'+l\sqrt{-1}}$; auf gleiche Weise wird $B = \frac{M'-m\sqrt{-1}}{L'-l\sqrt{-1}}$, indem sich der Nenner des obigen Bruches, dessen Zähler B ist, von dem Nenner des ersten Bruches nur durch $-\sqrt{-1}$ unterscheidet. — Die Summe eben dieser 2 Brüche ist

$$(S)\ldots \quad \frac{(A+B)x-(A+B)a\cos\varphi+(A-B)a\sin\varphi\sqrt{-1}}{x^2-2ax\cos\varphi+a^2}.$$

Aber nach dem Vorigen ist

$$A+B=\frac{2(M'L'+ml)}{L'^2+l^2}\ (=\mathfrak{A}) \text{ und } A-B=\frac{2(mL'-M'l)\sqrt{-1}}{L'^2+l^2},$$

daher $(A-B)a\sin\varphi\sqrt{-1} = -\frac{2(mL'-M'l)a.\sin\varphi}{L'^2+l^2}$. Setzt man demnach $\frac{-(M'L'+ml)\cos\varphi+(M'l-mL')\sin\varphi}{L'^2+l^2}.2a=\mathfrak{B}$; so hat man statt (S) den Bruch

$$\frac{\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}}{x^2-2ax\cos\varphi+a^2} \text{ (von bekannter Form)},$$

dessen Integral nach §. 152. nr. 35. 2) gefunden wird, indem man in unserem Falle $c=1$; $2b=-2a.\cos\varphi$; $A=\mathfrak{B}$ und $B=\mathfrak{A}$ hat. Also das gesuchte Integral:

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\,\lambda u+(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}.a\cos\varphi)\int\frac{dx}{u}, \text{ oder}$$

(vermöge der Formel (Q) in der Bemerk. zu §. 152)

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}.\lambda(x^2-2ax.\cos\varphi+a^2)+\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{A}a.\cos\varphi}{a.\sin\varphi}\,\text{arc.tang}\,\frac{x-a\cos\varphi}{a.\sin\varphi},$$

indem $\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}$ num $=2a.\sin\varphi$ ist.

§. 155. Fortsetzung. Die Auffindung folgender Integrale kann als nächste Anwendung des in den §§. 153. 154 Gesagten betrachtet werden.

40. Sey $dy=\frac{x^m dx}{x^n-a^n}$ (wo $M=x^m$ und $N=x^n-a^n$) zu integriren.

Um die einfachen Faktoren des Nenners zu erkennen, setze man wieder $x^n-a^n=0$, gerade so, als wolle man die Wur-

zeln dieſer Gleichung finden. Man hat denn $\frac{x^n}{a^n} = 1$. Wenn man ferner im §. 148. nr. 7 (1) ſtatt φ überhaupt ein Vielfaches des Halbkreiſes π, d. i. allgemein $\varphi = k\pi$ ſetzt, ſo daß $\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} k\pi = 0$ wird; ſo gibt die Formel

$$2k\pi\sqrt{-1} = \lambda\frac{1}{1} = \lambda 1, \text{ d. i. } e^{2k\pi\sqrt{-1}} = 1 = \frac{x^n}{a^n}.$$

Hieraus iſt $\frac{x}{a} = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{e^{2k\pi\sqrt{-1}}} = e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}$, folglich

$$x = ae^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}} = a\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ (ebend. (9)).}$$

Weil ferner auch k ſo genommen werden kann, daß $+\cos\frac{2k\pi}{n}$ bleibt, aber $-\sin\frac{2k\pi}{n}$ geſetzt werden muß, folglich ein zweiter Werth von x iſt

$$x = a\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}\right);$$

ſo iſt (vermöge der Theorie der Gleichungen) klar, daß der Ausdruck $x^n - a^n$ die einfachen Faktoren von der Form:

$$x - a\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ und } x - a\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

enthalte, und demnach gleich ſey dem Zwanzigen Produkte (durch Reduktion)

$$x^2 - 2ax\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2,$$

worin man ſtatt 2k jede gerade Zahl $< n$ ſetzen kann.

Dieſes vorausgeſchickt, können nach §. 154. Zuſ. 2 die Werthe von A und B leicht gefunden werden, indem man wieder $2k\pi = \varphi$ ſetzt. Es iſt nämlich

1) $A = \frac{M}{L} = \frac{x^m}{nx^{n-1}}\left(\text{indem } L = \frac{dN}{dx} \text{ (und hier)} = nx^{n-1}\right)$

$= \frac{1}{nx^{n-m-1}}$. In dieſem Ausdrucke, wie im cit. Zuſ. 2 bemerkt iſt, ſtatt x geſetzt $a(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$, iſt

$$A = \frac{1}{na^{n-m-1}(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{n-m-1}}, \text{ oder (wie oben)}$$

$$A = \frac{1}{na^{n-m-1}(\cos(n-m-1)\varphi + \sin(n-m-1)\varphi.\sqrt{-1})}.$$

Aber $\cos(n-m-1)\varphi = \cos\left(2k\pi - \frac{(m+1)2k\pi}{n}\right) = \cos\delta$, wenn man $\frac{(m+1)2k\pi}{n}$ gleich δ setzt; und eben so $\sin(n-m-1)\varphi = -\sin\delta$ (vergl. §. 5. Zus. 1); daher auch

$$A = \frac{1}{na^{n-m-1}\cos\delta - na^{n-m-1}\sin\delta.\sqrt{-1}}.$$

Dieses mit $A = \frac{M' + m\sqrt{-1}}{L' + l\sqrt{-1}}$ verglichen, ist $M' = 1$; $m = 0$; $L' = na^{n-m-1}\cos\delta$ und $l = -na^{n-m-1}\sin\delta$; folglich wird nun

2) $\mathfrak{A}\left(= \frac{2(M'L'+ml)}{L'^2+l^2}\right) = \frac{2L'}{L'^2+l^2} = \frac{2.a^{n-m-1}\cos\delta}{n^2.a^{2(n-m-1)}(\cos\delta^2+\sin\delta^2)}$

$$= \frac{2.\cos\delta}{na^{n-m-1}}.$$

3) wird nun $\mathfrak{B} = \frac{-2aL'.\cos\varphi + 2a.l.\sin\varphi}{L'^2+l^2}$; daher

4) $$\frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{A}a.\cos\varphi}{a.\sin\varphi} = \frac{-2a.L'\cos\varphi + 2al\sin\varphi + 2aL'\cos\varphi}{a.\sin\varphi(L'^2+l^2)}$$

$$= \frac{2l}{L'^2+l^2} = -\frac{2\sin\delta}{na^{n-m-1}}.$$

Es entsteht also aus jedem Trinomialfaktor des Nenners $x^n - a^n$ vermöge der Formel am Ende des Zus. 2. §. 154 das Integral:

$$(T)..\frac{2\cos\delta}{na^{n-m-1}}.\tfrac{1}{2}\lambda(x^2 - 2ax.\cos\varphi + a^2) - \frac{2\sin\delta}{na^{n-m-1}}\text{arc.t.}\frac{x - a\cos\varphi}{a.\sin\varphi} + C.$$

Sucht man diese Konstante C unter der Voraussetzung, daß für $x = 0$ auch das Integral $= 0$ werde, und setzt der Kürze wegen

$$\frac{2.\cos\delta}{na^{n-m-1}} = q \text{ und } \frac{2\sin\delta}{na^{n-m-1}} = q'; \text{ so entwickelt man}$$

$$C = -q.\tfrac{1}{2}\lambda a^2 + q'.\text{arc.tang}\frac{-\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Macht

Macht man ferner $\text{arc.tang}\frac{-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\alpha$ und $\text{arc.tang}\frac{x-a\cos\varphi}{a.\sin\varphi}=\beta$, so daß also

$$\text{tang}\,\alpha=\frac{-\cos\varphi}{\sin\varphi}\text{ und }\frac{x-a.\cos\varphi}{a.\sin\varphi}=\text{tang}\,\beta\text{ ist;}$$

so geht durch Addition dieser Konstante und durch Reduktion obiges Integral in dieses über:

$$(U)\ldots\ q.\tfrac{1}{2}\lambda\frac{x^2-2ax.\cos\varphi+a^2}{a^2}+q'(\alpha-\beta).$$

Aber nach §. 18. nr. 86 ist

$$\text{tang}\,(\alpha-\beta)=\frac{\text{tang}\,\alpha-\text{tang}\,\beta}{1+\text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\beta}\text{ (oder durch Substit. obiger Werthe)}=\frac{-x}{a.\sin\varphi}\cdot\frac{a.\sin\varphi^2}{a-x.\cos\varphi}=-\frac{x.\sin\varphi}{a-x.\cos\varphi},\text{ daher}$$

umgekehrt $(\alpha-\beta)=-\text{arc. tang.}\frac{x.\sin\varphi}{a-x.\cos\varphi}$; demnach das Integral (U) für $x=0$ dieses:

$$\frac{2.\cos\delta}{na^{n-m-1}}.\tfrac{1}{2}\lambda\frac{x^2-2ax\cos\varphi+a^2}{a^2}-\frac{2.\sin\delta}{na^{n-m-1}}.\text{arc.tang.}\frac{x.\sin\varphi}{a-x.\cos\varphi},$$

worin statt δ und φ obige Werthe zu setzen sind.

41. Sey eben so $\frac{x^m dx}{x^n+a^n}$ zu integriren.

Hier ist $x^m=M$ und $N=x^n+a^n$, und aus $x^n+a^n=0$ hat man $\frac{x^n}{a^n}=-1$, daher $\frac{x}{a}=-1^{\frac{1}{n}}$.

Nach §. 184. nr. 7. (2) ist

$$\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\lambda\frac{\cot\varphi+\sqrt{-1}}{\cot\varphi-\sqrt{-1}}.$$

Allein für $\varphi=\frac{1}{2}\pi(=90^0)$, oder $=\frac{3}{2}\pi$ oder allgemein für $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ verschwindet die Cotangente (vgl. §. 7), folglich ist

$$\pm(2k+1)\pi.\sqrt{-1}=\lambda\frac{\pm\sqrt{-1}}{\mp\sqrt{-1}}=\lambda-1,\text{ also auch}$$

$$-1=e^{\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}}\text{ und }x=a\times-1^{\frac{1}{n}}=ae^{\pm\frac{2k+1}{n}\pi\sqrt{-1}}$$

$$=a\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi\pm\sqrt{-1}.\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)\text{ (§. 148. nn. 9 und 10)}$$

Daher hat denn der Ausdruck $x^n + a^n$ die einfachen Faktoren von der Form:

$$x - a\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right) \text{ und}$$

$$x - a\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi - \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right);$$

folglich auch die Trinomialfaktoren von der Form:

$$x^2 - 2ax\,.\,\cos\frac{2k+1}{n}\pi + a^2.$$

Jeder dieser Faktoren hat, wie man auf gleiche Weise, wie unter nr. 40 findet, ein Integral

$$= -\frac{2\cos\delta}{na^{n-m-1}}\cdot\tfrac{1}{2}\lambda\frac{x^2-2ax\,.\cos\varphi+a^2}{a^2} + \frac{2\sin\delta}{na^{n-m-1}}\text{arc.t.}\frac{x\,.\sin\varphi}{a-x\cos\varphi},$$

wo nun $\varphi = \frac{2k+1}{n}\pi$ und $\delta = \frac{(m+1)(2k+1)\pi}{n}$ ist, und für $2k+1$ jede ungerade Zahl $< n$ gesetzt werden kann. Ist n in $a^n + x^n = 0$ ungerade; so hat diese Größe auch den einfachen Faktor (oder die Wurzel) $x + a$ (vergl. §. 56. 2). Aus diesem entspringt das noch zu dem vorigen zu addirende Integral:

$$\frac{2}{na^{n-m-1}}\cdot\tfrac{1}{2}\lambda\frac{x+a}{a}.$$

Zusatz. Ist $dy = \frac{dx}{x^m(a^n+x^n)}$ zu integriren, und man setzt $x = \frac{1}{u}$, daher $dx = \frac{-du}{u^2} = -u^{-2}.du$; so hat man

$$dy = -\frac{u^{-2}du}{\frac{1}{u^m}\left(\frac{a^n u^n+1}{u^n}\right)} = \frac{-u^{m+n-2}.du}{a^n u^n+1}$$

$$= -\frac{u^{m+n-2}.du.a^{-n}}{(a^n u^n+1)a^{-n}} = -\frac{u^{m+n-2}.du.a^{-n}}{u^n+a^{-n}}$$

$$= -b^n\,.\,\frac{u^{m+n-2}.du}{b^n+u^n}, \text{ wo } b^n = a^{-n} \text{ ist.}$$

Hievon findet man das Integral nach §. 154. Zus. 1, und nach nr. 41.

Eben so läßt sich $dy = \frac{dx}{x^m(x^n-a^n)}$ auf $dy = b^n\,.\,\frac{u^{m+n-2}.du}{u^n-b^n}$ zurückführen.

Auch kann man $\frac{x^m dx}{\alpha+\beta x^n}$ wie $\frac{x^m dx}{a^n+x^n}$ integriren, indem man β von x^n durch Division trennt, d. i. $\frac{1}{\beta}\cdot\frac{x^m dx}{\frac{\alpha}{\beta}+x^n}$ und demnach $\frac{\alpha}{\beta}=a^n$ setzt.

§. 156. Fortsetzung.

Es gibt keine allgemeine Regel, jedes irrationale Differenzial von zusammengesetzter Form rational zu machen, um es integriren zu können. Wie man in den meisten dieser Fälle denn doch zum Ziele kommen kann, wollen wir an folgenden Aufgaben nachweisen:

a) Sey $dy=\frac{\alpha\sqrt{x}+\beta\sqrt[3]{x^2}}{a\sqrt[4]{x^4}+bx}dx=\frac{ax^{\frac{1}{2}}+\beta x^{\frac{2}{3}}}{ax^{\frac{4}{3}}+bx}dx$

zu integriren.

Durch Reduktion der Exponenten von x auf einerlei kleinsten Nenner wird

$$dy=\frac{ax^{\frac{15}{30}}+\beta x^{\frac{20}{30}}}{ax^{\frac{24}{30}}+bx^{\frac{30}{30}}}dx.$$

Setzt man nun $x^{\frac{1}{30}}=u$ oder $x=u^{30}$, daher $du=30.u^{29}.du$; so verwandelt sich jene Gleichung in

$dy=\frac{\alpha u^{15}+\beta u^{20}}{au^{24}+bu^{30}}\cdot 30.u^{29}.du$, und durch u^{24} dividirt,

in $dy=\frac{\beta u^{25}+\alpha u^{20}}{bu^6+a}\cdot 30.du$, oder durch wirkl. Division

in $dy=\left[\frac{\beta}{b}u^{19}+\frac{\alpha}{b}u^{14}-\frac{\alpha\beta}{b^2}u^{13}-\frac{a\alpha}{b^2}u^8+\frac{a^2\beta}{b^3}u^7\right.$

$\left.+\frac{a^2\alpha}{b^3}u^2-\frac{a^3\beta}{b^4}u\right]30.du+\left[\frac{a^4\beta}{b^4}u-\frac{a^3\alpha}{b^3}u^2\right]:(bu^6+a).$

Stellt man sich jedes dieser Glieder mit du multiplizirt vor und setzt der Kürze wegen statt der Coefficienten der Potenzen von u mit ihren Zeichen die Buchstaben A, B, C, ...; so ist das Integral

$$y = 30\left(\frac{Au^{20}}{20} + \frac{Bu^{15}}{15} + \frac{Cu^{14}}{14} + \frac{Du^{9}}{9} + \frac{Eu^{8}}{8} + \frac{Fu^{5}}{5} + \frac{Gu^{2}}{2}\right) + 30 \cdot \int \frac{Hu + Ku^{2}}{bu^{6} + a} \cdot du,$$

welches letzte Integral nach §. 153 gefunden wird.

b) Eben so, wenn in $\frac{M}{N} dx$ sowohl M als N eine irrationale Funktion von $\frac{a+bx}{f+gx}$ ist, die gebrochenen Exponenten aber mit einerlei Nenner gegeben oder auf solchen reducirt sind; wenn z. B.

$$M = A \cdot \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{\alpha}{m}} + B \cdot \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{\beta}{m}} + \ldots$$

$$\text{und } N = \mathfrak{A} \cdot \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{\eta}{m}} + \mathfrak{B} \cdot \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{\delta}{m}} + \ldots$$

ist, und man setzt $\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{m}} = u$ oder $\frac{a+bx}{f+gx} = u^{m}$, woraus $x = \frac{a - fu^{m}}{gu^{m} - b}$ und daher durch Reduktion $dx = \frac{m(bf - ag)u^{m-1} \cdot du}{(gu^{m} - b)^{2}}$; so hat man das rationale Differenzial:

$$dy = \frac{Au^{\alpha} + Bu^{\beta} + \ldots}{\mathfrak{A}u^{\eta} + \mathfrak{B}u^{\delta} + \ldots} \cdot \frac{m(bf - ag)u^{m-1} \cdot du}{(gu^{m} - b)^{2}},$$

dessen Integral nach einer der obigen Formeln gefunden wird.

Beispiel. Sey $dy = \frac{dx}{x}\sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}}$. Setzt man $\frac{a+bx}{f+gx} = u^{2}$ und entwickelt hieraus $x = \frac{a - fu^{2}}{gu^{2} - b}$, folglich $dx = \frac{2(bf - ag)u\,du}{(gu^{2} - b)^{2}}$; so ist nun

$$dy = \frac{2(bf - ag)u^{2}du}{(a - fu^{2})(gu^{2} - b)} = \frac{2(ag - bf)u^{2}du}{(fu^{2} - a)(gu^{2} - b)}.$$

Setzt man die Bruchfunktion $\frac{u^{2}}{(fu^{2} - a)(gu^{2} - b)} = \frac{A}{fu^{2} - a} + \frac{B}{gu^{2} - b}$, so muß (diese Brüche auf einerlei Nenner gebracht)

$u^2 = u^2(Ag + fB) - Ab - aB$, demnach

(1) $-Ab - aB = 0$ und (2) $Ag + fB = 1$ seyn.

Aus (1) ist $A = \frac{-aB}{b}$ und $B = \frac{-Ab}{a}$, daher durch Substitution in (2) $\frac{-aBg}{b} + fB = 1$ und hieraus $B = \frac{b}{bf-ag} = -\frac{b}{ag-bf}$. Eben so ist $Ag - \frac{fAb}{a} = 1$, daher $A = \frac{a}{ag-bf}$. Man hat folglich

$$dy = \frac{2a.du}{fu^2-a} - \frac{2b.du}{gu^2-b} = -\frac{2a.du}{a-fu^2} + \frac{2b.du}{b-gu^2}, \text{ und}$$

$$y = 2b\int\frac{du}{b-gu^2} - 2a\int\frac{du}{a-fu^2}. - \text{ Setzt man in}$$

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\lambda\frac{a+bx}{a-bx} \text{ (§. 152. nr. 14)}$$

nun $a^2 = b$ oder $a = \sqrt{b}$ und $b^2 = g$ oder $b = \sqrt{g}$; so ist

$$2b\int\frac{du}{b-gu^2} = \frac{2b}{2\sqrt{bg}}\lambda\frac{\sqrt{b}+u\sqrt{g}}{\sqrt{b}-u\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{b}{g}}\lambda\frac{\sqrt{b}+u\sqrt{g}}{\sqrt{b}-u\sqrt{g}}, \text{ und}$$

$$2a\int\frac{du}{a-fu^2} = \sqrt{\frac{a}{f}}\lambda\frac{\sqrt{a}+u\sqrt{f}}{\sqrt{a}-u\sqrt{f}}. \text{ Also das Integral:}$$

$$y = \sqrt{\frac{b}{g}}\lambda\frac{\sqrt{b}+u\sqrt{g}}{\sqrt{b}-u\sqrt{g}} - \sqrt{\frac{a}{f}}\lambda\frac{\sqrt{a}+u\sqrt{f}}{\sqrt{a}-u\sqrt{f}}, \text{ worin noch}$$

$\sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}}$ statt u zu substituiren ist.

Bemerkung 1. Gilt $-g$, wodurch das erste Glied jenes Integrals wird $\sqrt{-\frac{b}{g}}.\lambda\frac{\sqrt{b}+u\sqrt{-g}}{\sqrt{b}-u\sqrt{-g}}$, oder, was dasselbe,

$2\sqrt{\frac{b}{g}}.\frac{1}{2\sqrt{-1}}\lambda\frac{\sqrt{b}+u\sqrt{g}\sqrt{-1}}{\sqrt{b}-u\sqrt{g}\sqrt{-1}}$; so vermeidet man diesen imaginären Ausdruck, wenn man allgemein setzt tang $\varphi = \frac{B}{C}$ oder $\varphi = \text{arc. tang}\frac{B}{C}$. Dann ist nach §. 148. Zus. 2.

$$\text{arc. tang}\frac{B}{C} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\lambda\frac{C+B\sqrt{-1}}{C-B\sqrt{-1}}.$$

Läßt man nun C die Größe $\sqrt{b}$ und B die Größe $u\sqrt{g}$ bedeuten; so geht jener imaginäre Ausdruck über in

$$2\sqrt{\frac{b}{g}} \cdot \text{arc. tang } u\sqrt{\frac{g}{b}}.$$

Bemerkung 2. Hätte man $dy = \frac{dx}{x}\sqrt{(a+bx)}$, wo nun obiges $f=1$ und $g=0$ ist; so wäre

$$dy = 2du - \frac{2a.du}{a-u^2} \text{ und } y = 2u - \sqrt{a}.\lambda\frac{\sqrt{a}+u}{\sqrt{a}-u},$$

oder für $-a$ wäre $y = 2u - 2\sqrt{a}.\text{arc. tang}\frac{u}{\sqrt{a}}$, wo statt u zu setzen ist $\sqrt{(bx-a)}$.

c) Sey $dy = x^n dx\sqrt{(a+bx)^{\frac{\mu}{\nu}}}$ allgemein zu integriren, wo jedoch n = einer ganzen Zahl seyn soll.

Man setze $(a+bx)^{\frac{1}{\nu}} = u$ oder $a+bx = u^\nu$. Dann ist $x = \frac{u^\nu - a}{b}$; $x^n = \frac{(u^\nu-a)^n}{b^n}$; $dx = \frac{\nu}{b}u^{\nu-1}.du$, daher

$$dy = \frac{\nu(u^\nu-a)^n u^{\mu+\nu-1}.du}{b^{n-1}}, \text{ d. i. rational.}$$

§. 157. Fortsetzung.

42. Das Integral von $dy = \frac{a^x.dx}{x}$ kann nur mit Hülfe einer unendlichen Reihe, wie folgt, gefunden werden.

$y = a^x$ oder $\lambda y = x\lambda a$ gesetzt, ist $\frac{dy}{y} = dx\lambda a$ (§. 146. nr. 5), oder $dy = a^x dx\lambda a$ und $\frac{dy}{dx} = a^x\lambda a$; ferner $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(a^x\lambda a)}{dx}$ $= a^x(\lambda a)^2$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d(a^x\lambda a^2)}{dx} = a^x.\lambda a^3$ (oder $a^x.(\lambda a)^3$), u. s. w. (Vergl. §. 149. a). Man hat daher nach dem Taylor'schen Lehrs. (§. 149. Zus.)

$$Y \text{ oder } a^{x+k} = a^x\left(1 + \frac{k\lambda a}{1} + \frac{k^2.\lambda a^2}{1.2} + \frac{k^3.\lambda a^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

oder, durch a^x dividirt,

$a^k = 1 + k.\lambda a + \frac{k^2.\lambda a^2}{1.2} + \ldots$, oder, x statt k gesetzt,

$$(\psi)\ldots\ a^x = 1 + x.\lambda a + \frac{x^2.\lambda a^2}{1.2} + \frac{x^3.\lambda a^3}{1.2.3} + \ldots$$

Jedes Glied dieser Reihe mit $\frac{dx}{x}$ multiplizirt und integrirt, ist, weil $\frac{dx}{x} = \lambda x$,

$$\int\frac{a^x dx}{x} = \lambda x + x.\lambda a + \frac{x^2.\lambda a^2}{1.2.2} + \frac{x^3.\lambda a^3}{1.2.3.3}\ldots + \frac{x^m.\lambda a^m}{1.2\ldots(m-1)m^2}.$$

43. Das Integral $\int Xa^x.dx$ zu finden, wo X eine Funktion von x bedeutet.

Es ist überhaupt $\int XdY + \int YdX = XY$, daher $\int YdX = XY - \int XdY$, wobei vorausgesetzt wird, daß XdY von einfacherer Form, folglich leichter integrirbar sey, als YdX. Setzt man nun $dY = a^x.dx$, sohin (nach §. 152. nr. 26) $Y = \frac{a^x}{\lambda a}$; so hat man

1) $\int XdY$ oder $\int a^x dx.X = \frac{a^x X}{\lambda a} - \frac{1}{\lambda a}\int a^x dx$. Setzt man denn $dX = Pdx$; so ist

2) $\int X.a^x.dx = \frac{a^x.X}{\lambda a} - \frac{1}{\lambda a}\int Pa^x dx$, wo vielleicht $Pa^x dx$ wieder leichter, als $Xa^x dx$, integrirbar und $P = \frac{dX}{dx}$ ist. Macht man weiter $dP = Qdx$, so ist durch ähnliche Reduktion

$$\int Pa^x dx = \frac{a^x P}{\lambda a} - \frac{1}{\lambda a}\int Qa^x dx,$$

wo abermals $\int Qa^x dx$ von einfacherer Form als $\int Pa^x dx$ angenommen wird. Durch Substitution dieses Werthes für $\int Pa^x dx$ in 2) hat man

$$3)\ \int Xa^x dx = \frac{a^x X}{\lambda a} - \frac{a^x P}{\lambda a^2} + \frac{1}{\lambda a^2}\int Qa^x dx,$$

$$= \frac{a^x}{\lambda a}\left(x - \frac{P}{\lambda a}\right) + \frac{1}{\lambda a^2}\int Qa^x dx.$$

Es erhellt, daß durch ähnliche fortgesetzte Reduktion, indem man $dQ = R.dx$; $dR = S.dx$; $dS = T.dx$, ... setzt, erhalten werde

$$4)\ \int Xa^x dx = \frac{a^x}{\lambda a}\left(X - \frac{P}{\lambda a} + \frac{Q}{\lambda a^2} - \frac{R}{\lambda a^3} + \frac{S}{\lambda a^4}\right) - \frac{1}{\lambda a^5}\int Ta^x dx,$$

wo denn die Funktionen von x, nämlich P, Q, R, ... durch fortgesetzte Differenziirung der ursprünglichen Funktion X entstehen. Wie nämlich $P = \frac{dX}{dx}$, oder $P.dx = dX$, folglich $d.Pdx = d^2X$ oder $dP = \frac{d^2X}{dx} = Qdx$, demnach $Q = \frac{d^2X}{dx^2}$ ist; eben so ist $R = \frac{d^3X}{dx^3}$; $S = \frac{d^4X}{dx^4}$, u. s. w.

Aus 4) entwickelt man

$$5)\ \int Ta^x dx = a^x(S - R\lambda a + Q\lambda a^2 - P\lambda a^3 + X\lambda a^4) - \lambda a^5 \int Xa^x dx,$$

wo nun umgekehrt $\int Ta^x dx$ auf $\int Xa^x dx$ reducirt ist, und S, R, Q, P, Integrale bezeichnen; nämlich $S = \int Tdx$; $R = \int Sdx = \int dx.\int Tdx$; $Q = \int Rdx = \int dx.\int dx.\int Tdx$, u. s. w.

Beispiel 1. $\int x^n a^x dx$. Nach 4) ist hier $P = nx^{n-1}$; $Q = n.n-1.x^{n-2}$; $R = n.n-1.n-2.x^{n-3}$, u. s. w. daher $\int x^n a^x dx = \frac{a^x}{\lambda a}\left(x^n - \frac{nx^{n-1}}{\lambda a} + \frac{n.n-1.x^{n-2}}{\lambda a^2} - \ldots\right)$ bis diese Reihe abbricht. So für $n = 3$ ist $\int x^3 a^x dx = \frac{a^x}{\lambda a}\left(x^3 - \frac{3.x^2}{\lambda a} + \frac{3.2.x}{\lambda a^2} - \frac{3.2.1}{\lambda a^3}\right)$.

Beispiel 2. $\int \frac{a^x dx}{x^n}$ oder $\int a^x dx.x^n$. Nach 5) ist hier $T = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, daher $S = \int Tdx = \int x^{-n}.dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$; und hieraus $R = \int Sdx = +\frac{1}{n-1.n-2.x^{n-2}}$; $Q = -\frac{1}{n-1.n-2.n-3.x^{n-3}}$, u. s. w.

Auf diese Weise wird $\int Ta^x dx$ oder $\int \frac{a^x dx}{x^n}$ endlich auf $\int \frac{a^x dx}{x}$ gebracht. Setzt man der Kürze wegen $\frac{1}{n-1} = A$; $\frac{1}{n-1.n-2} = B, \ldots$; so ist allgemein

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -a^x\left(\frac{A}{x^{n-1}} + \frac{B\lambda a}{x^{n-2}} + \frac{C.\lambda a^2}{x^{n-3}} + \ldots\right) + \frac{\lambda a^{n-1}}{n-1.n-2\ldots 2.1}\int \frac{a^x dx}{x},$$

wo das letzte Integral nach obiger nr. 42 gefunden wird.

44. Sey $\int X dx.\lambda x^n$ zu finden.

Man setze $Xdx = dY$, folglich $Y = \int X dx$; so hat man, wie oben in nr. 43 nach der Formel

$$\int X dY = XY - \int Y dx,$$

worin man X unser λx^n bedeuten läßt, so daß $dX = \frac{n.\lambda x^{n-1}.dx}{x}$ (§. 146. nr. 5) ist,

1) $\int X dx.\lambda x^n = \lambda x^n Y - n\int \frac{Y\lambda x^{n-1} dx}{x}$.

Setzt man $\frac{Ydx}{x} = dP$ oder $\int \frac{Ydx}{x} = P$; so ist auf dieselbe Art

$\int Y\lambda x^{n-1} dx$ oder $\int dP.\lambda x^{n-1} = \lambda x^{n-1} P - (n-1)\int \frac{P\lambda x^{n-2} dx}{x}$, daher

2) $\int X dx.\lambda x^n = \lambda x^n Y - n\lambda x^{n-1} P + n.n-1.\int \frac{P\lambda x^{n-2} dx}{x}$.

Durch Fortsetzung dieser Reduktion, indem man $\int \frac{Pdx}{x} = Q$; $\int \frac{Qdx}{x} = R$, u. s. w. setzt, wird

3) $\int X dx.\lambda x^n = \lambda x^n Y - n.\lambda x^{n-1} P + n.n-1.\lambda x^{n-2} Q - \ldots$,

so daß man das gesuchte Integral erhält, wenn man nur Integrale von der Form $\int X dx = Y$; $\int \frac{Ydx}{x} = P$, u. s. w. kennt.

Beispiel. Für $X = x^m$ ist $Y = \int X dx = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$; daher $\int \frac{Ydx}{x} = P = \int \frac{x^m dx}{m+1} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$ ...

Eben so findet man $Q = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$, u. s. w. Demnach ist allgemein

$$\int x^m dx . \lambda x^n = x^{m+1}(A\lambda x^n - B\lambda x^{n-1} + C\lambda x^{n-2} - \ldots),$$

wenn man kurz $\frac{1}{m+1} = A$; $\frac{1}{(m+1)^2} = B, \ldots$ setzt.

In dem besondern Falle, wo $m = -1$, ist $Y = \int x^m dx = \int \frac{dx}{x} = \lambda x$; $P = \int \frac{dx . \lambda x}{x} = \frac{1}{2}\lambda x^2$ (§. 146. nr. 5); $Q = \int \frac{P dx}{x} = \frac{1}{2}\int \frac{\lambda x^2 . dx}{x} = \frac{1}{2} . \frac{1}{3}\lambda x^3$, u. s. w., daher durch Substitution dieser Werthe in 3)

$$\int \frac{dx . \lambda x^n}{x} = \lambda x^{n+1} - \frac{n}{2}\lambda x^{n+1} + \frac{n.n-1}{1.2.3}\lambda x^{n+1} - \ldots.$$

$$= \lambda x^{n+1}\left(1 - \frac{n}{2} + \frac{n.n-1}{1.2.3} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.4} + - \ldots.\right).$$

Wir ziehen hieraus zwei Folgerungen; erste: weil auch $\int \frac{dx . \lambda x^n}{x} = \frac{\lambda x^{n+1}}{n+1}$ (§. 146. nr. 5‴.) = der zuletzt angeführten Reihe ist; so erhellt, daß $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{n}{1.2} + \frac{n.n-1}{1.2.3} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.4} + - \ldots$ seyn müsse. — Zweite: Mittelst der für $\int x^m dx . \lambda x^n$ entwickelten Reihe kann man das Differenzial $x^{\mu x} . dx$ integriren. Setzt man in (ψ) der Formel nr. 42, daß a die Grundzahl (e) und $a^x =$ irgend einer Zahl z sey; so ist $x = \lambda z$ und $\lambda a = 1$, daher

$$a^x \text{ oder } z = 1 + \lambda z + \frac{\lambda z^2}{1.2} + \frac{\lambda z^3}{1.2.3} + \ldots$$

Hierin $z = x^{\mu x}$, daher $\lambda z = \mu x . \lambda x$ gesetzt, ist

$$x^{\mu x} = 1 + \mu x . \lambda x + \frac{\mu^2 x^2 . \lambda x^2}{1.2} + \ldots$$

Folglich, Alles mit dx multiplizirt und dann integrirt,

$$\int x^{\mu x} . dx = x + \mu \int x \lambda x . dx + \frac{\mu^2}{1.2}\int x^2 \lambda x^2 . dx + \ldots,$$

worin die angedeuteten Integrale gefunden werden, indem man in der Formel für $\int x^m dx . \lambda x^n$ statt m, n der Ordnung nach substituirt 1, 2, 3 ...

45. Sey $\frac{Xdx}{\lambda x^n}$ zu integriren.

Man hat $\frac{Xdx}{\lambda x^n} = Xx \frac{dx}{x . \lambda x^n}$ und, wie oben nach §. 146. nr. 5^{mm}. $\int \frac{dx}{x . \lambda x^n}$ oder $\int \frac{\lambda x^{-n} dx}{x} = \frac{\lambda x^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)\lambda x^{n-1}}$.

Setzt man nun diese Größe = Y und Xx = dem X, in der Formel (nr. 43) $\int X dY = XY - \int Y dX$; so ist

$$\int \frac{Xdx}{\lambda x^n} = -\frac{Xx}{(n-1)\lambda x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{P . dx}{\lambda x^{n-1}},$$

wenn man nämlich $\frac{d(X.x)}{dx} = P$ setzt. Macht man eben so $\frac{d.Px}{dx} = Q$; $\frac{d.Qx}{dx} = R$, u. s. w.; so bringt man $\int \frac{Pdx}{\lambda x^{n-1}}$ auf $\int \frac{Qdx}{\lambda x^{n-2}}$ und dieses Integral auf $\int \frac{Rdx}{\lambda x^{n-3}}$, u. s. f.; wobei man folglich auf ein Integral von der Form $\int \frac{Zdx}{\lambda x}$ kommt.

Beispiel. Man soll $\int \frac{x^m dx}{\lambda x^n}$ finden. Hier ist $X = x^m$; $Xx = x^{m+1}$; $d.Xx = (m+1)x^m . dx$, also $\frac{dXx}{dx} = P = (m+1)x^m$; $Px = (m+1)x^{m+1}$ und $\frac{dPx}{dx} = Q = (m+1)^2 . x^2$; u. s. w. Setzt man ferner, mit Rücksicht auf die vorhin entwickelte Formel, der Kürze wegen $\frac{1}{n-1} = A$; $\frac{m+1}{n-1 . n-2} = B$; $\frac{(m+1)^2}{n-1.n-2.n-3} = C, \ldots$; so hat man

$$\int \frac{x^m dx}{\lambda x^n} = -x^{m+1}\left(\frac{A}{\lambda x^{n-1}} + \frac{B}{\lambda x^{n-2}} + \frac{C}{\lambda x^{n-3}} + \ldots\right) + \frac{(m+1)^{n-1}}{n-1 . n-2 \ldots 2.1} \int \frac{x^m dx}{\lambda x}.$$

Setzt man, um dieses letzte Integral zu finden, $\lambda x = \frac{y}{m+1}$ oder $y = (m+1)\lambda x$; so ist $x = e^{\frac{y}{m+1}}$; $x^m = e^{\frac{my}{m+1}}$ und (weil $d.\lambda x = d.\frac{y}{m+1}$, d. i. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{m+1}$, folglich $dx = \frac{xdy}{m+1}$ ist)

$$dx = \frac{e^{\frac{y}{m+1}} . dy}{m+1}.$$

Diese Werthe substituirt, findet man

$$\int \frac{x^m dx}{\lambda x} = \int \frac{e^y . dy}{y} = \lambda y + y + \frac{y^2}{1.2.2} + \frac{y^3}{1.2.3.3} + \ldots$$

vermöge der obigen Formel nr. 42, indem jetzt e das dortige a, folglich $\lambda a = \lambda e = 1$ ist. Demnach für y wieder $(m+1)\lambda x$ gesetzt, ist

$$\int \frac{x^m dx}{\lambda x} = \lambda(m+1) + \lambda\lambda x + (m+1)\lambda x + \frac{(m+1)^2\lambda x^2}{1.2.2} + \ldots + C.$$

Und speziell für $m = 0$ ist wegen $\lambda 1 = 0$

$$\int \frac{dx}{\lambda x} = \lambda\lambda x + \lambda x + \frac{\lambda x^2}{1.2.2} + \frac{\lambda x^3}{1.2.3.3} + \ldots + C.$$

Soldner*) bezeichnet die Funktion $\int \frac{dx}{\lambda x}$ durch l i.x (Logar. integralis ipsius x).

Allein es kann auch x ein ächter Bruch $= \frac{1}{u}$ (z. B. $= \frac{1}{10}$) seyn. Wie nun in diesem besondern Falle log x (im Brigg. vlacq. System) $= -1$ oder $-\log x = 1$, daher $\log(-\log x) = \log 1$, aber $\log 1$ eben das ist, als $\log\log 10$; eben so ist allgemein, wenn $x = \frac{1}{u}$, $\lambda\lambda x = \lambda(-\lambda x) = \lambda\lambda u$. Um daher diesen Fall in der Formel mit anzudeuten, ist

$$\int \frac{dx}{\lambda x} \text{ (oder } \lambda \text{ i.x)} = \lambda(\pm\lambda x) + \lambda x + \frac{\lambda x^2}{1.2.2} + \ldots + C,$$

---

*) in seiner zu München 1809 herausgegebenen Schrift: „Theorie et tables d'une nouvelle fonction transcend."

oder, $x = \frac{1}{u}$ gesetzt,

$$\lambda i.\frac{1}{u} = \lambda\lambda u - \lambda u + \frac{\lambda u^2}{1.2.2} - \frac{\lambda u^3}{1.2.3.3} + - \ldots + C.$$

Soll für $x = 0$ oder $u = \infty$ das Integral verschwinden; so ist die Konstante $C = -\lambda\lambda\infty + \lambda\infty - \frac{\lambda\infty^2}{1.2.2} + \ldots = 0{,}5772156$, wie Soldner berechnete.*)

§. 158. Fortsetzung.

46. $\int\left(dy = \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\right)$. Vermöge §. 158. Zus. 3. (a) ist

$$y = \text{arc. sin}\,\frac{x}{a} + C;\ \text{und}$$

46'. $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{1}{2}a\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{1}{2}a^2 . \text{arc. sin}\,\frac{x}{a}$ (§. 139. Anmerk.)

47. $\int\left(dy = \frac{-dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\right)$ ist $y = \text{arc. cos}\,\frac{x}{a} + C$. Aber für

48. $dy = \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ ist nach §. 146. nr. 5''. das Integral

$$y = \lambda\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}+x}{C} = \lambda\frac{a^2 : C}{\sqrt{(a^2+x^2)}-x}$$ (indem man mit $\sqrt{(a^2+x^2)}-x$ multiplizirt und dividirt). Und nach §. 146. nr. 5'''. ist von

49. $dy = \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$ das Integral

$$y = \lambda\frac{\sqrt{(x^2-a^2)}+x}{C} = \frac{a^2 : C}{x-\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

*) Wie mit Soldner auch Bessel (im Archiv für Naturk. und Mathem. Königsb. 1812) und Butzenzeiger (in v. Zach's mon. Corr. Sept. 1812) die Funktion $\int\frac{dx}{\lambda x}$ den Integral-Logar. von x nannten; so wählte Malberga-Caluso (Memorie di Matem. e di Fisica della soc. ital. T. XII. P. I. p. 268) für dieselbe Funktion den Ausdruck „Logo-Logar. von x", da $\int\frac{dx}{x}$ den Logar. von x bezeichne. — Vergl. J. Tob. Mayer's vollst. Lehrbegriff d. höh. Anal. II. Th. §. 142—149.

50. Von $dy = \frac{adx}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}$ ist nach nr. 5‴. ebend. das Integ.

$$y = \lambda\frac{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} + C = \lambda\frac{x}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}} + C.$$

Da die Summe beider Werthe $= 2y$ ist; so hat man auch

$$y = \tfrac{1}{2}\lambda\frac{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

51. Von $dy = \frac{adx}{x\sqrt{(a^2+x^2)}}$ ist nach nr. 5″. ebend. das Int.

$$y = \lambda\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}-a}{x} = \lambda\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}+a} + C.$$

$$= \tfrac{1}{2}\lambda\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}-a}{\sqrt{(a^2+x^2)}+a}. \text{ (wie vorhin).}$$

52. $\int\left(dy = \frac{adx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}\right)$; $y = \text{arc. sec}\frac{x}{a} + C = \text{arc. cos}\frac{a}{x}$ (§. 138. Zus. 3. (e). Und nach (g) ebend. ist

53. $\int\left(dy = \frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}\right)$; $y = \text{arc. sin v.}\frac{x}{a} + C$. Aber

54. $\int\left(dy = \frac{dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}\right)$; $y = \lambda\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{C}$ (§. 146. 5‴. (φ)).

Zusatz. Setzt man 1) $\frac{a+x}{a} = \sec\varphi$; so ist nach §. 11. nr. 20. $\text{tang}\,\varphi^2 = \left(\frac{a+x}{a}\right)^2 - 1 = \frac{a^2+2ax+x^2-a^2}{a^2}$, daher $\text{tang}\,\varphi = \frac{\sqrt{(2ax+x^2)}}{a}$, und $a + x + \sqrt{(2ax+x^2)} = a(\sec\varphi + \text{tang}\,\varphi) = a(\text{tang}\,(45^0 + \frac{1}{2}\varphi))$ (§. 22. nr. 161); folglich hat man statt der vorigen nr. 54 auch

54′. $y = \lambda a\,.\,\text{tang}\,(45^0 + \frac{1}{2}\varphi) + C$.

Setzt man 2) $\frac{x}{a} = \sin\varphi$, so wird wegen $\cos\varphi^2 = 1 - \sin\varphi^2 = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2}$, auch $\cos\varphi = \frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}$ und $1-\cos\varphi = \frac{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}$. Also $\frac{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} = \frac{a(1-\cos\varphi)}{a\,.\sin\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$ (nach §. 22. nr. 176), folglich ist statt nr. 50.

50'. $y = \lambda \tang \frac{1}{2}\varphi + C$, und auch $y = \frac{1}{2}\lambda \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} + C$.

Setzt man 5) $\frac{x}{a} = \tang\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$; so ist $1+\tang\varphi^2 = \frac{a^2+x^2}{a^2}$ und $\sqrt{(1+\tang\varphi^2)} - 1$, d. i. $\sec\varphi - 1$ oder $\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi}$ $= \frac{\sqrt{(a^2+x^2)}-a}{a}$, folglich $\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}-a}{x} = \frac{a(1-\cos\varphi)\cos\varphi}{a\cos\varphi \cdot \sin\varphi}$ $= \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \tang\frac{1}{2}\varphi$ (wie vorhin). Daher auch statt nr. 51

51'. $y = \lambda \tang \frac{1}{2}\varphi + C$.

Setzt man 4) $\frac{x}{a} = \sec\varphi$; so findet man eben so statt nr. 49 die Gleichung

49'. $y = \lambda a \cdot \tang(45^0 + \frac{1}{2}\varphi) + C$.

§. 159. Fortsetzung.

55. Sey $dy = x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$, wo m, n, p beliebige Exponenten sind, zu integriren.

Für $a+bx^n = z$ ist $dy = x^{m-1}z^p \cdot dx$, und $x^m z^p = u$ gesetzt, ist

1) $du = mx^{m-1}z^p dx + px^m z^{p-1} \cdot dz$, daher

2) $mx^{m-1}z^p dx = du - px^m z^{p-1} \cdot dz$, oder, für $dz = d(a+bx^n) = nbx^{n-1} \cdot dx$ substituirt,

3) $mx^{m-1}z^p dx = du - nbpx^{m+n-1}z^{p-1} \cdot dx$, daher durch Integr., Division durch m und Subst.

(I) y oder $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^m z^p}{m} - \frac{nbp}{m}\int x^{m+n-1}z^{p-1}dz$,

in welcher Formel das gesuchte Integral auf ein anderes reducirt erscheint, in welchem der Exponent von z um 1 niedriger ist, als im vorgegebenen Differenzial.

Setzt man ferner statt z^p in 3) $z \cdot z^{p-1} = (a+bx^n)z^{p-1}$ $= az^{p-1} + bx^n z^{p-1}$; so hat man durch Reduktion

4) $maz^{p-1}x^{m-1}dx = du - (m+np)bx^{m+n-1} \cdot z^{p-1} \cdot dx$.

Weil aber p willkührlich zu nehmen und von den übrigen

Größen unabhängig ist; so kann man auch $p+1$ statt p setzen, wodurch aber $u(=x^m z^p = x^m(a+bx^n)^p)$ in $u' = x^m(a+bx^n)^{p+1} = x^m z^{p+1}$ und die Gleichung 5) in diese übergeht:

5) $maz^p x^{m-1}dx = du' - (m+n(p+1))bx^{m+n-1}z^p dx.$

Hieraus, wie vorhin, und zu gleichem Zwecke ist

(II) $y = \frac{x^m z^{p+1}}{ma} - \frac{m+n+np}{ma}\int x^{m+n-1}z^p dx.$

Dann den aus $z = a+bx^n$ gefundnen Werth von $bx^n = z-a$ in 5) substituirt, hat man

6) $mx^{m-1}z^p dx = du - np(z-a)x^{m-1}z^{p-1}dx$
$= du - npx^{m-1}z^p dx + npax^{m-1}z^{p-1}dx,$
oder $(m+np)x^{m-1}z^p dx = du + npa.x^{m-1}z^{p-1}dx.$

Daraus folgt, wie vorhin,

(III) $y = \frac{x^m z^p}{m+np} = \frac{npa}{m+np}\int x^{m-1}z^{p-1}dx.$

Da, wie p, so auch m von den übrigen Größen unabhängig ist; so kann man in 5) $m-n$ statt m und $p+1$ statt p setzen. Hiedurch verwandelt sich aber $u(=x^m z^p)$ in $u'' = x^{m-n}z^{p+1}$ und die Gleichung 5) in

7) $(m-n)x^{m-n-1}z^{p+1}dx = du'' - nb(p+1)x^{m-1}z^p dx.$

Hieraus folgt wieder, wie oben,

(IV) $y = \frac{x^{m-n}z^{p+1}}{nb(p+1)} = \frac{m-n}{nb(p+1)}\int x^{m-n-1}z^{p+1}dx.$

Wenn man ferner eben so in 5) $m-n$ statt m setzt; so geht u in $u''' = x^{m-n}z^{p+1}$ und die Gleichung 5) in

8) $(m-n)az^p x^{m-n-1}dx = du''' - (m+np)bx^{m-1}z^p dx$
über, woraus wieder durch Versetzung die Formel folgt:

(V) $y = \frac{(m+np)b}{x^{m-n}z^{p+1}} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b}\int x^{m-n-1}z^p dx.$

Setzt

Setzt man endlich in 6) $p+1$ statt p; so geht u in $u''=x^m z^{p+1}$ und die Gleichung 6) in folgende über:

9) $[m+n(p+1)]x^{m-1}z^{p+1}dx = du'' - n(p+1)ax^{m-1}z^p dx$,

woraus wieder folgt:

$$\text{(VI)}\quad y = -\frac{x^m z^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{m+n+np}{n(p+1)a}\int x^{m-1}z^{p+1}.dx.$$

In dieser, wie in den vorigen 5 Reduktionsformeln, muß noch $a+bx^n$ statt z gesetzt werden.

Zusatz 1. Für $n=2$ und $p=-\frac{1}{2}$ hat man statt der vorgegebenen Differenzialgleichung diese:

$$dy = \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}.$$

Daher ist die Integralgleichung nach (V)

$$\text{(a)}\quad y = \frac{1}{(m-1)b}x^{m-2}\sqrt{(a+bx^2)} - \frac{(m-2)a}{(m-1)b}\int\frac{x^{m-3}dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}.$$

Und dieses Integral geht, wenn man noch spezieller $a=1$ und $b=-1$ macht, in dieses über:

$$\text{(b)}\quad y = \frac{m-2}{m-1}\int\frac{x^{m-3}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{1}{m-1}x^{m-2}\sqrt{(1-x^2)}.$$

Zusatz 2. Hieraus folgt, daß, weil

(1) $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{arc. sin } x$ (nach §. 138. Zus. 3. (a)) ist, und wenn Kürze halber $\sqrt{(1-x^2)}=z$ und $m=3$ gesetzt wird,

(2) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2}\text{arc. sin } x - \frac{1}{2}x.z$ vermöge (b) sey. Für $m=5$ ist

(3) $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.3}{2.4}\text{arc. sin } x - \frac{1.3}{4}xz - \frac{1}{4}x^3z$; denn nach (b) ist $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{3}{4}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{1}{4}x^3z$ (daher durch Substit. von (2)) $= \frac{1.3}{2.4}\text{arc. sin } x$ etc. wie vorhin. Ebenso:

(4) $\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\text{arc. sin } x - \frac{1.3.5}{2.4.6}xz - \frac{1.5}{4.6}x^3z - \frac{1}{6}x^5z.$

$$(5)\ \int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\text{arc. sin } x-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}xz-\frac{1.5.7}{4.6.8}x^3z$$
$$-\frac{1.7}{6.8}x^5z-\frac{1}{8}x^7z.\quad \text{U. f. w.}$$

$$(6)\ \int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}=C-\sqrt{(1-x^2)}\ (\text{§. 145. Zuf. (a)})=C-z;$$

daher für $m=4$ nach (b) des vor. 1. Zuf.

$$(7)\ \int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{3}{4}\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1}{4}x^2\sqrt{(1-x^2)}=C-\frac{3}{4}z-\frac{1}{4}x^2.z.$$

Eben so findet man für $m=6$ und $m=8$

$$(8)\ \int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=C-\frac{2.4}{3.5}z-\frac{1.4}{3.5}x^2z-\frac{1}{5}x^4z.$$

$$(9)\ \int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=C-\frac{2.4.6}{3.5.7}z-\frac{1.4.6}{3.5.7}x^2z-\frac{1.6}{3.7}x^4z-\frac{1}{7}x^6z.\quad \text{U. f. w.}$$

Wenn das Integral der 5 erſten Formeln für $x=0$ mit 0 anfangen ſoll, ſo iſt die Konſtante $C=0$; allein hinſichtlich der folgenden Formeln, in welchen für $x=0$ $z=1$ wird, iſt unter derſelben Bedingung

$$C=\frac{2.4.6\ldots 2\pi}{3.5.7\ldots 2n+1},\ \text{wenn der Exponent von } x=2n+1 \text{ iſt.}$$

Wenn ferner das Integral $\int\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ für $x=0$ gleich 0 iſt; ſo iſt für $x=1$ deſſen Werth

$$=\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\text{arc. sin } 1=\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}.\frac{1}{2}\pi,$$

weil ein Winkel oder Bogen, deſſen Sinus $=1$, gleich $90^0=$ (im Halbm. $=1$ ausgedrückt) $\frac{1}{2}\pi$ iſt. Und bei derſelben Vorausſetzung iſt der Werth

$$\text{von } \int\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots 2n+1}.$$

Daher, da für $n=\infty$ es einerlei iſt, welches Integral genommen werde, hat man

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}.\frac{1}{2}\pi=\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots 2n+1},\ \text{woraus}$$

$$\frac{1}{2}\pi=\frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.5.5.7.7\ldots}\ \text{folgt.}$$

Zuſatz 3. Für $p=\frac{1}{2}$ und $n=2$ wird nach §. 159. (II) y oder

56. $\int x^{m-1}\sqrt{(a+bx^2)}dx=\frac{1}{m+1}x^m\sqrt{(a+bx^2)}+\frac{a}{m+1}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}$

welches letztere Integral durch den vorigen Zuſ. 1. gefunden wird. Daher ſpeziell für $m=1$

57. $\int dx\sqrt{(a+bx^2)}=\frac{1}{2}x\sqrt{(a+bx^2)}+\frac{1}{2}a\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}$.

58. $\int dx\sqrt{(2ax+bx^2)}=\frac{a+bx}{2b}\sqrt{(2ax+bx^2)}-\frac{a^2}{2b}\int\frac{dx}{\sqrt{(2ax+bx^2)}}$,

wovon man ſich durch Differenziirung leicht überzeugt. Denn ſetzt man $2ax+bx^2=z$, woraus $dz=2(a+bx)dx$ und $x=\frac{-a+\sqrt{(bz+a^2)}}{b}$ iſt; ſo wird

$$d.\frac{a+bx}{2b}\sqrt{(2ax+bx^2)}=d.\frac{1}{2b}\sqrt{(bz+a^2)}\sqrt{z}=\frac{1}{4b}\left(\frac{bz^{\frac{1}{2}}}{(bz+a^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(bz+a^2)^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}}\right)dz=\frac{1}{4b}\left(\frac{2bz}{(bz+a^2)^{\frac{1}{2}}.z^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^2}{(bz+a^2)^{\frac{1}{2}}.z^{\frac{1}{2}}}\right)dz=$$

$$\frac{1}{4b}\left(\frac{2bz^{\frac{1}{2}}}{(bz+a^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^2}{(bz+a^2)^{\frac{1}{2}}.z^{\frac{1}{2}}}\right)dz.$$

Subſtituirt man nun für z und dz obige Werthe; ſo gibt, da $bz+a^2$ ein vollkommenes Quadrat iſt, das erſte Glied das Differenzial $dx\sqrt{(2ax+bx^2)}$, und das zweite hebt ſich gegen das zweite Glied unſeres Integrals auf.

59. $\int\frac{dx}{x^m\sqrt{(a+bx^2)}}=C-\frac{1}{(m-1)a}.\frac{\sqrt{(a+bx^2)}}{x^{m-1}}-\frac{(m-2)b}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{(a+bx^2)}}$,

indem man nämlich im §. 152. nr. 19. ſtatt n ſetzt $\frac{1}{2}$. Für $n=-\frac{1}{2}$ iſt

60. $\frac{dx\sqrt{(a+bx^2)}}{x^m}=C-\frac{1}{(m-1)a}.\frac{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{x^{m-1}}-\frac{(m-4)b}{(m-1)a}\int\frac{dx\sqrt{(a+bx^2)}}{x^{m-2}}$.

61. Sey $dy=x^m(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p dx$ zu integriren.

Man ſetze (auf gleiche Weiſe, wie bei nr. 55., verfahrend) die eingeſchloſſene Größe $=z$, daher $dz=(\beta+2\gamma x)dx$ und differenziire $u=x^m z^{p+1}$; ſo hat man

1) $du = mx^{m-1}z^{p+1}dx + (p+1)x^m z^p dz$, od. durch Subst. für dz,

2) $du = mx^{m-1}z^{p+1}dx + (p+1)\beta x^m z^p dx + 2(p+1)\gamma x^{m+1}z^p dx$.

Diese Gleichung integrirt und für u obigen Werth gesetzt, entwickelt man $\int x^m z^p dx = \int x^m(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p dx$, d. i.

$$(I)\ldots y = \frac{x^m z^{p+1}}{(p+1)\beta} - \frac{m}{(p+1)\beta}\int x^{m-1}z^{p+1}dx - \frac{2\gamma}{p}\int x^{m+1}z^p dx.$$

Setzt man in 2) statt z^{p+1} den Werth $z^p . z = z^p(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$; so findet man

3) $du = m\alpha x^{m-1}z^p dx + (m+p+1)\beta x^m z^p dx$
$+ (m+2p+2)\gamma x^{m+1}z^p dx$,

und hieraus wieder, wie vorhin:

$$(II)\ldots y = \frac{x^m z^{p+1}}{(m+p+1)\beta} - \frac{m\alpha}{(m+p+1)\beta}\int x^{m-1}z^p dx - \frac{(m+2p+2)\gamma}{(m+p+1)\beta}\int x^{m+1}z^p dx.$$

Es ist ferner

$$x^{m-1}z^{p+1} = x^{m-1}z^p(\alpha+\beta x+\gamma x^2) = \alpha x^{m-1}z^p + \beta x^m z^p + \gamma x^{m+1}z^p.$$

Den hieraus für γx^{m+1} entwickelten Werth statt derselben Größe in 3) substituirt, hat man

4) $du = (m+2p+2)x^{m-1}z^{p+1}dx - (p+1)\beta x^m z^p dx$
$- 2\alpha(p+1)x^{m-1}z^p dx$,

und hieraus, wie oben:

$$(III)\ y = -\frac{x^m z^{p+1}}{(p+1)\beta} + \frac{m+2p+2}{(p+1)\beta}\int x^{m-1}z^{p+1}dx - \frac{2\alpha}{\beta}\int x^{m-1}z^p dx.$$

Zusatz 4. Diese 3 Formeln sind von vorzüglichem Gebrauche, wenn p eine gebrochene oder ganze — Zahl ist. Setzt man z. B. $p = -n$ und $n > 1$; so ist nach (III)

$$y = \int\frac{x^m dx}{z^n} = \frac{x^m}{(n-1)\beta z^{n-1}} + \frac{2(n-1)-m}{(n-1)\beta}\int\frac{x^{m-1}.dx}{z^{n-1}} - \frac{2\alpha}{\beta}\int\frac{x^{m-1}.dx}{z^n},$$

wo also $\int\frac{x^m dx}{z^n}$ auf 2 andere Integrale, in welchen wenigstens ein Exponent um einen Grad niedriger, zurückgebracht ist. Wenn demnach m = einer ganzen Zahl ist, so läßt sich das Integral durch fortgesetzte Reduktion auf $\int\frac{dx}{z}$ bringen, das (nach §. 152. nr. 37. Bemerk. z. B. (P)) gefunden wird. Ist z. B. $m = 1$; so hat man

$$(a)\ldots \int\frac{x dx}{z^n} = \frac{x}{(n-1)\beta z^{n-1}} + \frac{2n-3}{(n-1)\beta}\int\frac{dx}{z^{n-1}} - \frac{2\alpha}{\beta}\int\frac{dx}{z^n}.$$

Es wird aber für $m=0$ in (II), wo nun das zweite Glied verschwindet, $\int\frac{dx}{z^n} = -\frac{1}{(n-1)\beta.z^{n-1}} - \frac{2\gamma}{\beta}\int\frac{x dx}{z^n}$, also

$$(b)\ldots \int\frac{x dx}{z^n} = -\frac{1}{(n-1)2\gamma.z^{n-1}} - \frac{\beta}{2\gamma}\int\frac{dx}{z^n},$$

wo sohin $\int\frac{x dx}{z^n}$ auf $\int\frac{dx}{z^n}$ gebracht ist. Um ferner dieses letzte Integral auf $\int\frac{dx}{z^{n-1}}$ zu reduciren, setze man die 2 Werthe aus (a) und (b) gleich, und entwickle nach gehöriger Reduktion die Größe $\int\frac{dx}{z^n}$; so hat man

$$(c)\ldots \int\frac{dx}{z^n} = \frac{\beta+2\gamma x}{(n-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)z^{n-1}} + \frac{(2n-3)2\gamma}{(n-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)}\int\frac{dx}{z^{n-1}}.$$

So erhellt, daß sowohl $\int\frac{x dx}{z^n}$ als $\int\frac{dx}{z^n}$ zuletzt auf $\int\frac{dx}{z}$ gebracht werden könne, und daß durch fortgesetzte Reduktion die Reihe resultire:

$$\int\frac{dx}{z^n} = \frac{\mathfrak{A}(\beta+2\gamma x)}{z^{n-1}} + \frac{\mathfrak{B}(\beta+2\gamma x)}{z^{n-2}} + \ldots\ldots \frac{\mathfrak{T}(\beta+2\gamma x)}{z} + \mathfrak{U}\int\frac{dx}{z},$$

in welcher Formel, wenn man $4\alpha\gamma-\beta^2 = a$ setzt, die Coefficienten folgende Werthe haben:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{(n-1)a};\ \mathfrak{B} = \frac{(2n-5)2\gamma}{(n-2)a}.\mathfrak{A};\ \mathfrak{C} = \frac{(2n-5)2\gamma}{(n-3)a}.\mathfrak{B};$$

.... und $\mathfrak{U} = 2\gamma\mathfrak{T}$.*)

*) Vergl. M. Hirsch's „Integraltafeln" (Berlin 1810).

Zusatz 5. Es enthalte $dy = \frac{M}{N}dx$ (vergl. §. 156. b)) die einzige Irrationalgröße $\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}$, oder Potenzen dieser Größe; so kann man das Differenzial auf folgende allgemeine Art rational machen:

Aus $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ den Werth von $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)}}{2\gamma}$ entwickelt und $\beta+\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)} = a$ und $\beta-\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)} = b$ gesetzt, ist

(1) ... $\alpha+\beta x+\gamma x^2 = \left(\frac{a}{2\sqrt{\gamma}}+x\sqrt{\gamma}\right)\left(\frac{b}{2\sqrt{\gamma}}+x\sqrt{\gamma}\right)$,

Diese Größe $= \left(\frac{a}{2\sqrt{\gamma}}+x\sqrt{\gamma}\right)^2 . u^2$ gesetzt, wo u eine Variable bezeichnet, ist

(2) ... $\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} = \left(\frac{a}{2\sqrt{\gamma}}+x\sqrt{\gamma}\right).u$, und in (1) durch $\frac{a}{2\sqrt{\gamma}}+x\sqrt{\gamma}$ dividirt, ist

(3) ... $\frac{b}{2\sqrt{\gamma}}+x\sqrt{\gamma} = \left(\frac{a}{2\sqrt{\gamma}}+x\sqrt{\gamma}\right).u^2$, oder

$b+2x\gamma = (a+2x\gamma)u^2$, woraus folgt

(4) ... $x = \frac{b-au^2}{2\gamma(u^2-1)}$ und $u = \frac{\sqrt{(b+2\gamma x)}}{\sqrt{(a+2\gamma x)}}$.

Den Werth von x im Faktor von u in (2) substituirt, ist

(5) ... $\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} = \left(\frac{a}{2\sqrt{\gamma}}+\frac{b-au^2}{2\sqrt{\gamma}(u^2-1)}\right).u = \frac{b-a}{2\sqrt{\gamma}}\cdot\frac{u^2}{u^2-1}$,

d. i. = einer rationalen Größe. Ferner ist aus (4)

(6) $dx = \frac{a-b}{\gamma}\cdot\frac{udu}{(u^2-1)^2}$ (§. 136), d. i. ebenfalls rational.

Weil nun auch jede Potenz $(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{m}{2}} = \left(\frac{b-a}{2\sqrt{\gamma}}\right)^m \cdot \frac{u^m}{(u^2-1)^m}$ rational ist; so ist auch das Differenzial $\frac{M}{N}dx$ nun als ein rationales integrirbar, wie aus folgenden speziellen Fällen erhellt:

62. Um $dy = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}$ zu integriren, substituire man aus (6) den Werth von dx und aus (5) den Werth des Nenners; dadurch ist

$$dy = \frac{2(a-b)\,du}{-(a-b)\sqrt{\gamma}(u^2-1)} = \frac{-2}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{du}{u^2-1} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{du}{1-u^2}; \text{ also}$$

$$(M) \ldots y = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \lambda \frac{1+u}{1-u} + C \text{ nach §. 152. nr. 14.,}$$

indem man 1 statt a oder a^2 setzt. Substituirt man ferner den Werth von u aus (4); so ist auch

$$(N) \ldots y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \lambda \frac{\sqrt{(a+2\gamma x)} + \sqrt{(b+2\gamma x)}}{\sqrt{(a+2\gamma x)} - \sqrt{(b+2\gamma x)}} + C.$$

Dieser Bruch wird durch Multipl. seines Zählers und Nenners mit dem Zähler

$$= \frac{a+b+4\gamma x+2\cdot\sqrt{(a+2\gamma x)(b+2\gamma x)}}{a-b}$$

$$= \frac{\beta+2\gamma x+2\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)}},$$

indem vermöge obiger Werthe von a und b die Summe $a+b=2\beta$; $a-b=2\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)}$ und $(a+2\gamma x)(b+2\gamma x) =$ (durch Reduktion) $4\gamma(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$ ist. Weil ferner der Nenner $\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)}$, als eine von x unabhängige Größe, in die Konstante C eingerechnet werden kann; so ist auch

$$(O) \ldots y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \lambda(\beta+2\gamma x+2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}) + C.$$

Muß z. B. für $x=0$ auch $y=0$, d. i.

$0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \lambda(\beta+2\sqrt{\gamma}\cdot\alpha + C$ seyn; so ist

$C = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \lambda(\beta+2\sqrt{\gamma}\cdot\alpha)$, und das ganze Integral:

$$(P) \ldots y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \lambda \frac{\beta+2\gamma x+2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{\beta+2\sqrt{\gamma}\cdot\alpha}.$$

Gilt $-\gamma$, also die Differenzialgleichung

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x-\gamma x^2)}};$$

so ist nun $a = \beta+\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}$ und
$b = \beta-\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}$, daher wird aus (N)

$$(Q) \ldots y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\sqrt{-1}} \lambda \frac{\sqrt{(a-2\gamma x)}+\sqrt{-1}\cdot\sqrt{(2\gamma x-b)}}{\sqrt{(a-2\gamma x)}-\sqrt{-1}\cdot\sqrt{(2\gamma x-b)}} + C.$$

Dieſes Integral wird noch unter andern verſchiedenen Formen dargeſtellt. (Vergl. Mayer's oben cit. Lehrbegr. Th. II. S. 79....)

Für $\gamma = 1$ oder $dy = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+x^2)}}$ hat man

(R) ... $y = \lambda(\beta + x + \sqrt{(\alpha+2\beta x+x^2)} + C$.

Denn $x = z-\beta$, daher $dy = \frac{dz}{\sqrt{(z^2+\alpha-\beta^2)}}$ geſetzt, und hievon das Integral nach §. 158. nr. 48 oder nr. 49. (je nachdem $\alpha >$ oder $< \beta^2$) geſucht, hat man (R) durch Subſtitution des Werthes von $z = x+\beta$.

Aber für $\gamma = -1$ iſt

(S) ... $\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x-x^2)}} = \text{arc.sin}\frac{x-\beta}{\sqrt{(\alpha+\beta^2)}} = \text{arc.cos}\frac{\beta-x}{\sqrt{(\alpha+\beta^2)}}$.

Denn $x = z+\beta$ geſetzt, iſt das Differenzial $\frac{dz}{\sqrt{(\alpha+\beta^2-z^2)}}$, deſſen Integral nach §. 158. nr. 46. $= \text{arc. sin}\frac{z}{\sqrt{(\alpha+\beta^2)}}$, weil das dortige a^2 jetzt $= \alpha+\beta^2$, daher $a = \sqrt{(\alpha+\beta^2)}$ iſt; — Setzt man aber $x = \beta - z$; ſo hat man nach nr. 47. (ebend.) $\int \frac{-dz}{\sqrt{(\alpha+\beta^2-z^2)}} = \text{arc. cos}\frac{z}{\sqrt{(\alpha+\beta^2)}}$, woraus durch Subſtit. für z die angegebenen Integrale folgen.

Das erſte ganze Integral iſt

$C - \text{arc.sin}\frac{\beta-x}{\sqrt{(\alpha+\beta^2)}} = C - \frac{1}{2}\pi + \text{arc.cos}\frac{\beta-x}{\sqrt{(\alpha+\beta^2)}}$, indem allgemein: $\text{arc.cos}\,\alpha = 90^0 - \text{arc.sin}\,\alpha$ oder umgekehrt: $\text{arc.sin}\,\alpha = 90^0 - \text{arc.cos}\,\alpha$ iſt. Für das zweite Integral iſt die Konſtante = der vorigen $C - \frac{1}{2}\pi$.

63. Um $dy = \frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}$ zu integriren,

ſubſtituire man ſtatt x, dx und $\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}$ die in demſelben Zuſ. 5. unter (4), (5), (6) in n gegebenen Ausdrücke; ſo hat man

$$dy = -4\sqrt{\gamma} \cdot \frac{du}{b-au^2}.$$

Hievon ist nach §. 152. nr. 14. das Integral

$$y = 2\sqrt{\frac{\gamma}{ab}} \cdot \lambda \frac{\sqrt{b} - u\sqrt{a}}{\sqrt{b} - u\sqrt{a}}.$$

Setzt man statt ab den Werth $4\alpha\gamma$, wodurch $2\sqrt{\frac{\gamma}{ab}}$ oder $\sqrt{\frac{4\gamma}{ab}} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ wird, und statt u den oben unter (4) entwickelten Werth; so bekommt man durch Reduktion

$$(\mu) \ldots y = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \lambda \frac{\sqrt{b}\sqrt{(a+2\gamma x)} - \sqrt{a}\sqrt{(b+2\gamma x)}}{\sqrt{b}\sqrt{(a+2\gamma x)} + \sqrt{a}\sqrt{(b+2\gamma x)}}.$$

Nenner und Zähler dieses Bruches mit dem Zähler multiplizirt, und für a und b ihre Werthe substituirt, erhält man

$$(\nu) \ldots y = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \lambda \frac{2\alpha + \beta x - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}{-x\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \lambda \frac{-2\alpha - \beta x + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}{x\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}} + C'.$$

Da man endlich den Logar. von $\mp\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}$ wieder mit in die Konstante C oder C' einrechnen kann; so hat man auch

$$(\rho) \ldots x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \lambda \frac{2\alpha + \beta x - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}{x} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \lambda \frac{-2\alpha - \beta x + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}{x} + C'.$$

Gilt $-\alpha$, daher nun $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt{-1}}$, und drückt man in (μ) $\sqrt{b}\sqrt{(a+2\gamma x)}$ durch $\sqrt{(ab+2b\gamma x)}$ aus; substituirt dann wegen $-\alpha$ nun $-4\alpha\gamma$ statt ab, wodurch z. B. $\sqrt{(ab+2\gamma x \cdot b)} = \sqrt{(2b\gamma x - 4\alpha\gamma)} = \sqrt{2\gamma}\sqrt{(bx - 2\alpha)}$ wird; so hat man (durch Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{2\gamma}$) statt (μ)

$$y = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt{-1}} \lambda \frac{\sqrt{(bx - 2\alpha)} - \sqrt{(ax - 2\alpha)}}{\sqrt{(bx - 2\alpha)} + \sqrt{(ax - 2\alpha)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} \lambda \frac{\sqrt{(2\alpha - bx)}\sqrt{-1} - \sqrt{(ax - 2\alpha)}}{\sqrt{(2\alpha - bx)}\sqrt{-1} + \sqrt{(ax - 2\alpha)}}.$$

Setzt man nun $B = \sqrt{(2\alpha - bx)}$ und $C = \sqrt{(ax - 2\alpha)}$, und vergleicht dieses mit §. 148. Zus. 2. (δ); so erhellt, daß

$$y = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{arc. cos} \frac{B^2 - C^2}{B^2 + C^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{arc. cos} \frac{4\alpha - (a+b)x}{(a-b)x}$$

sey. In diesem Ausdrucke die Werthe von a und b, nämlich nun wegen $-\alpha$, $\beta + \sqrt{(\beta^2 + 4\alpha\gamma)}$ und $\beta - \sqrt{(\beta^2 + 4\alpha\gamma)}$ substituirt, findet man

$$y = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{arc. cos} \frac{2\alpha - \beta x}{x\sqrt{(\beta^2 + 4\alpha\gamma)}} + C.$$

Nun ist aber arc. cos φ eben das, was $90^0 - $ arc. sin φ, folglich ist auch

$$y = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \text{arc. sin } \varphi + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} 90^0 + C,$$

d. i. wenn man $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} 90^0$ mit zur Konstante nimmt,

$$y = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{arc. sin} \frac{2\alpha - \beta x}{x\sqrt{(\beta^2 + 4\alpha\gamma)}} + C,$$

oder auch $y = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{arc. sin} \frac{\beta x - 2\alpha}{x\sqrt{(\beta^2 + 4\alpha\gamma)}} + C.$

64. Sey $dy = dx\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$ zu integriren.

Die eingeschlossene Größe $= z$ gesetzt, ist nach der Formel (c) im Zus. 4. dieses Paragraphes für $n = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{dx}{z} = \frac{2(\beta + 2\gamma x)\sqrt{z}}{\beta^2 - 4\alpha\gamma} - \frac{8\gamma}{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \int dx \cdot \sqrt{z}, \text{ also}$$

$$\int dx\sqrt{z} = \frac{(\beta + 2\gamma x)\sqrt{z}}{4\gamma} - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{8\gamma} \int \frac{dx}{z}, \text{ d. i.}$$

$$\int dx\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} = \frac{\beta + 2\gamma x}{4\gamma}\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{8\gamma} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}} + C,$$

wo das letzte Integral aus nr. 62. bekannt ist.

65. Sey $dy = \frac{x dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$ zu integriren.

Nach Formel (b) desselben Zus. 4. dieses Paragraphes findet man auf gleiche Weise, wie vorhin,

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} - \frac{\beta}{2\gamma} \int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}} + C.$$

Ist allgemein $\frac{x^m dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}$ oder $\frac{x^m dx}{\sqrt{z}}$ zu integriren, so läßt sich leicht zeigen, daß solche Integrale, welche ganze Zahl auch m sey, immer auf die vorigen gebracht werden können. Denn entwickelt man aus der Formel (II) nr. 61. im Zus. 3. dieses Paragraphes, wo $y = \int x^m z^p dx$ ist, das Integral $\int x^{m+1} z^p dx$ des letzten Gliedes, nämlich

$$\int x^{m+1} z^p dx = \frac{x^m z^{p+1}}{(m+2p+2)\gamma} - \frac{(m+p+1)\beta}{(m+2p+2)\gamma}\int x^m z^p dx - \frac{m\alpha}{(m+2p+2)\gamma}\int x^{m-1} z^p dx,$$

und substituirt $-\frac{1}{2}$ statt p, wodurch $z^p = \frac{1}{\sqrt{z}}$ wird; so hat man für unsern Fall

$$\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{z}} = \frac{x^m\sqrt{z}}{(m+1)\gamma} - \frac{(2m+1)\beta}{2(m+1)\gamma}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{z}} - \frac{m\alpha}{(m+1)\gamma}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{z}}.$$

Wie man hier ein Integral auf 2 andere Integrale, in welchen die Potenzen von x um einen und um 2 Grade niedriger sind, reducirt erblickt; so kann man auf gleiche Weise

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{z}} \text{ auf } \int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{z}} \text{ und auf } \int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{z}}$$

zurückebringen, wenn man in der vorigen Formel m statt m—1 setzt. Durch fortgesetzte Reduktion werden sonach Integrale wie $\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{z}}$ oder $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{z}}$ endlich auf die uns bekannten $\int\frac{xdx}{\sqrt{z}}$ oder $\int\frac{dx}{\sqrt{z}}$ gebracht.

c.

Integrale in Beziehung auf trigonometrische Funktionen.

§. 160. Folgende einfache Integralformeln, die wir unter nr. 66. zusammenfassen wollen, und welchen nur noch C beizufügen ist, sind aus den Differenzialformeln der §§. 138 und 139 klar:

66. (a) .. $\int d\varphi \cdot \cos\varphi = \sin\varphi$. (b) .. $\int d\varphi \sin\varphi = -\cos\varphi$.

(c) .. $\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2} = \text{tang}\,\varphi$. (d) .. $\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2} = -\cot\varphi$.

(e).. $\int \frac{d\varphi \cdot \text{tang}\,\varphi}{\cos\varphi} = \sec\varphi$. (f).. $\int \frac{d\varphi \cdot \cot\varphi}{\sin\varphi} = -\,\text{cosec}\,\varphi$.

(g).. $\int d\varphi \cdot \cot\varphi = \lambda \sin\varphi$ (§. 159. Zuſ. 2. nr. (1)).

(h).. $\int d\varphi \,\text{tang}\,\varphi = -\lambda \cos\varphi = \lambda \frac{1}{\cos\varphi} = \lambda \sec\varphi$.

(i).. $\int \frac{d\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{1}{2}\lambda \,\text{tang}\,\varphi = -\frac{1}{2}\lambda \cot\varphi$ (ebend. (5)(4)),

oder $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \lambda \,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$.

(k).. $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \lambda \,\text{tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) = -\lambda \,\text{tang}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$

(ebend. (9)(10)).

(l).. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{arc. sin}\,x = -\,\text{arc. cos}\,x$ (§. 158. Zuſ. 3.)

(m).. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc. tang}\,x = -\,\text{arc. cot}\,x$.

(n).. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} = \text{arc. sec}\,x = -\,\text{arc. cosec.}\,x$. Eben ſo:

(o).. $\int \frac{a\,dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} = \text{arc. sec}\,\frac{x}{a} = \text{arc. cos}\,\frac{a}{x}$.

Setzt man $n\varphi$ ſtatt φ, ſo iſt nach §. 147. Zuſ. 1.

(p).. $\int d\varphi \cdot \cos n\varphi = \frac{1}{n} \sin n\varphi$; eben ſo findet man

(q).. $\int \frac{d\varphi}{\cos n\varphi^2} = \frac{1}{n} \,\text{tang}\,n\varphi$ und (r).. $\int \frac{d\varphi}{\sin n\varphi^2} = -\frac{1}{n} \cot n\varphi$.

(s).. $\int \frac{d\varphi \cdot \cos n\varphi}{\sin n\varphi^2} = \frac{1}{n \cdot \sin n\varphi}$ und (t).. $\int \frac{d\varphi \cdot \sin n\varphi}{\cos n\varphi^2} = \frac{1}{n \cdot \cos n\varphi}$.

Zuſatz 1. Man kann ſich obiger Formeln, z. B. (h) und (m), zur Auffindung einer Reihe bedienen, mittelſt welcher ein Kreisbogen aus ſeinem Sinus oder Coſinus, oder ſeiner Tangente berechnet wird.

Weil nämlich nach Newton's Binomialformel

$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$, alſo

$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = dx\,(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \ldots)$ und

$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3.x^5}{2.4.5} + \frac{3.5.x^7}{2.4.6.7} + \ldots$ ist; so hat man, statt x entweder $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ gesetzt, vermöge (l)

$$1)\ \alpha = \sin\alpha + \frac{\sin\alpha^3}{2.3} + \frac{3\sin\alpha^5}{2.4.5} + \frac{3.5\sin\alpha^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7\sin\alpha^9}{2.4.6.8.9} + \frac{3.5.7.9\sin\alpha^{11}}{2.4.6.8.10.11} + \ldots$$

$$\text{Oder } C - \alpha = \cos\alpha + \frac{\cos\alpha^3}{2.3} + \frac{3.\cos\alpha^5}{2.4.5} + \ldots$$

Für x oder $\cos\alpha = 0$ wird diese Reihe $= 0$, d. i. $C - \alpha = 0$ oder $C = \alpha$, woraus folgt, daß, weil $\cos\alpha$ für $\alpha = 90^0 = \frac{1}{2}\pi$ (im Halbm. ausgedrückt) $= 0$ ist, auch $C = \frac{1}{2}\pi$ seyn müsse.

Weil z. B. $\sin 30^0 = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}$ (für den Halbm. $= 1$) ist, hat man: arc. $30^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4.5.2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7.2^7} + \ldots$ Die Summe von 7 Gliedern dieser Reihe gibt den rectifizirten Bogen von $30^0 = 0{,}52359878\ldots$, und diese Zahl mit 3 oder 6 multiplizirt, findet man $\frac{1}{2}\pi$ oder π (d. i. arc. 90^0 oder arc. 180^0 in Theilen des Halbm. $= 1$) um so genauer, je näher jene Zahl selbst berechnet ist. (Vergl. auch §. 159. Zus. 2. am Ende).

Weil ferner eben so $\frac{1}{1+x^2}$ oder $(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots$ folglich

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int dx\,(1 - x^2 + x^4 - \ldots) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - + \ldots$$

ist, so hat man, wie vorhin,

$$2)\ \alpha = \tang\alpha - \tfrac{1}{3}\tang\alpha^3 + \tfrac{1}{5}\tang\alpha^5 - \tfrac{1}{7}\tang\alpha^7 + \ldots$$
$$= \tang\alpha\,(1 - \tfrac{1}{3}\tang\alpha^2 + \tfrac{1}{5}\tang\alpha^4 - + \ldots).$$

Z. B. für $\alpha = 45^0$ ist $\tang\alpha = 1$ (§. 7. Zus. 1.), also arc. $45^0 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots$

Leibniz, welcher diese Reihe zuerst (in „Act. Erud. Lips.“ Febr. 1682) bekannt machte, wird von Kästner (in „Anal. des Unendl.“ S. 225.) gegen Euler's Einwendung (in „Comm. Ac. Petrop.“ T. IX. p. 226), daß man nämlich zur Berechnung der Zahl für die Peripherie ($= 2\pi$) bis auf 100 Decimal-

stellen 10^{50} Glieder jener Reihe zusammen nehmen müßte, — in Schutz genommen, weil Leibniz die Reihe selbst nicht eigentlich zum Behufe jener genauen Berechnung bekannt gemacht habe. Indessen erhält man schon eine viel konvergentere Reihe, wenn man $\alpha = 30^0$ nimmt, indem dann $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0}$ $= \frac{1}{2} : \sqrt{(1-(\frac{1}{2})^2)} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$, folglich

$$\text{arc. } 30^0 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + - \ldots\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + - \ldots\right)$$

Eine noch konvergentere Reihe findet man, indem man $\alpha + \beta = 45^0$ setzt, wodurch $\text{tang}\,(\alpha+\beta) = 1 = \frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta}{1 - \text{tang}\,\alpha \,.\, \text{tang}\,\beta}$ (§. 19. nr. 86.), folglich $1 - \text{tang}\,\alpha \,.\, \text{tang}\,\beta = \text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta$, und hieraus

$\text{tang}\,\beta = \frac{1 - \text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\,\alpha} = \frac{1}{3}$ wird, wenn $\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{2}$ ist.

Man erhält demnach durch Substitution in 2)

$$3)\ \alpha + \beta = \tfrac{1}{4}\pi = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \ldots \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \ldots \end{array}\right\}$$

Diese zur Rectifikation der Kreislinie dienliche Reihe wurde zuerst von Euler (in „Introd. in Anal. Inf.“ L. 1. §. 142.), dann auch von Kästner und Lacroix angeführt. Grüson, der Uebersetzer des Werkes des Letztern („Lehrbegr. des Differ. und Integr.Calculs“) führt in einer Anmerkung die schon in seiner „Pinakothek“ bekannt gemachte Reihe:

$$\pi = 4\left[\begin{array}{l} \frac{2^3}{10} - \frac{2^5}{3.10^3} + \frac{2^7}{5.10^5} - \frac{2^9}{7.10^7} + \ldots \\ - \frac{1}{239} + \frac{1}{3.239^3} - \frac{1}{5.239^5} + \ldots \end{array}\right]$$

an, welche schon nach Klügel's Behauptung (Archiv der Mathem. 9. Heft) unsere vorige, nur bequemer ausgedrückte For-

mel ist, nach welcher wahrscheinlich Machin den Kreisumfang, oder 2π bis auf 100 Decimalstellen berechnete. (Vgl. Geom. §. 140. Anmerk. 1.).

Zusatz 2. Um umgekehrt eine trigonometrische Funktion, z. B. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tang\alpha$, ... durch eine unendliche Reihe der Potenzen des Winkels oder Bogens α selbst auszudrücken, nehme man an, daß in den Formeln I. und II. des §. 24. der Bogen α unendlich klein, folglich $\sin\alpha$ mit α zusammenfallend und daher $\cos\alpha$ oder jede Potenz von $\cos\alpha = 1$ sey; daß ferner n eine unendlich große Zahl sey, folglich $n\alpha$ noch als endlicher Bogen betrachtet werden könne. Diesen Bogen $n\alpha = w$ gesetzt, hat man $\sin\alpha = \alpha = \frac{w}{n}$, folglich nach I.

$$\sin w = \frac{\infty w}{\infty} - \frac{\infty^3}{1.2.3}\cdot\frac{w^3}{\infty^3} + \frac{\infty^5}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{w^5}{\infty^5} - + \ldots,$$

indem nämlich $n-1$ oder $\infty - 1 = \infty = n-2 = n-3 \ldots$ ist. Setzt man daher statt w wieder den Bogen α in die Gleichung, so ist

1) $\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{1.2\ldots7} + \frac{\alpha^9}{1.2\ldots9} - + \ldots$

und eben so

2) $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{\alpha^6}{1.2\ldots6} + \frac{\alpha^8}{1.2\ldots8} - + \ldots$*)

Wegen $\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ erhält man durch Division der Reihe 1) durch 2)

3) $\tang\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{1.3} + \frac{2\alpha^5}{1.3.5} + \frac{17.\alpha^7}{1.3.5.7.3} + \frac{62.\alpha^9}{1.3.5.7.9.3} + \ldots$

und hieraus wegen $\cot\alpha = \frac{1}{\tang\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4) $\cot\alpha = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{1.3} - \frac{\alpha^3}{1.3.5.3} - \frac{2\alpha^5}{1.5\ldots7.3.3} - \frac{\alpha^7}{1.5\ldots9.3} - \ldots$

Die in diesen beiden Zusätzen gegebenen Formeln bilden wesentlich die Lösung der Hauptaufgabe der Cyklometrie (vergl. §. 3. Zus. 2.).

*) Vergl. Euler's „Introd. in An. Infin.." T. I. §. 134. oder die vortreffliche Uebersetzung dieses Werkes von Michelsen. I. Th. (Berlin 1788).

§. 161. Fortsetzung.

67. Sey $dy = d\varphi . \sin\varphi^m . \cos\varphi^n$ zu integriren.

Nach §. 160. (a) (b) und Zus. 1. hat man

1) $d . \sin\varphi^\mu . \cos\varphi^\nu = \mu d\varphi \sin\varphi^{\mu-1} . \cos\varphi^{\nu+1} - \nu d\varphi \sin\varphi^{\mu+1} . \cos\varphi^{\nu-1}$.

Setzt man erstens statt $\cos\varphi^{\nu+1}$ die gleiche Größe $\cos\varphi^{\nu-1} . \cos\varphi^2 = \cos\varphi^{\nu-1}(1-\sin\varphi^2)$; so hat man

$d . \sin\varphi^\mu . \cos\varphi^\nu = \mu d\varphi \sin\varphi^{\mu-1} . \cos\varphi^{\nu-1} - (\mu+\nu) d\varphi . \sin\varphi^{\mu+1} . \cos\varphi^{\nu-1}$,

und hieraus

(I) $\int d\varphi \sin\varphi^{\mu+1} . \cos\varphi^{\nu-1} = -\frac{1}{\mu+\nu} \sin\varphi^\mu \cos\varphi^\nu + \frac{\mu}{\mu+\nu} \int d\varphi . \sin\varphi^{\mu-1} . \cos\varphi^{\nu-1}$.

Setzt man zweitens in 1) statt $\sin\varphi^{\mu+1}$ die gleiche Größe $\sin\varphi^{\mu-1} . \sin\varphi^2 = \sin\varphi^{\mu-1}(1-\cos\varphi^2)$; so findet man auf ähnliche Weise

(II) $\int d\varphi \sin\varphi^{\mu-1} . \cos\varphi^{\nu+1} = \frac{1}{\mu+\nu} \sin\varphi^\mu \cos\varphi^\nu + \frac{\nu}{\mu+\nu} \int d\varphi . \sin\varphi^{\mu-1} \cos\varphi^{\nu-1}$.

In (I) nun $\mu+1 = m$ und $\nu-1 = n$ gesetzt, ist

2) y oder $\int d\varphi . \sin\varphi^m . \cos\varphi^n = -\frac{\sin\varphi^{m-1} . \cos\varphi^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int d\varphi \sin\varphi^{m-2} . \cos\varphi^n$.

In (II) eben so $\mu-1 = m$ und $\nu+1 = n$ gesetzt, ist

3) $y = \frac{\sin\varphi^{m+1} . \cos\varphi^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int d\varphi . \sin\varphi^m . \cos\varphi^{n-2}$.

Setzt man nun in 2) $m-2$ statt m und in 3) $n-2$ statt n; so bringt man auf ähnliche Weise die Integrale der zweiten Seite jener Gleichungen auf $\int d\varphi . \sin\varphi^{m-4} . \cos\varphi^n$ und $\int d\varphi \sin\varphi^m . \cos\varphi^{n-4}$; u. s. w. Woraus erhellt, daß das vorgegebene Integral entweder auf $\int d\varphi \cos\varphi^n$ oder $\int d\varphi \sin\varphi^m$, oder

oder auf $\int d\varphi \sin\varphi^m . \cos\varphi$ oder $\int d\varphi \sin\varphi . \cos\varphi^n$ gebracht werden könne.

Die letzteren Integrale aber findet man sogleich, indem man in 2) $m = 1$ setzt. Weil nun das letzte Glied verschwindet; so ist

$$\int d\varphi . \sin\varphi \cos\varphi^n = -\frac{1}{n+1} \cos\varphi^{n+1} + C;$$

eben so aus 3), $n = 1$ gesetzt, ist

$$\int d\varphi . \cos\varphi \sin\varphi^m = \frac{1}{m+1} \sin\varphi^{m+1} + C.$$

Allein die ersteren Integrale bringt man durch fortgesetzte Reduktion zuletzt auf

$\int d\varphi = \varphi + C$ oder $\int d\varphi . \cos\varphi = \sin\varphi + C$, oder
$\int d\varphi \sin\varphi = -\cos\varphi + C$ (§. 160.).

Denn für $m = 0$ ist aus 3)

$$4) \int d\varphi . \cos\varphi^n = \frac{\sin\varphi \cos\varphi^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} \int d\varphi . \cos\varphi^{n-2},$$

und für $n = 0$ ist aus 2)

$$5) \int d\varphi . \sin\varphi^m = -\frac{\cos\varphi . \sin\varphi^{m-1}}{m} + \frac{m-1}{m} \int d\varphi . \sin\varphi^{m-2}.$$

Dann in 4) $n = 2$ statt n und in 5) $m - 2$ statt m gesetzt, bringt man eben so $\int d\varphi . \cos\varphi^{n-2}$ auf $\int d\varphi . \cos\varphi^{n-4}$, und $\int d\varphi . \sin\varphi^{m-2}$ auf $\int d\varphi . \sin\varphi^{m-4}$; u. s. w., also obige Integrale endlich auf die vorhin angegebenen.

Führt man die gezeigte Rechnung durch; so findet man allgemein:

$$(III) \int d\varphi . \sin\varphi^m = -\frac{1}{m} \cos\varphi (\sin\varphi^{m-1} + A \sin\varphi^{m-3} + B . \sin\varphi^{m-5} + \ldots) + M\varphi + C;$$

$$(IV) \int d\varphi \cos\varphi^n = \frac{1}{n} \sin\varphi (\cos\varphi^{n-1} + A' \cos\varphi^{n-3} + B' . \cos\varphi^{n-5} + \ldots) + M'\varphi + C.$$

In (III) ist $A = \frac{m-1}{m-2}$; $B = \frac{m-1 . m-3}{m-2 . m-4} = \frac{m-3}{m-4} A$;

$C = \frac{m-1 . m-3 . m-5}{m-2 . m-3 . m-6} = \frac{m-5}{m-6} B$; u. s. w. $M = \frac{m-1 . m-3 \ldots 1}{m . m-2 . m-4 \ldots 2}$.

Auf gleiche Weise hat man A′, B′, ... indem man statt m setzt n. Uebrigens wird bei Anwendung dieser Reihen jede Reihe so weit fortgesetzt, bis man auf das Glied kommt, in welchem $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ die kleinsten + Exponenten erhalten. Sind m, n ungerade Zahlen, so fallen $M\varphi$, $M'\varphi$ weg.

Beispiel. Für $m=6$ wird in (III) schon $\sin\varphi^{m-5}=\sin\varphi$, daher

$$\int d\varphi.\sin\varphi^6=-\frac{1}{6}\cos\varphi\left(\sin\varphi^5+\frac{5}{4}\sin\varphi^3+\frac{5.3}{4.2}\sin\varphi\right)+\frac{5.3.1}{6.4.2}\varphi$$

Für $m=7$, wo $M=0$, hätte man lediglich die Coefficienten A, B, ... zu berechnen.

Zusatz 1. Nach §. 18. nr. 71. ist

$$\int d\varphi.\cos m\varphi.\cos n\varphi=\tfrac{1}{2}\int d\varphi.\cos(m+n)\varphi+\tfrac{1}{2}\int d\varphi\cos(m-n)\varphi,$$

und nach §. 161. (p) ist

$$\int d\varphi.\cos(m+n)\varphi=\frac{1}{m+n}\sin(m+n)\varphi, \text{ und } \int d\varphi.\cos(m-n)\varphi=\frac{1}{m-n}\sin(m-n)\varphi.$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man die Differenziale, in welchen Produkte aus Potenzen des Sinus und Cosinus vorkommen, ebenfalls integriren, indem sich nach den Formeln §. 24. Zus. 4. diese Potenzen durch endliche Reihen trigonometrischer Funktionen vielfacher Winkel oder Bogen ausdrücken lassen. Weil z. B.

$\cos\varphi^3=\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos 3\varphi$ und $\sin\varphi^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi$, daher

$\cos\varphi^3.\sin\varphi^2=\frac{3}{8}\cos\varphi+\frac{1}{8}\cos 3\varphi-\frac{3}{8}\cos 2\varphi.\cos\varphi$

$-\frac{1}{8}\cos 3\varphi.\cos 2\varphi$ ist;

so hat man

$$\int d\varphi.\cos\varphi^3.\sin\varphi^2=\tfrac{3}{8}\int d\varphi\cos\varphi+\tfrac{1}{8}\int d\varphi\cos 3\varphi$$
$$-\tfrac{3}{8}\int d\varphi.\cos 2\varphi.\cos\varphi-\tfrac{1}{8}\int d\varphi.\cos 3\varphi.\cos 2\varphi,$$

welche Integrale denn nach dem vorhin Erörterten leicht gefunden werden. So ist z. B. für $m=3$ und $n=2$

$$\int d\varphi.\cos 3\varphi.\cos 2\varphi=\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{5}\sin 5\varphi+\tfrac{1}{2}\sin\varphi+C \text{ (vergl. M. Hirsch's V. Integr.taf.).}$$

Zusatz 2. Für $-n$ hat man nach 3)

$$\int\frac{d\varphi.\sin\varphi^m}{\cos\varphi^n}=\frac{1}{m-n}\cdot\frac{\sin\varphi^{m+1}}{\cos\varphi^{n+1}}-\frac{n+1}{m-n}\cdot\int\frac{d\varphi.\sin\varphi^m}{\cos\varphi^{n+2}}.$$

Hierin statt n gesetzt n—2, ist

$$\int\frac{d\varphi\,.\sin\varphi^m}{\cos\varphi^{n-2}}=\frac{1}{m-n+2}\cdot\frac{\sin\varphi^{m+1}}{\cos\varphi^{n-1}}-\frac{n-1}{m-n+2}\int\frac{d\varphi\sin\varphi^m}{\cos\varphi^n}.$$

Hieraus das letzte Integral entwickelt, folgt

$$\int\frac{d\varphi\sin\varphi^m}{\cos\varphi^n}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin\varphi^{m+1}}{\cos\varphi^{n-1}}-\frac{m-n+2}{n-1}\int\frac{d\varphi\,.\sin\varphi^m}{\cos\varphi^{n-2}}.$$

Da in dem letzten Integrale die Potenz von cos φ um 2 Grade niedriger, als im vorgegebenen, ist; so erhellt wieder, daß dieses Integral durch allmählige Reduktion zuletzt auf $\int\frac{d\varphi\,.\sin\varphi^m}{\cos\varphi}$ gebracht werde.

Zur Auffindung aber dieses letzten Integrals ist für n = —1 nach 2)

$$\int\frac{d\varphi\,.\sin\varphi^m}{\cos\varphi}=-\frac{\sin\varphi^{m-1}}{m-1}+\int\frac{d\varphi\,.\sin\varphi^{m-2}}{\cos\varphi}.$$

Aus letzterm Integral erhellt, daß das vorgegebene endlich auf $\int\frac{d\varphi\,.\sin\varphi}{\cos\varphi}=\int d\varphi\,.\tang\varphi=\lambda\sec\varphi$ (§. 160. (h)) zurückgeführt werde.

Zusatz 3. Setzt man eben in obigem 2) —m statt m und dann m—2 statt m; so findet man

$$\int\frac{d\varphi.\cos\varphi^n}{\sin\varphi^m}=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{\cos\varphi^{n+1}}{\sin\varphi^{m-1}}-\frac{n-m+2}{m-1}\int\frac{d\varphi\,.\cos\varphi^n}{\sin\varphi^{m-2}},$$

woraus erkannt wird, daß das vorgegebene Integral endlich entweder auf $\int d\varphi\,.\cos\varphi^n$, das aus (IV) bekannt ist, oder auf $\int\frac{d\varphi\,.\cos\varphi^n}{\sin\varphi}$ gebracht werde, das man so findet:

Man setze in 3) —1 statt m; so ist

$$\int\frac{d\varphi\cos\varphi^m}{\sin\varphi}=\frac{\cos\varphi^{n-1}}{n-1}+\int\frac{d\varphi\,.\cos\varphi^{n-2}}{\sin\varphi},$$

welche Formel zeigt, daß man zuletzt entweder auf $\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=\lambda\tang\frac{1}{2}\varphi+C$, oder auf $\int\frac{d\varphi\,.\cos\varphi}{\sin\varphi}=\int d\varphi\,.\cot\varphi=\lambda\sin\varphi+C$ (§. 160. (g) und (i)) komme.

Zuſatz 4. Setzt man in den Formeln des vorigen Zuſatzes 3 $n=0$; ſo iſt

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^m}=-\frac{\cos\varphi}{(m-1)\sin\varphi^{m-1}}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^{m-2}}.$$

Für $m=1$ iſt $\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi}$ ohnedieß bekannt. Und in der Formel des vorigen Zuſatzes 2 $m=0$ geſetzt, iſt

$$\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi^n}=\frac{\sin\varphi}{(n-1)\cos\varphi^{n-1}}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi^{n-2}}.$$

Auf gleiche Weiſe, wenn man in den Formeln der vorigen Zuſätze einmal m, dann n mit — nimmt, findet man

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^m.\cos\varphi^n}=\frac{1}{(n-1)\sin\varphi^{m-1}.\cos\varphi^{n-1}}+\frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^m.\cos\varphi^{n-2}}$$

oder $=-\frac{1}{(m-1)\sin\varphi^{m-1},\cos\varphi^{n-1}}+\frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^{m-2}.\cos\varphi^n}$.

Das vorgegebene Integral wird alſo zuletzt auf $\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=\lambda\tang\frac{1}{2}\varphi$, oder auf $\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\lambda\tang(45^0+\frac{1}{2}\varphi)$, oder auf $\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi.\cos\varphi}=\int\frac{d\varphi}{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}$ (§. 22. nr. 146) $=\int\frac{2d\varphi}{\sin 2\varphi}=\lambda\tang\varphi$ (§. 139. Zuſ. 2. (3)) gebracht.

Zuſatz 5. Die obigen Integrale, z. B. $\int d\varphi.\sin\varphi^m$, laſſen ſich noch auf eine andere Art finden. Weil nämlich $d\varphi=\frac{d.\sin\varphi}{\cos\varphi}$, daher auch $d\varphi.\sin\varphi^m=\frac{\sin\varphi^m.d.\sin\varphi}{\cos\varphi}$ iſt; ſo hat man, indem $\sin\varphi=x$, demnach $\cos\varphi=\sqrt{(1-x^2)}$ geſetzt wird,

$$\int d\varphi.\sin\varphi^m=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=C-x^{m-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{m-1}{1}\int x^{m-2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

vermöge §. 159. Form. (IV), in welcher $z=a+bx^n$ iſt, indem man nun $a=1$; $b=-1$; $n=2$; $p=-\frac{1}{2}$ und ſtatt $m-1$ ſetzt m, ſo daß das m der Formel nun $m+1$ wird. Der Kürze wegen $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ oder $\sqrt{(1-x^2)}=z$ geſetzt, iſt

$$1.\ \int\frac{x^m dx}{z}=C-x^{m-1}.z+\frac{m-1}{1}\int x^{m-2}.z.dx.$$

Eben so, indem man $p = \frac{1}{2}$ und statt $m-1$ setzt $m-2$, wodurch das m der Formel $= m-1$ und $(1-x^2)^{\frac{1}{2}+1} = \sqrt{(1-x^2)^3} = z^3$ erhalten wird, ist

2. $\int x^{m-2} z \, dx = -\frac{1}{3} x^{m-3} z^3 + \frac{m-3}{3} \int x^{m-4} z^3 \, dx$;

3. $\int x^{m-4} z^3 \, dx = -\frac{1}{5} x^{m-5} . z^5 + \frac{m-5}{5} \int x^{m-6} z^5 \, dx$;

4. $\int x^{m-6} z^5 \, dx = -\frac{1}{7} x^{m-7} . z^7 + \frac{m-7}{7} \int x^{m-8} z^7 . dx$.

U. s. w.

Daher speziell für $m = 1$ nach 1.

$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = C - z$. Für $m = 3$

$\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = C - x^2 z + \frac{2}{3} \int x^{m-2} z . dx = C - x^2 z - \frac{2}{3} z^3$ (nach 2).

Auf gleiche Weise werden entwickelt:

$\int \frac{x^5 \, dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = C - x^4 z - \frac{4}{3} x^2 z^3 - \frac{4.2}{3.5} z^5$, und

$\int \frac{x^7 \, dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = C - x^6 z - \frac{6}{5} x^4 z^3 - \frac{6.4}{3.5} x^2 . z^5 - \frac{6.4.2}{3.5.7} z^7$.

U. s. w.

Setzt man $\cos \varphi = y$, demnach $\sin \varphi = \sqrt{(1-y^2)}$; so ist $d\varphi = -\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$ (§. 138. Zus. 1.), daher das Integral $\int d\varphi \cos \varphi^m = -\int \frac{y^m \, dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$ vom entgegengesetzten Werthe des Integrals $\int d\varphi \sin \varphi^m$. Hiebei ist jedoch zu bemerken, daß, weil nach §. 138. Zus. 3. $-\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = +$ arc. cos y ist, in beiden Integralen das Glied, welches den Bogen φ enthält, $+$ behalte.

Zusatz 6. Auf ähnliche Weise kann man $\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi}$ ($= \lambda \tan g \frac{1}{2}\varphi$) auch durch $\int \frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$ ausdrücken. Denn $x = \sin \varphi$ gesetzt, ist $\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{d . \sin \varphi}{\sin \varphi . \cos \varphi} = \frac{d\varphi . \cos \varphi}{\sin \varphi . \cos \varphi}$ (§. 138.) $= \frac{d\varphi}{\sin \varphi}$. Daher denn auch

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}} = C + \lambda \tang \tfrac{1}{2}\varphi .$$

Es ist aber in nr. 59. (§. 159. Zus. 3.) $a=1$; $b=1$ und $\sqrt{(1-x^2)}=z$ gesetzt, allgemein:

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{(1-x^2)}} = C - \frac{1}{m-1}\cdot\frac{z}{x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}.z},$$

daher für $m=3$

$$\int \frac{dx}{x^3.z} \text{ oder } \int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1-x^2)}} = C - \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$= C - \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{x^2} + \frac{1}{2}\lambda \tang \frac{1}{2}\varphi .$$

Und für $m=5$ oder $m=7$ findet man eben so:

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{(1-x^2)}} = C - \frac{1}{4}\cdot\frac{z}{x^4} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$= C - \frac{1}{4}\cdot\frac{z}{x^4} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z}{x^2} + \frac{1.3}{2.4}\lambda \tang \frac{1}{2}\varphi ;$$

$$\int \frac{dx}{x^7\sqrt{(1-x^2)}} = C - \frac{1}{6}\cdot\frac{z}{x^6} - \frac{1.5}{4.6}\cdot\frac{z}{x^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z}{x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\lambda \tang \frac{1}{2}\varphi .$$

U. s. w.

Daher nun speziell:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}} = C - \frac{z}{x}.$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{(1-x^2)}} = C - \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{x^3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{x}.$$

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{(1-x^2)}} = C - \frac{1}{5}\cdot\frac{z}{x^5} - \frac{1.4}{3.5}\cdot\frac{z}{x^3} - \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{z}{x}.$$

U. s. w.

§. 162. Fortsetzung.

68. Sey $dy = \frac{d\varphi}{(a+b.\cos\varphi)^n}$ zu integriren.

Setzt man $x = a + b.\cos\varphi$, daher $dx = -b.d\varphi \sin\varphi$; $\cos\varphi = \frac{x-a}{b}$; $\cos\varphi^2 = \frac{x^2-2ax+a^2}{b^2}$; $\sqrt{(1-\cos\varphi^2)} = \sin\varphi = \frac{\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}}{b}$; so hat man

$$d\varphi = -\frac{dx}{b.\sin\varphi} = -\frac{dx}{\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}}; \text{ folglich}$$

$$y = \int \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n} = -\int \frac{dx}{x^n\sqrt{(b^2-a^2+2ax-x^2)}} + C.$$

Hieraus erhellt, daß die Integrale von dieser Form nach den schon oben im §. 159. Zuſ. 3. nr. 61. und nr. 62. angeführten Formeln gefunden werden.

Zuſatz. Spezielle Fälle:

1) Für $n=1$ und $a=b$ iſt $\int \frac{d\varphi}{(a+b.\cos\varphi)} = \frac{1}{a}\int \frac{d\varphi}{1+\cos\varphi} =$
$\frac{1}{a}\int \frac{d\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi^2}$ (§. 15. nr. 43.) $= \frac{1}{a}\tang\frac{1}{2}\varphi + C$ (§. 160. (c)).

2) Für $n=1$ und $b^2>a^2$ hat man, für x ſeinen Werth geſetzt,

$$y = -\int \frac{dx}{x\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}},$$

indem man nämlich $a^2-b^2=+\alpha$; $2a=\beta$ und $-1=\gamma$ macht. Daher denn nach der im §. 159. Zuſ. 3. unter nr. 65. (ρ) angeführten Formel, indem man obige Werthe und den für $x=a+b.\cos\varphi$ ſubſtituirt und reducirt,

$$y = -\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\lambda\frac{-2b(b+a\cos\varphi)+2\sqrt{(b^2-a^2)}\sqrt{(b^2-b^2\cos\varphi^2)}}{a+b.\cos\varphi}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\lambda\frac{-2b(b+a\cos\varphi)+2b\sqrt{(b^2-a^2)}\sqrt{(1-\cos\varphi^2)}}{a+b.\cos\varphi}.$$

Nimmt man den Logarithmus des gemeinſchaftlichen Faktors 2b mit zur Konſtante, und ſetzt $\sin\varphi$ ſtatt $\sqrt{(1-\cos\varphi^2)}$; ſo iſt

$$y = -\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\lambda\frac{-(b+a\cos\varphi)+\sin\varphi\sqrt{(b^2-a^2)}}{a+b.\cos\varphi}$$
$$= +\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\lambda\frac{a+b.\cos\varphi}{-(b+a\cos\varphi)+\sin\varphi\sqrt{(b^2-a^2)}}.$$

Zähler und Nenner des letzten Bruches mit $b+a\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{(b^2-a^2)}$ multiplizirt und den neuen Nenner $-(a+b\cos\varphi)^2$ gegen den Faktor $a+b\cos\varphi$ des Zählers reduzirt, hat man auch:

$$y = \frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\lambda - \frac{b+a.\cos\varphi+\sin\varphi+\sqrt{(b^2-a^2)}}{a+b.\cos\varphi}.$$

Weil man endlich letztere Größe als mit $\sqrt{-1}$ multiplizirt betrachten und den Logarithmus dieses Faktors mit in die Konstante rechnen kann; so ist

$$y = \int \frac{d\varphi}{a + b.\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)}} . \lambda \frac{b + a.\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{(b^2 - a^2)}}{a + b.\cos\varphi}.$$

3) Für $n = 1$, aber $b^2 < a^2$, folglich $b^2 - a^2 = -\alpha$ oder $+\alpha = a^2 - b^2$ hat man nach der im §. 159. Zus. 5. unter Nr. 63. für den Fall, daß $-\alpha$ gilt, entwickelten Formel $\left(y = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{arc. cos.} \frac{2\alpha - \beta x}{x\sqrt{(\beta^2 + 4\alpha\gamma)}}\right)$ nun durch Substitution, wie vorhin, und wegen $-\int$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \text{ arc. cos} - \frac{b + a\cos\varphi}{a + b\cos\varphi}.$$

Man kann aber auch, den letzten Bruch mit k bezeichnend, statt arc. cos k setzen 180^0 — arc. cos k, daher auch arc. cos k — 180^0 statt — arc. cos — k. Rechnet man nun den sich auf 180^0 oder π beziehenden Integraltheil mit zu C, so ist auch

$$y = \int \frac{d\varphi}{a + b\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \text{ arc. cos } \frac{b + a\cos\varphi}{a + b\cos\varphi} + C.$$

§. 163. Fortsetzung.

69. Sey $dy = Xdx.\text{arc. sin } x$, oder $dy = Xdx.\text{arc. cos } x$ zu integriren, wo X eine algebraische Funktion von x ist.

Weil d. Z. arc. sin $x = dZ\text{arc. sin } x + \frac{Zdx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ (§. 160. Nr. 66. (I)), oder $dZ = \text{arc. sin } x = \text{d. Z. arc. sin } x - \frac{Zdx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ (vergl. §. 152. Bem. zu nr. 17.); so hat man, indem $dZ = Xdx$ oder $Z = \int Xdx$ gesetzt wird, welches Integral aus einer der früheren Formeln bekannt ist,

1) $y = \int Xdx.\text{ arc. sin } x = Z.\text{ arc. sin } x - \int \frac{Zdx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$.

Eben so findet man

2) $\int Xdx.\text{ arc. cos } x = Z.\text{ arc. cos } x + \int \frac{Zdx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$, und

3) $\int Xdx.\text{ arc. tang } x = Z.\text{ arc. tang. } x - \int \frac{Zdx}{1 + x^2}$.

Kann in diesen Formeln das letzte Integral gefunden werden; so ist auch das gesuchte Integral bekannt. Einzelne Fälle gibt M. Hirsch S. 289 seiner Integr. Taf.

§. 164. Fortsetzung.

70. Sey $dy = \varphi^n \, d\varphi . \sin \varphi$ oder $dy = \varphi^n \, d\varphi . \cos \varphi$ zu integriren.

Setzt man, wie vorhin, $d\varphi \sin \varphi = dZ$ oder $Z = \int d\varphi \sin \varphi = -\cos \varphi$ (§. 160); so hat man auf gleiche Weise, wie im vorigen §.

1) $y = \int \varphi^n dZ = \varphi^n Z - n \int Z \varphi^{n-1} d\varphi$, und in Beziehung auf das letzte Integral durch ein ähnliches Reduktionsverfahren indem man $\int d\varphi . \cos \varphi = \sin \varphi = Z'$ setzt,

2) $\int \varphi^{n+1} d\varphi \cos \varphi = \varphi^{n+1} Z' - (n+1) Z' \int \varphi^{n+2} d\varphi$, daher durch Substitution dieses Werthes in 1) und der Werthe für Z und Z' das gesuchte Integral:

3) y oder $\int \varphi^n d\varphi . \sin \varphi = -\varphi^n . \cos \varphi + n\varphi^{n-1} \sin \varphi - n . n-1 . \int \varphi^{n-2} d\varphi . \sin \varphi$.

Da man auf gleiche Art

4) $\int \varphi^n d\varphi . \cos \varphi = \varphi^n . \sin \varphi + n\varphi^{n-1} \cos \varphi - n . n-1 . \int \varphi^{n-2} d\varphi . \cos \varphi$ findet; so erhellt, daß sich diese Integrale endlich auf $\int \varphi^0 d\varphi . \cos \varphi = \sin \varphi$, oder auf $\int \varphi^0 d\varphi . \sin \varphi = -\cos \varphi$, oder auf $\int \varphi \, d\varphi . \sin \varphi = -\varphi . \cos \varphi + \sin \varphi$ (nach 31) bringen lassen.

§. 165. Fortsetzung.

71. Sey $dy = e^{m\varphi} d\varphi . \sin \varphi^n$ zu integriren.

Setzt man wieder nach der Formel $\int Y dX = XY - \int X dY$ hier $e^{m\varphi} d\varphi = dX$ oder $X = \frac{e^{m\varphi}}{m}$ (§. 146. nr. 6.) und $Y = \sin \varphi^n$, folglich $dY = n . \sin \varphi^{n-1} d . \sin \varphi = n . \sin \varphi^{n-1} . d\varphi . \cos \varphi$; so hat man

a) $y = \frac{e^{m\varphi} \sin \varphi^n}{m} - \frac{n}{m} \int d\varphi e^{m\varphi} . \sin \varphi^{n-1} . \cos \varphi$; und durch ähnliche Reduktion, indem man wieder $dX = e^{m\varphi} d\varphi$, aber $Y = \sin \varphi^{n-1} . \cos \varphi$, demnach $dY = (n-1) \cos \varphi . \sin \varphi^{n-2} . d\varphi \cos \varphi - d\varphi \sin \varphi . \sin \varphi^{n-1}$ macht, wird

b) $\int d\varphi e^{m\varphi} \sin\varphi^{n-1}.\cos\varphi = \frac{e^{m\varphi}\sin\varphi^{n-1}.\cos\varphi}{m}$

$$-\frac{1}{m}\int e^{m\varphi} d\varphi\,[(n-1)\sin\varphi^{n-2}.\cos\varphi^2 - \sin\varphi^n].$$

Hierin $1-\sin\varphi^2$ statt $\cos\varphi^2$ gesetzt, wird das letzte Glied

$$=-\frac{n-1}{m}\int e^{m\varphi}\sin\varphi^{n-2}+\frac{n-1}{m}\int e^{m\varphi} d\varphi\sin\varphi^n+\frac{1}{m}\int e^{m\varphi} d\varphi\sin\varphi^n$$

$$=\frac{n-1}{m}\int e^{m\varphi}\sin\varphi^{n-2}.d\varphi+\frac{n}{m}\int e^{m\varphi} d\varphi\sin\varphi^n.$$

Substituirt man den ganzen Werth aus b) in a); so ist

$$y=\frac{e^{m\varphi}\sin\varphi^n}{m}-\frac{ne^{m\varphi}\sin\varphi^{n-1}.\cos\varphi}{m^2}$$

$$+\frac{n.n-1}{m^2}\int e^{m\varphi} d\varphi.\sin\varphi^{n-2}-\frac{n^2}{m^2}y.$$

Daher $y+\frac{n^2}{m^2}y$ oder $\frac{m^2+n^2}{m^2}y =$ der vorigen Größe, d. i.

c) y oder $\int e^{m\varphi} d\varphi.\sin\varphi^n = \frac{e^{m\varphi}\sin\varphi^{n-1}(m\sin\varphi-n\cos\varphi)}{m^2+n^2}$

$$+\frac{n.n-1}{m^2+n^2}\int e^{m\varphi} d\varphi\sin\varphi^{n-2}.$$

Durch fortgesetzte Reduktion (wie für b)) kömmt man also, wenn $n =$ einer ganzen Zahl, zuletzt auf $\int e^{m\varphi} d\varphi\sin\varphi = \frac{e^{m\varphi}(m\sin\varphi-\cos\varphi)}{m^2+1}$ (vermöge derselben Formel).

Zusatz. Man entwickelt auf gleiche Weise:

$$\int e^{m\varphi}.d\varphi.\cos\varphi^n = \frac{e^{m\varphi}\cos\varphi^{n-1}(m.\cos\varphi+n\sin\varphi)}{m^2+n^2}$$

$$+\frac{n.n-1}{m^2+n^2}\int e^{m\varphi} d\varphi.\cos\varphi^{n-2}.$$

Vermöge dieser Formel ist für $n=0$ wieder

$\int e^{m\varphi} d\varphi = \frac{e^{m\varphi}}{m}$, und für $n=1$ ist

$$\int e^{m\varphi} d\varphi.\cos\varphi = \frac{e^{m\varphi}(m\cos\varphi+\sin\varphi)}{m^2+1}.$$

Bemerkung.

Die Methode, den Werth eines Integrals innerhalb Grenzen zu suchen, beruht auf folgenden Momenten:

Man findet ein Integral innerhalb bestimmter Werthe der veränderlichen Größe, wenn man z. B. für $\int X dx$ (wo X eine beliebige Funktion von x) die Konstante so bestimmt, daß das Integral für $x = a$ den Werth A, für $x = b$ den Werth B erhält. $B - A$ heißt denn der Werth des Integrals von $x = a$ bis $x = b$, oder $B - A$ ist der Werth des Integrals innerhalb der dem x gegebenen Werthe b, a. Wird daher das Integral so bestimmt, daß für $x = a = 0$ auch das Integral 0 wird, also $A = 0$ ist; so drückt, b für x gesetzt, B den Werth des Integrals von $x = 0$ bis $x = b$ aus.

Man setze ferner, $\int X dx$ sey auf $W + \int V dx$ (wo W und V wieder Funktionen von x sind) gebracht, und W verschwinde von $x = 0$ bis $x = b$; so ist $\int X dx$ innerhalb dieser Grenzen nur $= \int V dx$.

Es sey z. B. $X = \frac{x^{m-1}}{\sqrt{(b^2 - x^2)}}$ oder $\int X dx = \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)}}$.

Da das hier zu integrirende Differenzial unter der Formel nr. 55. des §. 159. enthalten ist, wenn man in dieser statt a, b, p, n resp. setzt $b^2, -1, -\frac{1}{2}, 2$; so hat man nach der dortigen Formel (V)

1) y oder $\int X dx = -\frac{x^{m-2}\sqrt{(b^2 - x^2)}}{m-1} + \frac{(m-2)b^2}{m-1} \int \frac{x^{m-3} dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)}}$.

Hiervon ist das erste Glied $= W$ für $x = 0$ sowohl, als für $x = b$ gleich 0, daher drückt das letzte Glied $= \int V . dx$ den Werth unseres gesuchten Integrals von $x = 0$ bis $x = b$ aus. Weiter statt m gesetzt $m + 2$, hat man auf ähnliche Art

2) y oder $\int V . dx$ oder $\int \frac{x^{m+2} dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)}} = \frac{mb^2}{m+1} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)}}$ von $x = 0$ bis $x = b$.

Für einfachere Fälle ist

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)}} = \text{arc. sin} \frac{x}{b}$ (§. 158. nr. 46.), und dieses Integral wird für $x = 0$ ebenfalls 0, aber für $x = b$ geht es in arc. sin $1 = 90^0 = \frac{1}{2}\pi$ über, d. i. von $x = 0$ bis $x = b$ ist $\int \frac{dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)}} = \frac{1}{2}\pi$.

4) Weil das Integral $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = \sqrt{(b^2-x^2)} + C$ für $x = 0$ verschwindet, und daher die Konstante $= b$, also das vollständige Integral $= b - \sqrt{(b^2-x^2)}$ wird; so hat man für $x = b$ den Werth jenes Integrals $= b$.

Für $m = 1$ in 2) ist in diesem zusammengesetzten Falle

5) $\int \frac{x^2.dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = \frac{1}{2}b^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = \frac{1}{2}b^2.\frac{1}{2}\pi$ (nach 3)).

Für $m = 2$ ist

$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = \frac{2}{3}b^2 \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = \frac{2}{3}b^3$ (nach 4)); eben so:

$\int \frac{a^4\,dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = \frac{1}{4}b^2 \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = \frac{1.3}{2.4}b^4.\frac{1}{2}\pi$ nach 5)), und

$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = \frac{2}{5}b^2 \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = \frac{2.4}{3.5}b^5.$

u. s. w.

Also ist für $x = o$ bis $x = b$ allgemein:

$\int \frac{x^r.dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ 2r}b^r.\frac{1}{2}\pi$, und

$\int \frac{x^{r+1}dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = \frac{2.4.6\ldots.\ 2r}{3.5.7\ldots(2r+1)}b^{r+1}$. (Vergl. §. 159. Zus. 2)

d.

Integrale in Beziehung auf Differenzialgleichungen des ersten Grades von der Form $Pdx + Qdy = o$.

§. 166. Erörterung.

Sey U eine aus x und y zusammengesetzte Funktion, so daß $dU = Pdx + Qdy$ wird, und entweder eine der Größen P, Q oder beide Größen Funktionen von x und y zugleich sind; so ist offenbar, daß, wenn $U =$ einer Konstanten C, demnach auch $dU = o$ wird, die Differenzialgleichung $Pdx + Qdy = o$ entstehe, folglich auch umgekehrt von $Pdx + Qdy = o$ die Integralgleichung sey $U = C$.

§. 167. Fortsetzung.

Die Bedingungsgleichung, daß $dU = Pdx + Qdy$ ein wirkliches Differenzial einer Funktion U von zwei Variablen x, y sey, ist

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Jeder dieser Ausdrücke z. B. $\frac{dP}{dy}$ bedeutet den Differenzialquotienten, den man erhält, wenn P bloß nach y (y nur als variabel betrachtet) differenziirt wird. Denn eine Funktion U von x und y kann man durch die Reihe:

$U = Ax^my^n + Bx^py^q + Cx^ry^s + \ldots$ darstellen, daher

$dU = (Amy^nx^{m-1} + Bpy^qx^{p-1} + Cry^sx^{r-1} + \ldots)\,dx$

$\quad + Anx^my^{n-1} + Bqx^py^{q-1} + Csx^ry^{s-1} + \ldots)\,dy.$

Läßt man Pdx das erste dieser Produkte, und Qdy das zweite bedeuten; so hat man

$dU = Pdx + Qdy$, oder es ist

$P = Amy^nx^{m-1} + \ldots$ und $Q = Anx^my^{n-1} + \ldots$

Weil nun, die erste Gleichung nur nach y und die zweite bloß nach x differenziirt, die gleichen Größen, nämlich

$dP = (Amny^{n-1}x^{m-1} + \ldots)dy$, und $dQ = (Anmx^{m-1}y^{n-1} + \ldots)dx$

gefunden werden; so erhellt die Gleichheit obiger Differenzialquotienten.

Zusatz 1. So oft also diese Bedingungsgleichung Statt findet, entspricht einer Differenzialgleichung von der Form $Pdx + Qdy = 0$ auch eine Integralgleichung $U = C$ (§. 166.)

Zusatz 2. Aus der Ungleichheit der aus einer gegebenen Differenzialgleichung jener Form entwickelten Werthe für $\frac{dP}{dy}$ und $\frac{dQ}{dx}$ würde man daher bestimmt auf ein Nichtentsprechen einer Integralgleichung schließen dürfen, könnte jene gegebene Gleichung nicht auch eine lediglich darum unvollständige seyn, weil ein gemeinschaftlicher Faktor L weggelassen wurde. So z. B. aus $3ydx + 2xdy = 0$ sind $P = 3y$ oder $\frac{dP}{dy} = 3$ und $Q = 2x$ oder $\frac{dQ}{dx} = 2$, d. i. beide Werthe ungleich. Allein differenziirt man $x^3y^2 = C$; so findet man die vollständige Gleichung $3x^2y^2dx + 2x^3ydy = 0$, aus welcher $P = 3x^2y^2$ und $\frac{dP}{dy} = 6x^2y = \frac{dQ}{dx}$ ist, und welcher demnach

die Integralgleichung $U = x^2y^2$ entspricht. Da folglich jene erste Gleichung bloß durch die erlaubte Weglassung des Faktors $x^2y\ (= L)$ aus dieser vollständigen Gleichung hervorging; so erhellt, daß man in einzelnen Fällen gleiche Differenzialquotienten bekomme, indem man die vorgegebene Differenzialgleichung mit einer gewissen Größe L multiplizirt, wodurch dann $d\left(\frac{LP}{dy}\right) = d\left(\frac{LQ}{dx}\right)$ wird.

§. 168. Aufgabe. Vollständige oder unvollständig gemachte Differenzialgleichungen von der Form

$$Pdx + Qdy = 0$$

zu integriren.

Auflösung 1. 1) Man integrire Pdx so, daß man nur x als veränderlich betrachtet, und setze das Integral $= W$.

2) Dieses W differenziire man wieder, wobei x und y als veränderlich betrachtet werden, folglich $dW = Pdx + Gdy$, wo G für sich allein dem partiellen Differenzialquotienten $\frac{dW}{dy}$ gleich ist, und

3) Die Gleichung $\frac{dP}{dy} = \frac{dG}{dx}$ gilt, weil dW ein vollständiges Differenzial einer Funktion von x und y seyn soll.

4) In der Gleichung $U = Pdx + Qdy$ die Größe $Q = G + H$ gesetzt, ist

$$dU = Pdx + (G + H)\,dy \text{ und}$$
$$\frac{dP}{dy} = \frac{d(G+H)}{dx} = \frac{dG}{dx} + \frac{dH}{dx}.$$

Allein nach 3) ist auch $\frac{dP}{dy} = \frac{dG}{dx}$, folglich ist $\frac{dG}{dx} = \frac{dG}{dx} + \frac{dH}{dx}$, woraus folgt, daß, soll diese Gleichung bestehen, $\frac{dH}{dx} = 0$ seyn müsse, folglich $H\ (Q - G)$ keine Funktion von x, sondern bloß von y, demnach auch

5) dessen Integral bloß $= \int Hdy$ seyn könne. Man hat also

$$U = \int(Pdx + Gdy) + \int Hdy$$
$$= W + \int Hdy \text{ (nach 2)). Endlich}$$

6) $U = C$, d. i. $W + \int Hdy = C$.

7) Man kann auch zuerſt Qdy nach y integriren, x als beſtändig betrachtend. Iſt dieſes Integral $= Z$ und deſſen Differenzial (wie unter 2)) $dZ = Qdy + Kdx$; ſo findet man, wie oben, daß $P - K = H'$ nur allein eine Funktion von x (wie vorhin H nur eine Funktion von y) ſeyn könne, folglich die Integralgleichung von $Pdx + Qdy = 0$ nun ſeyn müſſe

$$Z = \int H' . dx + C.$$

Mit Hinſicht auf beide Fälle iſt alſo die kurze Regel dieſe: Man ſuche $W = \int Pdx$ (nach x integrirend), oder $Z = \int Qdx$ (nur nach y integrirend); dann den partiellen Differenzialquotienten $\frac{dW}{dy} = G$, oder $\frac{dZ}{dx} = K$. Setze ferner $Q - G = H$, oder $P - K = H'$; ſo iſt die geſuchte, der Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ entſprechende, Integralgleichung entweder $W + \int Hdy = C$, oder $Z + \int H'dx = C$.

Beiſpiel 1. $(ax + by + f)dx = (bx + cy + g)dy = 0$ zu integriren.

Hier iſt $P = ax + by + f$, folglich $\frac{dP}{dy} = b$ (bloß nach y differenziirt); ferner $Q = bx + cy + g$, daher $\frac{dQ}{dx} = b$, d. i. $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, ſohin jene Gleichung integrirbar.

Nun iſt $W = \int Pdx = \int (ax + by + f)dx =$ (nach x integrirt) $\frac{1}{2}ax^2 + bxy + fx$, demnach (durch partielle Differenziirung nach y) $\frac{dW}{dy} = bx = G$; $H = Q - G = cy + g$ und $\int Hdy = \int (cy + g)dy = \frac{1}{2}cy^2 + gy$. Demnach durch Subſtitution in $W + \int Hdy = C$ die geſuchte Integralgleichung:

$$\frac{1}{2}ax^2 + bxy + fx + \frac{1}{2}cy^2 + gy = C.$$

Beiſpiel 2. Von $\frac{dy}{y} = \frac{ady - ydx}{y\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ die Integralgleichung zu finden.

Dieſe Gleichung auf Null und die Glieder auf einerlei Nenner gebracht, iſt

$$\frac{dy\sqrt{(x^2 + y^2)} - xdy + ydx}{y\sqrt{(x^2 + y^2)}} = 0,$$

$$\text{oder } \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}\right) = 0.$$

Hier ist sohin $P = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ und dP (nach y) $= d.(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ $= -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy$, oder $\frac{dP}{dy} = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Ferner ist hier $Q = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(x^2+y^2)}}$ und dQ (nach x) $= -\frac{dx}{y}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ $+ \frac{1}{y}x^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dx$, daher $\frac{dQ}{dx} = \frac{-1}{y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^2}{y(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(x^2+y^2)+x^2}{y(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ $= \frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; also $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, d. i. die vorgegebene Gleichung integrirbar.

Um weiter $W = \int P dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ zu finden, setze man in nr. 62 (d. §. 159. Zus. 6.) $\alpha = y^2$; $\beta = 0$; $\gamma = 1$; so hat man

$$W = \lambda(2x + 2\sqrt{(x^2+y^2)}) = \lambda 2 + \lambda(x + \sqrt{(x^2+y^2)}).$$

Diese Größe nach y differenziirt, wird, weil $d(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ ist, nach der Formel $d.\lambda y = \frac{dy}{y}$ der partielle Differenzialquotient $\frac{dW}{dy} = \frac{y}{[x+\sqrt{(x^2+y^2)}]\sqrt{(x^2+y^2)}} =$ (Zähler und Nenner mit $-x+\sqrt{(x^2+y^2)}$ multiplizirt, dann reducirt) $\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(x^2+y^2)}} = G$.

Also $A = Q - G = 0$, folglich auch $\int H dy = 0$, und die Integralgleichung bloß $W = C$, d. i. (wenn $\lambda 2$ mit zur Konstante gerechnet wird)

$$\lambda(x + \sqrt{(x^2+y^2)}) = C.$$

§. 169. Fortsetzung. Um den gemeinschaftlichen Faktor L (§. 167. Zus. 2.) in wenigen einzelnen Fällen zu bestimmen, dient folgendes Verfahren:

Es ist, wie im cit. Zus. bemerkt wurde,

$$\frac{d.LP}{dy} = \frac{d.LQ}{dx}, \text{ oder } P.\frac{dL}{dy} + L.\frac{dP}{dy} = Q.\frac{dL}{dx} + L.\frac{dQ}{dx},$$

$$\text{oder } Q.\frac{dL}{dx} - P.\frac{dL}{dy} = L\left[\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right].$$

Man

Man setze nun statt des ersten Faktors Q den aus $Pdx+Qdy=0$ entwickelten Werth $-\frac{Pdx}{dy}$, und bringe den Divisor dy weg; so hat man

$$1) \quad -P\left(\frac{dL}{dx}.dx+\frac{dL}{dy}.dx\right)=L.dy\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right).$$

Wie ferner in $dU=Pdx+Qdy$, wo U eine Funktion von x und y ist, P nichts anders bedeutet, als daß man U nach x differenzirt, was durch $\frac{dU}{dx}$ angedeutet wird, und Aehnliches von Q gilt, also jene Gleichung auch gleichbedeutend mit $dU=\frac{dU}{dx}.dx+\frac{dU}{dx}.dy$ ist; eben so ist auch, weil L ebenfalls eine Funktion von x und y ist, $dL=\frac{dL}{dx}.dx+\frac{dL}{dy}.dy$. Man hat daher statt 1) die Gleichung:

$-P.dL=L.dy\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)$, und hieraus, indem $\frac{1}{P}\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=M$ gesetzt wird,

$$2) \quad \frac{dL}{L}=-M.dy.$$ Also durch Integration:

$$3) \quad \lambda L=-\int M.dy, \text{ oder } L=e^{-\int M.dy}, \text{ und eben so,}$$

indem man $\frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=N$ setzt, $L=e^{\int N.dx}$.

Man kann also den Faktor L unmittelbar bestimmen, wenn M entweder nur einer Funktion von y, oder N nur einer Funktion von x gleich ist, was durch M.dy oder N.dx angedeutet wird.

Beispiel. Die Integralgleichung von

$$(Xy-X')dx+dy=0$$

zu finden, wo X, X' bloß Funktionen von x sind.

Hier ist $P=Xy-X'$, also $\frac{dP}{dy}=X$; aber $Q=1$, daher $\frac{dQ}{dx}=0$, folglich jetzt N bloß eine Funktion von x, d. i. $N=X$ und der Faktor $L=e^{\int X dx}$.

Man hat also statt der Normgleichung $Pdx + Qdy = 0$ nun wirklich $LPdx + LQdy = 0$. Daher nun $W = \int LPdx$ (nach x) $= \int e^{\int Xdx}(Xy - X')dx = y\int e^{\int Xdx}.dx - \int e^{\int Xdx}.X'dx = y.e^{\int Xdx} - \int e^{\int Xdx}.X'dx$. (§. 146. nr. 6.). Demnach

dW (nach y) $= dy.e^{\int Xdx}$, d. i. $\frac{dW}{dy} = e^{\int Xdx} = G$,

und $H = Q - G =$ (hier) $LQ - G = e^{\int Xdx} - e^{\int Xdx} = 0$; folglich die Integralgleichung:

$$W = C \text{ oder } ye^{\int Xdx} - \int e^{\int Xdx}X'dx = C, \text{ und}$$

$$y = e^{-\int Xdx}\left[C + \int e^{\int Xdx}.X'dx\right],$$

welche Integrale aus den bisher aufgestellten Formeln als bekannt zu betrachten sind.

§. 170. Auflösung 2. der Aufg. §. 168.

Wenn Y bloß von y und X bloß von x eine Funktion ist; so sind in der Gleichung $Ydy = Xdx$ die Veränderlichen x, y schon so von einander gesondert, daß man nur Ydy und Xdx nach den aufgestellten Formeln zu integriren hat, um zwischen x und y die Integralgleichung zu bekommen. Es war daher natürlich, in diesem Absondern der veränderlichen Größen noch ein anderes Verfahren zu erkennen, Differenzialgleichungen des ersten Grades von der Form $Pdx + Qdy = 0$ zu integriren. Dieses Verfahren wird durch folgende, einzelne Fälle und Beispiele klar werden.

1. Wenn in $Pdx - Qdy = 0$ oder $Pdx = Qdy$ sowohl P als Q nicht nur eine Funktion von x und y zugleich (wie oben), sondern auch ein Produkt aus 2 Funktionen, einer von x und einer von y allein ist; so geschieht die erwähnte Absonderung der Veränderlichen dadurch, daß man mittelst Division die Funktion y aus P und die von x aus Q wegschafft.

In noch bestimmteren Fällen seyen P, Q gleichartige Funktionen (in welchen x, y auf gleichen Grad erhoben vorkommen). Man setze $y = ux$ und dividire P durch Q, so wird x abgesondert, und $\frac{P}{Q}$ wird $= U =$ einer Funktion von

u und $dy = Udx$. Aber wegen $y = ux$ ist auch $dy = udx + xdu$, daher auch $Udx = udx + xdu$ und $\frac{dx}{x} = \frac{du}{U-u}$, oder integrirt: $\lambda x = \int \frac{du}{U-u}$. Hierin $\frac{x}{y}$ statt u substituirt, hat man die gesuchte Integralgleichung zwischen x und y.

Beispiel. Sey $(ax+by)dx = (fx+gy)dy$ zu integriren. Hier ist, ux statt y gesetzt,

$\frac{P}{Q} = \frac{ax+bux}{fx+gux} = \frac{a+bu}{f+gu} = U$; daher

$U-u = \frac{a+(b-f)u-gu^2}{f+gu}$, folglich $\frac{dx}{x} = \frac{(f+gu)du}{a+(b-f)u-gu^2}$, oder

$\frac{dx}{x} = \frac{fgu+\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}b)du+(\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}b)du}{a+(b-f)u-gu^2}$, und, integrirt,

$\lambda x = C-\lambda\sqrt{(a+(b-f)u-gu^2)}+\frac{1}{2}(b+f)\int\frac{du}{a+(b-f)u-gu^2}$,

indem umgekehrt nach der Formel $d.\lambda z = \frac{dz}{z}$ offenbar

$d.\lambda\sqrt{(a+\ldots)} = \frac{\frac{1}{2}[a+(b-f)u-gu^2]^{-\frac{1}{2}}((b-f)-2gu)du}{\sqrt{(a+(b-f)u-gu^2)}}$,

und (durch Abkürzung und wegen $-\lambda) = \frac{(\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}b+gu)du}{a+(b-f)u-gu^2}$

ist. Das summatorische Glied unseres Integrals ist nach einer der Formeln nr. 30—34. des §. 152. als bekannt zu betrachten.

2. In $dy + Pydx = Qdx$ seyen die Größen P, Q Funktionen nur von x. Um nun die Variablen abzusondern, setze man $y = Xu$, wo X eine noch zu bestimmende Funktion von x ist. Die neue Gleichung ist denn

$$Xdu + udX + PXudx = Qdx.$$

Nimmt man an, X werde so bestimmt, daß in dieser Gleichung $dX + PXdx = 0$, folglich allein $Xdu = Qdx$ sey; so hat man $du = \frac{Qdu}{X}$. Nun ist unter derselben Voraussetzung $(dX + PXdx = 0)$

$\frac{dX}{X} = -Pdx$, also $\lambda X = -\int Pdx$, oder $X = e^{-\int Pdx}$, demnach $du = e^{\int Pdx} . Qdx$ und $u = \int e^{\int Pdx} . Qdx$, folglich

$$y = Xu = e^{-\int Pdx} . \int e^{\int Pdx} . Qdx.$$

Beispiel. Sey $dy + \frac{nydx}{\sqrt{(1+x^2)}} = adx$ zu integriren.

Hier ist $P = \frac{n}{\sqrt{(1+x^2)}}$ und $Q = a$. Daher nach nr. 48. des §. 158.

$$\int Pdx = n\lambda[\sqrt{(1+x^2)}+x] = \lambda[\sqrt{(1+x^2)}+x]^n,$$

folglich $e^{\int Pdx} = [\sqrt{(1+x^2)}+x]^n$, und

$e^{-\int Pdx}$ oder $\frac{1}{e^{\int Pdx}} = \left(\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}+x}\right)^n =$ (indem man Zähler und Nenner des Bruches mit $\sqrt{(1+x^2)}-x$ multiplizirt) $[\sqrt{(1+x^2)}-x]^n$. Hieraus folgt:

$$y = [\sqrt{(1+x^2)}-x]^n . \int adx [\sqrt{(1+x^2)}+x]^n.$$

Um den summatorischen Faktor zu entwickeln, setze man $\sqrt{(1+x^2)}+x = u$; so ist u^{-1} oder $\frac{1}{u} = \sqrt{(1+x^2)}-x$ (wie vorhin); eben so u^{-n} oder $\frac{1}{u^n} = [\sqrt{(1+x^2)}-x]^n$. Ferner entwickelt man $x = \frac{u^2-1}{2u}$, daher $dx = \frac{(1+u^2)du}{2u^2}$. Es wird demnach

$$\int u^n dx \text{ oder } \int dx [\sqrt{(1+x^2)}+x]^n = \int \frac{u^n(1+u^2)du}{2u^2}$$

$$= \int(\tfrac{1}{2}u^{n-2}du + \tfrac{1}{2}u^n du) = \frac{u^{n-1}}{2(n-1)} + \frac{u^{n+1}}{2(n+1)} + C.$$

Also

$$y = C . u^{-n} + \frac{au^{-1}}{2(n-1)} + \frac{au}{2(n+1)},$$

oder, die Werthe dieser Größen substituirt, ist

$$y = C[\sqrt{(1+x^2)}-x]^n + \frac{a.(\sqrt{(1+x^2)}-x)}{2(n-1)} + \frac{a.(\sqrt{(1+x^2)}+x)}{2(n+1)},$$

oder, indem man die Brüche auf einerlei Nenner bringt und dann gehörig reducirt,

$$y = C[\sqrt{(1+x^2)}-x]^n + \frac{na\sqrt{(1+x^2)}-ax}{n^2-1}.$$

(Vergleiche Klügel's „Mathem. Wörterbuch“ Art. Integralrechnung; Mayer's „Lehrbegr. der höheren Anal.“ Bd. II. V. bis IX. Kap., und Ohm's Lehrb. der höheren Analysis. 2ter Th. mit 54 Integraltafeln).

Schlußbemerkung,

oder

kurze Darstellung der Grundlage der Differenzial- und Integralrechnung nach Lagrange und Lacroix.

Bei Darlegung der Theorie der eben genannten Rechnung sind wir dem Wesen nach dem Erfinder dieser hochwichtigen Wissenschaft gefolgt. Leibniz nämlich stützte sie auf die Vorstellung des Unendlichen überhaupt und insbesondere auf die Vorstellung unendlich kleiner, d. i. in dem Zustande, wo sie in Nullen übergehen, betrachteter Größen. Fast gleichzeitig wurde Newton, die konstruirende Methode der alten Mathematiker vorziehend und dabei die Einführung des empirischen Begriffes der Bewegung nicht achtend, Erfinder der Fluxions-Rechnung. Ohne jenem Umstande würde derselbe höchst wahrscheinlich mit Leibniz'ens Ideengange zusammengetroffen seyn, wenn er die Vorstellung von den letzten Verhältnissen verschwindender Größen, welcher er sich in seinem unsterblichen Werke: „Philosophia naturalis principia mathematica“ bediente, unabhängig von einer durch Konstruktion geschaffener Grundlage verfolgt hätte. In der That war für Newton eben so wenig, als für die französischen Mathematiker die von Leibniz gewählte Einführung unendlich kleiner Größen, um die Natur einer Funktion zu erforschen, nicht der geringste Anstoß. Erst nachdem der Engländer mittelst Newton's Fluxions-Rechnung, der Deutsche und Franzose mittelst Leibniz's Differenzialcalcul bereits die wichtigsten, übereinstimmenden Resultate auf dem ganzen Gebiete der Mathematik freudig gewonnen hatten, fingen die Letztern an, die Haltbarkeit der Grundlage der Leibniz'schen Rechnung zu bezweifeln. Man glaubte, manches Fehlerhafte,

Widersprechende und wohl gar Ungereimte zu entdecken, jene Grundlage daher ganz oder zum Theile ändern zu müssen. Allein man bedachte nicht, daß die Vorstellung des Unendlichen überhaupt mit der Mathematik so innig verwebt sey, daß diese durch das Aufgeben oder Modifiziren eben jener Vorstellung wesentlich gefährdet werde. Leibniz selbst sagte aus, daß er erst durch das Studium der Mathematik eine klare Idee des Unendlichen gewonnen habe.

Lagrange, welcher den Begriff unendlich kleiner Größen, wie man ihn auch erläutern oder modifiziren möge, für unklar, und die Einführung der Bewegung in die Fluxions-Rechnung für ganz ungeeignet erklärte, stützte in seinem (1797 erschienenen, vom Prof. Grüson in's Deutsche übersetzten) Werke, „Theorie des fonctions analytiques etc.“ — die Differenzial-Rechnung auf die Entwickelung der Funktionen in Reihen. In demselben Jahre (1797) erschien auch das von Lacroix nach den von Lagrange schon früher in einer Abhandlung entwickelten Ideen bearbeitete Werk: „Traité du calcul differ. et integr.“ (von Grüson 1799 ebenfalls übersetzt). Die in beiden Werken erörterte Grundlage der neuen Rechnung (eigentlich Derivations-Rechnung), nach welcher es der Differenzialcalcul mit der Aufsuchung der Coefficienten (und ihrer Eigenschaften) der Glieder der für die Funktion entwickelten Reihe zu thun hat, von welchen Coefficienten der Integralcalcul wieder zur Funktion zurückgeht *), — empfahl sich den Mathematikern bald durch ihre Einfachheit in dem Grade, daß der neue Calcul mit seiner sehr bequemen Bezeichnungsweise auch in Deutschland eine immer größere Aufnahme findet. Die nachfolgende, möglichst kurze Darstellung jener Grundlage wird dem Anfänger vor Allem das ihm sehr zu empfehlende Studium der oben genannten Originalwerke Lagrange's und Lacroix's, und somit das richtige Auffassen der nach derselben Grundlage behandelten Wissenschaften erleichtern:

*) Vergl. des Grafen v. Buquoy kleine Schrift: „Zusammenstellung einiger vorzüglich scharfsinniger, schlau erdachter und subtil durchgeführter Methoden aus der höheren Analyse, ꝛc.“ (Leipz. b. Breitk. u. Härtel. 1829.) S. 15 bis 21.

1. Angenommen, daß sich in x^n, als einer Funktion von x, x in $x+k$ verändere, hat man

$$(x+k)^n = x^n + nx^{n-1}.k + \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}.k^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}.k^3 + \ldots.$$

wo das erste Glied x^n wieder die vorgegebene Funktion ist, die übrigen Glieder aber neue Funktionen von x, wie nx^{n-1}; $\frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}$; u. s. w. enthalten, welche als von der ersten Funktion x^n abgeleitet betrachtet werden müssen, und deren Betrachtung vom Werthe von x unabhängig ist.

2. Wenn man von den Nennern dieser Funktionen einstweilen absieht; so ist leicht zu bemerken, daß man jene neuen Funktionen aus x^n durch eine Folge ähnlicher Operationen ableiten kann. Da nämlich nx^{n-1} Coefficient von k in der Entwickelung von $(x+k)^n$ ist; so wird in der Entwickelung von $n(x+k)^{n-1}$ derselbe Coefficient von k seyn $n.n-1.x^{n-2}$; und in der Entwickelung von $n.n-1(x+k)^{n-2}$ wird eben dieser Coefficient von k seyn $n.n-1.n-2.x^{n-3}$; u. s. w.

Man kann also jede jener Funktionen

$$x^n,\ nx^{n-1},\ n.n-1.x^{n-2},\ n.n-1.n-2.x^{n-3},\ \ldots$$

(die erste, als gegebene Funktion, ausgenommen) finden, wenn man in der unmittelbar vorhergehenden $x+k$ statt x setzt, und dann den Coefficienten nimmt, welcher in der Entwickelung, die aus dieser Substitution entsteht, die erste Potenz von k multiplizirt.

3. Da, wie x^n, so auch jede andere Größe eine Funktion von x seyn kann; so bezeichnet man durch $f(x)$ allgemein die Funktion von x, und demnach den Zustand, in welchen $f(x)$ beim Aendern des x in $x+k$ übergeht, durch $f(x+k)$. Man hat daher, wie unter 1. die Entwickelung:

$$f(x+k) = X_0 + X_1 k + X_2 k^2 + X_3 k^3 + \ldots,$$

wo $X_0, X_1, X_2, \ldots$ wie oben $x^n, nx^{n-1}, \ldots$ Funktionen von x, unabhängig vom Werthe von k, sind. Macht man $k=0$, d. i. nimmt man keine Veränderung von

x an; so erhält man $f(x+k) = f(x) = X_0$, d. i. das erste Glied der Entwickelung ist immer = der vorgegebenen Funktion, so daß man für jeden Fall hat:

$$f(x+k) = f(x) + X_1 k + X_2 k^2 + \ldots$$

4. Wie sich nun unter 2. die Funktionen nx^{n-1}, $n.n-1\,x^{n-2}$, ... von einander und von der ursprünglichen Funktion durch ein gleichförmiges Verfahren ableiten ließen; eben so kann man darthun, daß auch, wenn man hier X_1 aus X_0 oder $f(x)$ zu bestimmen wüßte, sich durch eine Reihe ähnlicher Operationen X_2, X_3, ... finden lasse.

Zu diesem Zwecke setze man, daß die Variable einen neuen Zuwachs k' erhalte; so wird aus $f(x)$

$f(x+k') = f(x) + X_1 k' + X_2 k'^2 + X_3 k'^3 + \ldots$, wie in 3.

Nun sind X_1, X_2, ... in 3. Funktionen von X_0 oder X_1, folglich müssen sie, wenn man in denselben $x+k'$ statt k substituirt, eine Form annehmen, welche der für $f(x+k')$, die nun statt $f(x)$ steht, analog ist. Man hat daher:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = X_1 + X_1' k' + X_1'' k'^2 + X_1''' k'^3 + \ldots \\ X_2 = X_2 + X_2' k' + X_2'' k'^2 + X_2''' k'^3 + \ldots \\ X_3 = X_3 + X_3' k' + X_3'' k'^2 + X_3''' k'^3 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{wo } \begin{array}{l} X_1', \text{ und } X_1'' \\ X_2', \; " \; X_2'' \\ X_3', \; " \; X_3'' \\ \ldots\ldots \end{array}$$

neue Funktionen von x vorstellen, die eben so von X_1, X_2, X_3, ... abgeleitet sind, wie eben diese Letztern von der vorgegebenen Funktion $f(x)$.

Aus $f(x+k) = f(x) + X_1 k + X_2 k^2 + \ldots$ unter 3. wird demnach durch Substitution von $x+k'$ statt x in $f(x+k)$ und durch Substit. obiger Werthe für (fx), X_1; X_2; X_3, ...

$$f(x+k+k') = \begin{array}{l} f(x) \\ + X_1 k \\ + X_2 k^2 \\ + X_3 k^3 \\ \ldots\ldots \end{array} \left\{\begin{array}{l} + X_1 \\ + X_1' k \\ + X_2' k^2 \\ + X_3' k^3 \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} k' \left\{\begin{array}{l} + X_2 \\ + X_2'' k \\ + X_2'' k^2 \\ + X_3'' k^3 \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} k'^2 + \ldots.$$

5. Allein man kann auch $f(x+k+k')$ so betrachten und entwickeln, als habe k einen Zuwachs k' erhalten, und daher in der Entwickelung von $f(x+k) = f(x) + X_1 k + X_2 k^2 + \ldots$ statt k setzen $k+k'$; dadurch bekommt man

$f(x+k+k') = f(x) + X_1(k+k') + X_2(k+k')^2 + X_3(k+k')^3 + \ldots$,
oder, wenn man die Potenzen von $k+k'$ entwickelt und sie, wie oben, nach k', k'^2, k'^3, ... ordnet,

$$f(x+k+k') = \begin{matrix} f(x) \\ +X_1 k \\ +X_2 k \\ +X_3 k^3 \\ \ldots\ldots \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} + X^1 \\ +2X_2 k \\ +3X_3 k^2 \\ +4X_4 k^3 \\ \ldots\ldots \end{matrix} \right\} k' \left\{ \begin{matrix} + X_2 \\ + 2X_3 k \\ + 6X_4 k^2 \\ + 10X_5 k^3 \\ \ldots\ldots \end{matrix} \right\} k'^2 + \ldots$$

Da nun der für $f(x+k+k')$ unter 4. gefundene Werth gleich seyn muß dem nur so entwickelten Werthe derselben Größe, wie denn dieses auch mit den ersten Columnen unter 4. und 5. der Fall ist; so findet man, die zweiten Columnen vergleichend, daß

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1 & X_2 &= X_1 \\ X_1' &= 2X_2 & X_2 &= \frac{X_1'}{2} \\ X_2' &= 3X_3 \quad \text{folglich auch} & X_3 &= \frac{X_2'}{3} \text{ sey.} \\ X_3' &= 4X_4 & X_4 &= \frac{X_3'}{4} \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\ X_{n-1} &= nX_n, & X_n &= \frac{X_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Mehrere Columnen zu vergleichen, ist unnöthig, indem man aus den so eben angesetzten Gleichungen X_1, X_2, X_3, ... bestimmen kann, was nach 4. zu thun war, und nun gezeigt werden soll:

6. In $f(x+k)$ ist X_1 Coefficient von k, und indem wir X_1 dadurch aus $f(x)$ erhielten, daß wir x sich in $x+k$ verändern ließen, ist auch X_1 Funktion von $f(x)$. Gleichwie wir nun z. B. x^n als Funktion von x durch $f(x)$ bezeichnen; so kann auch X_1 als Funktion von $f(x)$ durch $f'(x)$ vorgestellt werden.

Allein wir bemerkten, daß X_2 gerade so von X_1 abgeleitet werde, wie X_1 von $f(x)$. Also wird X_2 auch nur dadurch Coefficient von k, daß man in $f'(x)$ sich x in $x+k$ ver-

ändern läßt, d. i. X_1 ist in der Entwickelung von $f(x+k)$ den Coefficient von k. Demnach muß man $X_{y'}$ als Funktion von $f'(x)$, durch $f''(x)$ vorstellen. Man hat also $X_1 = f'(x)$ und $X_{1'} = f''(x)$. Aber in der Gleichung unter 5. ist $X_2 = \frac{X_{1'}}{2}$; folglich hat man $X_2 = \frac{f''(x)}{2}$.

Ferner ist X_2 von X_1 abgeleitet, wie X_1 von $f(x)$. Aber $X_2 = \frac{f''(x)}{2}$. Läßt man hierin x sich in $x+k$ ändern; so wird X_2 Coefficient von k, daher Funktion von $\frac{f''(x)}{2}$, muß folglich gleichförmig durch $\frac{f'''(x)}{2}$ vorgestellt werden, oder es ist $X_{2'} = \frac{f'''(x)}{2}$. Aber unter 5. ist $X_3 = \frac{X_{2'}}{3}$; daher ist $X_3 = \frac{f'''(x)}{2.3}$.

Auf gleiche Weise findet man

$X_{3'} = \frac{f''''(x)}{2.3}$, demnach vermöge 5. $X_4 = \frac{f''''(x)}{2.3.4}$,

u. s. w., so daß allgemein ist:

$X_{n'-1} = \frac{f^n(x)}{1.2...n-1}$ und $X_n = \frac{f^n(x)}{1.2...n}$ oder $X_{n-1} = \frac{f^{n-1}(x)}{1.2...n-1}$.

7. Setzt man diese für $X_1, X_2, \ldots$ gefundenen Werthe in der Entwickelung unter 3.; so hat man

$$f(x+k) = f(x) + \frac{f'(x)}{1}k + \frac{f''(x)}{1.2}k^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}k^3 + \ldots$$

Diese Entwickelung ist denn der allgemeine Ausdruck des Werthes, den eine beliebige Funktion von x bekommt, wenn sich x in $x+k$ ändert, oder x einen Zuwachs k erhält. Zugleich ist klar, daß man zur Anwendung dieser Entwickelung des Werthes einer Funktion von x in besondern Fällen bloß wissen müsse, die Funktionen $f'(x), f''(x), \ldots$ von der vorgegebenen Funktion abzuleiten. Wenn z. B. $f(x) = x^n$ ist; so weiß man aus 2., daß $f'(x) = nx^{n-1}$; $f''(x) = n.n-1.x^{n-2}, \ldots$ sey. Diese Werthe in $f(x+k) = (x+k)^n$ substituirt, hat man **Newton's Binomialformel** (die, weil man nach 2. nur

die 2 ersten Glieder, die man auch a priori finden kann, wissen muß, hier auf eine eigene Art deducirt ist, und zwar unabhängig von der Beschaffenheit des Exponenten n).

8. Die Differenzialrechnung beschäftigt sich mit der Lösung der Aufgabe: von der erzeugenden Funktion $f(x)$ zu den abgeleiteten $f'(x)$, $f''(x)$, ... überzugehen, oder diese aus jener abzuleiten. Dagegen hat es die Integralrechnung mit der Lösung der Aufgabe zu thun: aus einer beliebigen abgeleiteten Funktion zu der erzeugenden zurückzugehen.

Wenn man nämlich von $f(x+k)$ die ursprüngliche Funktion $f(x)$ abzieht; so hat man

$$f(x+k) - f(x) = \frac{f'(x)}{1}k + \frac{f''(x)}{1.2}k^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}k^3 + \ldots$$

d. i der Unterschied zwischen dem ursprünglichen Zustande der Funktion $f(x)$ und dem Zustande, der aus der mit x vorgenommenen Veränderung entsteht, ist durch die Entwickelung gegeben, welche die zweite Seite jener Gleichung vorstellt, so daß es einerlei ist, jenen Unterschied oder diese Entwickelung, welche die abgeleiteten Funktionen enthält, zu kennen.

9. Nennt man das erste Glied dieser Entwickelung das Differenzial von $f(x)$ und bezeichnet es mit $df(x)$, wodurch man $df(x) = f'(x).k$ hat; so sieht man, daß die abgeleitete Funktion $f'(x)$ durch die Gleichung $f'(x) = \frac{df(x)}{k}$ bestimmt werden könne, indem man nämlich das Differenzial der gegebenen Funktion, oder, was dasselbe ist, das erste Glied von der Differenz zwischen den auf einander folgenden Werthen dieser Funktion durch den Zuwachs k dividirt.

Oder, wenn man der Gleichförmigkeit wegen statt k setzt dx; so ist $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Setzt man nun auch statt $x+k$ den Ausdruck $x+dx$; so findet man aus $f(x+dx)$ jenes Differenzial $df(x)$, wenn man sich bei der Entwickelung von $f(x+dx)$ auf die Glieder einschränkt, die mit der ersten Potenz von dx behaftet sind, und vom Resultate endlich $f(x)$ abzieht. Da man durch dieses Verfahren nur das erste Glied des erwähnten Unterschiedes finden will, um zu dem Ausdrucke

von $f'(x)$ zu gelangen, so abstrahirt man davon, welchen Werth dx, das einen Zuwachs überhaupt vorstellt, habe.

10. Eine Größe differenziiren, heißt ihr Differenzial suchen, und diese Operation selbst heißt Differenziirung.

11. Man kann jede der Funktionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... aus der vorhergehenden ableiten, und jede folgende auf die ursprüngliche Funktion beziehen.

Denn gleichwie $f(x+k) = f(x) + \frac{f'(x)}{1}k + \ldots$ ist; eben so ist auch $f'(x+k) = f'(x) + \frac{f''(x)}{1}k + \ldots$, u. s. w. Und so wie daher $f(x+k) - f(x) = f'(x).k + \ldots$, ist auch $f(x+k) - f'(x) = f''(x).k + \ldots$, u. s. w., oder dx statt k gesetzt, $f'(x+dx) - f'(x) = f''(x).dx$; und eben so $f''(x+dx) - f''(x) = f'''(x).dx$; u. s. w. Und so wie unter 9. $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ oder $f'(x).dx = df(x)$ ist, so ist auch

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)dx = df'(x); \\ f'''(x)dx = df''(x); \\ f''(x)dx = df'''(x); \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{ daher } \begin{array}{l} f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}; \\ f'''(x) = \frac{df''(x)}{dx}; \\ f''(x) = \frac{df'''(x)}{dx}; \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

So erhellt, wie jede Funktion aus der unmittelbar vorhergehenden abzuleiten ist, und wie man rückwärts jede folgende Funktion auf die ursprüngliche, als einzige, beziehen und von ihr ableiten könne. So, wenn man z. B. in $f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$ statt $f'(x)$ seinen Werth substituirte, hätte man

$$f''(x) = \frac{d.\frac{df(x)}{dx}}{dx}.$$

Allein die Bezeichnung würde dann zu complicirt. Um sie zu vereinfachen, verfahre man so:

12. Man betrachte z. B. in $f'(x)dx$ die Zunahme dx als konstant, lasse x in $x+dx$ übergehen; so hat man nach obigem Ausdrucke $(f'(x+dx) - (f''(x).dx)$ nun

$$f'(x+dx)\,dx - f'(x)dx = f''(x)dx\,.\,dx, \text{ oder}$$
$$[f'(x+dx) - f'(x)]\,dx = f''(x)\,dx^2,$$

indem man nämlich auch hier, wie oben, die übrigen, noch zum Unterschiede $f''(x)dx^2$ gehörigen Glieder der Reihe wegläßt. Auf gleiche Weise ist

$$(f''(x+dx) - f''(x))dx^2 = f'''(x)dx^2. \text{ U. s. w.}$$

Daher muß denn, gleichwie unter 11. $f''(x)\,dx = df'(x)$ war, auch

$$f''(x)\,dx^2 = df'(x)\,.\,dx;$$
$$f'''(x)\,dx^3 = df''(x)\,.\,dx^2;$$
$$f''''(x)\,dx^4 = df'''(x)\,.\,dx^3;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

seyn. Allein unter 11. war $f'(x)dx = df(x)$; folglich wird $f''(x)dx^2 = d.df(x) = d^2f(x)$; $f'''(x)dx^3 = d.d^2f(x) = d^3f(x)$ und $f''''(x)dx^4 = d^4f(x)$; u. s. w.

Hieraus folgt weiter:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx};\quad f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2};\quad f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3};\ldots$$

und allgemein: $f^n(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$.

Vergleicht man $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ mit dem unter 11. gefundenen $f''(x) = \frac{\frac{d.df(x)}{dx}}{dx}$; so sieht man, daß

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} \text{ mit } \frac{\frac{d.df(x)}{dx}}{dx} \text{ und allgemein}$$

$$\frac{d^{m+n}f(x)}{dx^{m+n}} \text{ mit } \frac{d^m\left(\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right)}{dx^m},\ \text{wie } \frac{d\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)}{dx} \text{ mit } \frac{d^3f(x)}{dx^3}$$

gleichbedeutend seyn müsse.

13. $df(x)$ heißt erstes oder schlechthin das Differenzial von $f(x)$; $d^2f(x)$, als Differenzial vom ersten, heißt zweites Differenzial; u. s. w. Die abgeleiteten Funktionen selbst, nämlich $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., gleichbedeutend mit

$\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \frac{d^3f(x)}{dx^3}, \ldots$ heißen **Differenzialcoefficienten** von den Potenzen der Zunahme k. Denn diese letzten Ausdrücke statt jener Funktionen in der Entwickelung von $f(x+k)$ unter 7. nun substituirt, hat man

$$f(x+k) = f(x) + \frac{df x}{1.dx}k + \frac{d^2f(x)}{1.2.dx^2}k^2 + \frac{d^3f(x)}{1.2.3.dx^3}k^3 + \ldots$$

Hiebei ist k nicht mit dx zu verwechseln; denn k drückt eine dem x zugeschriebene Vermehrung von bestimmten Werthen aus, dx aber ist nur ein Zeichen der Operation, durch die man die Funktionen $\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \ldots$ von der ursprünglichen Funktion ableitet. Ist diese Operation vollendet, so verschwinden $dx, dx^2, \ldots$ aus dem Calcul. Man beschäftigt sich nämlich im Differenzialcalcul nicht mit wirklichen Zunahmen, sondern bloß mit den Funktionen, die aus der Entwickelung der Differenz zwischen 2 successiven Zuständen einer vorgegebenen Funktion entstehen.

14. **Der Taylor'sche Lehrsatz.** Setzt man $f(x) = u$, demnach die successiven Differenziale $df(x), d^2f(x), d^3f(x), \ldots$ gleich $du, d^2u, d^3u, \ldots$ und eben so die Differenzialcoefficienten $\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \ldots$ gleich $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots$; so hat man vermöge der Entwickelung in 13. für den Fall, daß x sich in $x+k$ ändert, die durch die Reihe

$$u + \frac{du}{dx}k + \frac{d^2u}{1.2.dx^2}k^2 + \frac{d^3u}{1.2.3.dx^3}k^3 + \ldots$$

ausgedrückte Aenderung der Funktion u. (Vgl. §. 149. Zus.) — Eine Formel, die gewissermaßen Fundament des Differenzial-Calculs ist.

VIII.

Anwendung

der Differenzial- und Integral-Rechnung.

A.

Anwendung auf die Auffindung der Maxima und Minima.

§. 171. **Erklärung.** Wenn $y = \varphi(x)$ z. B. beim Wachsen der Variablen x ebenfalls bis zu einer gewissen Grenze M *entweder* wächst, über welche Grenze hinaus sie dann wieder *abnimmt*, *oder* bis zu einer gewissen Grenze M *abnimmt*, über die hinaus sie wieder *zunimmt*; so sagt man, die Größe oder Funktion y von x sey für den Werth, welchen die Größe x für jene Grenze M hat, im *ersten* Falle ein *Maximum*, im *zweiten* aber ein *Minimum*.

Erläuterung. Für die Curve AMDB (Fig. LI. 1ste) oder für MDN (Fig. LI. 2te) sey AB die Axe oder Abscissenlinie, in A der Anfang der Abscissen, $AP = x$ die Abscisse für die Ordinate $PM = y$. Wächst nun AP oder x bis zum Werthe $= AC$; so ist die Ordinate PM, die man sich beim Wachsen von AP über AB senkrecht fortbewegt vorstellt, in die parallele Ordinate CD übergegangen, und ist, die Grenze D erreichend, in Fig. 1. ein *Maximum* $= CD$, indem sie über D hinaus für einen größeren Werth $AH = x$ wieder *abnimmt*; oder y ist in Fig. 2. ein *Minimum* $= CD$, indem sie für einen größeren Werth von x dann wieder *zunimmt*.

Zusatz. Man kann sich leicht vorstellen, daß jede, zwischen den Veränderlichen x, y gegebene, Gleichung die Natur einer Curve ausdrücke, für welche demnach x, y die entsprechenden Coordinaten sind.

§. 172. **Lehrsatz.** *Wenn* $y = \varphi(x)$, *oder überhaupt eine Gleichung zwischen veränderlichen, von einander abhängigen Größen gegeben ist, und es*

findet für y ein Maximum oder Minimum Statt; so wird das durch $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückte Differenzialverhältniß $= 0$ seyn.

Beweis. Es sey Fig. 1. oder 2. die für die gegebene Gleichung konstruirte Curve, und für den Punkt M, für welchen AP, PM die zugehörigen Coordinaten x, y sind, sey die Tangente M'T', die Axe in T schneidend, gezogen. Stellt man sich nun die Ordinate mv unendlich nahe an MP gezogen vor; so wird in Fig. 1. $Mq = Pv = dx$, d. i. als das Differenzial der Abscisse x, und $mq = dy$, d. i. als das Differenzial der Ordinate y zu betrachten seyn. Aehnliches gilt von Fig. 2.

Ferner ist wegen $\triangle Mqm \backsim \triangle MTP$

$$\begin{array}{l} Mq : mq = PT : PM, \text{ aber im } \triangle MPT \text{ ist} \\ PT : PM = 1 \quad : \text{tang } MTP, \end{array}$$

daher $Mq : mq$ oder $dx : dy = 1 : \text{tang } MTP$,

d. i. $\frac{dy}{dx} = \text{tang } MTP$. Eben so für Fig. 2.

Allein der W. M'TP wird beim Wachsen der Ordinate PM in Fig. 1. und beim Abnehmen der Ordinate in Fig. 2. immer kleiner, bis er für den Werth AC der Abscisse x, für welchen CD die Ordinate und DE die mit AC parallele Tangente Statt findet, verschwindet und sonach auch tang M'TP $= 0$, folglich auch $\frac{dy}{dx} = 0$ wird. Also ist in beiden Fällen, in welchen für den Werth AC der Abscisse x die Größe y ein Maximum oder Minimum wird, das Differenzialverhältniß $\frac{dy}{dx}$ gleich Null.

Zusatz. 1. Hieraus läßt sich aber für $y = \varphi(x)$ nur so viel schließen, daß der Variablen y vielleicht für einen gewissen Werth der andern x ein größter oder kleinster Werth zukommen werde, wenn man den aufgefundenen Differenzial-Coefficienten oder Quotienten $\frac{dy}{dx}$ gleich 0 setzt, dann sowohl den dieser Voraussetzung gemäßen Werth (A) von x, als den Werth (B) für y entwickelt, und endlich untersucht, wie sich

bei Veränderung des (A) der ebenfalls geänderte Werth (B') verhalte. Bleibt dieser veränderte Werth (B') < (B); so ist nach §. 171. y ein Maximum; wird aber (B') > (B), so ist y für den Werth (A) ein Minimum.

Beispiel 1. Sey $y = b - (x-a)^2$ oder

$$y = b - x^2 + 2ax - a^2;$$ so hat man

$$dy = -2xdx + 2adx = -2(x-a)dx,$$ daher

$$\frac{dy}{dx} = 2a - 2x,$$ und $x = a$ (= (A)),

indem man $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt. Diesen Werth statt x in der vorgegebenen Gleichung substituirt, ist $y = b$ (= (B)). Aendert man nun (A) beliebig oder 1) so, daß $x < a$ werde; so ist $x - a = -\delta$ und $y = b - (x-a)^2 = b - (+\delta^2) = b - \delta^2$, d. i. dieser neue Werth (B') nothwendig < (B). Stellt man sich 2) (A) so geändert vor, daß $x > a$, demnach $x - a = +\delta$ wird; so hat man wieder $y = b - (\delta)^2 = b - \delta^2$, d. i. abermals diesen neuen Werth (B') von y < (B).

Da also (B') immer kleiner bleibt als (B); so ist y (= b) für den Werth $x = a$ ein Maximum gerade so, wie in Fig. 1. die Ordinate y in der Grenze D für die Abscisse $x = AC$ einen größten Werth DC erreicht, indem sie sowohl für eine kleinere, als größere Abscisse, als AC ist, kleiner DC bleibt, so klein auch die Differenz $\pm\delta$ zwischen AC und der geändert gedachten Abscisse seyn mag.

Beispiel 2. Sey $y = b + (x-a)^2 = b + x^2 - 2ax + a^2$, daher $\frac{dy}{dx} = 2x - 2a$, folglich für $\frac{dy}{dx} = 0$ wieder $x = a$, und $y = b$. Setzt man nun $x > a$, daher $x - a = +\delta$; so wird der neue Werth von $y = b + (\delta)^2$ größer, als der vorige (B); und eben so wird für $x < a$ oder für $x - a = -\delta$ der neue Werth von $y = b + (-\delta)^2 = b + \delta^2$ abermals größer, als (B). Es ist folglich der Werth $y = b$ für $x = a$ nun ein kleinster, wie in Fig. 2. DC für AC ein Minimum ist, indem die Ordinate y sowohl vor dem Erreichen der Grenze D, als nach dem Ueberschreiten dieser Grenze für eine um weniges

kleinere oder größere Abscisse, als AC ist, größer als DC wird.

Zusatz 2. Hieraus erhellt, daß, wenn für $\frac{dy}{dx}=0$ gar kein bestimmter Werth für x, daher auch nicht für y gefunden werden kann, dieses ein Zeichen sey, daß weder ein Maximum noch Minimum Statt finde. Man weiß z. B., daß in der Parabel die Ordinate y beim Wachsen der Abscisse x immer größer werde (§. 90. II.), folglich y weder ein Maximum noch Minimum werden könne, so groß oder klein man auch x nehmen mag. Dasselbe Resultat gibt der Calcul sogleich, wenn man die Gleichung der Parabel, nämlich $y^2=2px$ (ebend.) differenziirt, wodurch man $2ydy=2pdx$, daher $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$ $=\frac{p}{\sqrt{2px}}$, und für $\frac{dy}{dx}=0$ auch $\frac{p}{\sqrt{2px}}=0$ oder $p=0.\sqrt{2px}=0$ findet; woraus denn kein bestimmter Werth von x kann entwickelt werden; oder man hat $x=0$ und $y=0$, d. i. die Coordinaten fallen im Anfangspunkte der Abscissenare zusammen, was man für jede Curve schon zum voraus weiß.

Zusatz 3. Die im Zus. 1. erörterte Untersuchung kann man durch die kurze Regel fixiren:

„Nachdem für x der bestimmte Werth (A) und für y der dem (A) entsprechende Werth (B) entwickelt ist; setze man in $y=\varphi(x)$ $(A\pm\triangle A)$ statt (A); bleibt dann der neue für y entwickelte Werth (B') jedesmal kleiner als (B); so ist $y=$ (B) ein Maximum, im Gegentheile ein Minimum."

Beispiel 1. Die Gleichung für den Kreis (§. 90. Zus. 2.)

$$y^2=2ax-x^2$$

differenziirt, ist $2ydy=2adx-2xdx$, und hieraus $\frac{dy}{dx}=$ $\frac{a-x}{y}$, daher für $\frac{dy}{dx}=0$ wird $a-x=0$ oder $x=a(=(A))$; ferner $y^2=2a^2-a^2=a^2$ oder $y=a\,(=(B))$. Substituirt man nun $a+\triangle a$ statt $x=a$ in $y=\sqrt{(2ax-x^2)}$; so wird der neue Werth von y oder

$(B')=\sqrt{(2a^2+2a\triangle a-a^2-2a\triangle a-\triangle a^2)}=\sqrt{(a^2-\triangle a^2)}$,

welcher offenbar kleiner als (B) ist. Da dasselbe der Fall ist, wenn man statt a(=x) setzt a−△a; so folgt, daß für x=a, d. i. wenn die Abscisse gleich dem Halbmesser des Kreises wird, die Größe y=a, d. i. die dem Halbmesser gleiche Ordinate, ein Maximum sey.

Beispiel 2. Sey $y = x^2 - 10x + 60$. Hieraus findet man den Differenzialcoefficienten $\frac{dy}{dx} = 2x - 10$, und jenen =0 gesetzt, x=5 und y=35 (=(B)). Setzt man (A+△A) =5+1=6; so wird der neue Werth (B′) =36, nämlich $y = 36 - 60 + 60$, d. i. (B′)>(B). Dasselbe findet man, indem man statt x(=5) substituirt 5−1 oder 4. Folglich ist für x=5 die Größe y=35 ein Minimum.

Zusatz 4. Weil aber u nicht nur eine Funktion von x, sondern auch von mehreren veränderlichen Größen, d. i. u=φ(x); u=φ(x, y); u=φ(x, y, z)... seyn kann; so führen bei dieser Untersuchung die zu dem Taylor'schen Lehrsatze gehörigen, im Zus. des §. 149. aufgestellten Formeln schneller und allgemeiner zum Ziele.

§. 175. Lehrsatz. Sey u=φ(x), und es werde unter der Voraussetzung, daß man in der Entwickelung von U, d. i. von u±△u oder von φ(x+k) oder φ(x−k) den ersten Differenzialcoefficienten $\frac{du}{dx}$ =0 setzt, ein bestimmter Werth von x, aber der zweite Differenzialcoefficient $\frac{d^2u}{dx^2}$ jener Taylor'schen Entwickelung nicht =0, sondern dessen Werth entweder mit + oder mit − gefunden; so ist im ersten Falle die Funktion u ein Maximum, im zweiten Falle aber ein Minimum.

Beweis. Da man immer die Aenderung k des unter der Voraussetzung von $\frac{du}{dx} = 0$ gefundenen Werthes von x so klein nehmen kann, daß das Glied $\frac{k^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$ der Taylor'schen For-

mel größer ist, als die Summe aller folgenden Glieder der Reihe; so ist im ersten Falle der neue, oder jener Veränderung des x entsprechende Werth von u, nämlich

$$U \text{ oder } u+\Delta u = u - \frac{k^2}{2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} < u$$

$$\text{und } U \text{ oder } u-\Delta u = u - \frac{k^2}{2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} < u,$$

indem sowohl für + als für − k das dritte Glied der entwickelten Reihe das Zeichen +, daher in unserem ersten Falle sowohl für $u+\Delta u$ als für $u-\Delta u$ das Zeichen − erhält.

Es ist also der neue Werth von u, immer kleiner als u, d. i. als der Werth, den man unter der Voraussetzung des unveränderten Werthes von x für u gefunden hat. Folglich ist nach §. 172. Zus. 3. die Funktion u für den Fall, daß $\frac{d^2u}{dx^2}$ mit − gefunden wird, ein Maximum.

Im zweiten Falle ist

$$u+\Delta u = u + \frac{k^2}{2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots > u$$

$$\text{und } u-\Delta u = u + \frac{k^2}{2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} - + \ldots > u;$$

also nun der neue Werth von u immer > u, folglich im zweiten Falle, wo $\frac{d^2u}{dx^2}$ mit + gefunden wird, die Funktion u ein Minimum (§. 172. Zus. 3.).

Zusatz 1. Wenn im seltnern Falle selbst $\frac{d^2u}{dx^2}$, indem man in demselben den für $\frac{du}{dx} = 0$ gefundenen Werth von x setzt, gleich 0 wird, dann aber das auch noch entwickelte $\frac{d^3u}{dx^3}$ einen bestimmten Werth erhält; so erhellt eben so, daß

$$\text{dann } u+\Delta u = u + \frac{k^3}{2.3}\cdot\frac{d^3u}{dx^3} > u,$$

$$\text{aber } u-\Delta u = u - \frac{k^3}{2.3}\cdot\frac{d^3u}{dx^3} < u,$$

daher die Funktion u weder ein Maximum noch Minimum für den gefundenen Werth von x, vielmehr im beständigen Wachsen begriffen sey (§. 172. Zus. 2.).

Zusatz 2. Fände man mit Hilfe des für $\frac{du}{dx} = 0$ entwickelten Werthes von x den dritten Differenzialquotienten $\frac{d^3u}{dx^3}$ selbst $= 0$, aber der für denselben Werth von x entwickelte vierte Differenzialquotient $\frac{d^4u}{dx^4}$ (nicht $= 0$) gäbe entweder einen + oder — Werth, so wäre die Funktion u für jenen Werth von x im ersten Falle ein Minimum, im zweiten ein Maximum, was auf ähnliche Weise, wie oben, leicht erhellt. U. s. w.

Es gilt demnach die allgemeine Regel:

„Wenn in dem ersten, nicht verschwindenden $\frac{d^mu}{dx^m}$, dessen Werth mittelst des für $\frac{du}{dx} = 0$ gefundenen Werthes von x bestimmt ist, der Exponent m gerade ist; so gibt es für u ein Maximum oder Minimum, und zwar jenes, wenn der Werth von $\frac{d^mu}{dx^m}$ mit —, und dieses, wenn der vorige Werth mit + gefunden wird. — Ist aber in dem ersten, nicht verschwindenden $\frac{d^mu}{dx^m}$ der Exponent m ungerade; so findet weder ein Maximum noch Minimum statt."

Zusatz 3. Diese, hinsichtlich des einfachsten Falles, wo $u = \varphi(x)$ ist, gültige Regel dient als Grundlage der Untersuchung, ob die Funktion u mehrerer veränderlichen Größen, wenn z. B. $u = F(x, y)$ ist, für gewisse Werthe von x und y ein Maximum oder Minimum sey.

Wenn nämlich lediglich in Beziehung auf die Veränderlichkeit von x die Funktion $F(x, y)$ ein Maximum für $x = f(y)$, und in Beziehung auf die Veränderlichkeit von x dieselbe Funktion ein Maximum für $y = \varphi(x)$ ist; so ist auch $F(x, y)$ ein Maximum in Beziehung sowohl auf die Veränderlichkeit von x, als auf die von y, und zwar für $x = f(\varphi(x)) = \psi(x)$ und für $y = \varphi(f(y)) = \chi(y)$, aus welchen Gleichungen z. B. $x = A$ und $y = B$ erhalten werden möge. U. s. w.

§. 174. Erörterung durch einige Beispiele.

Beispiel 1. In der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$, einen gegebenen Winkel α

so einzutragen, daß die Summe u seiner Schenkel, als Sehnen des Kreises, ein Maximum oder Minimum wird.

In Fig. LII. stelle BAD den Winkel α vor, welcher von dem Durchmesser AE in zwei Theile x und $\alpha - x$ (= DAE) getheilt wird. Fällt man aus C die Senkrechte Cp; so ist (nach §. 26. 1.) $Ap = \frac{1}{2} AB$ (Geom. §. 84. II.) $= AC. \cos x$ (für den Halbmesser = 1) $= r. \cos x$, daher $2 Ap = AB = 2r. \cos x$. Eben so ist die andere Sehne $AD = 2r. \cos(\alpha - x)$. Daher ist

$$u (= \varphi(x)) = AB + AD = 2r(\cos x + \cos(\alpha - x)),$$

was denn ein Maximum oder Minimum werden soll.

Diese Gleichung differenziirt, ist, weil nach §. 138. (2.) $d. \cos x = -dx. \sin x$ und $d. \cos(\alpha - x) = -d.(\alpha - x). \sin(\alpha - x) = + dx. \sin(\alpha - x)$,

$$(M) \ldots du = 2r. dx [-\sin x + \sin(\alpha - x)], \text{ oder}$$

$$\frac{du}{dx} = 2r [-\sin x + \sin(\alpha - x)] = \varphi'(x)$$ (vergl. die Schlußbemerk. §. 170. unter 7.).

Setzt man $\varphi'(x) = 0$, so entwickelt man $\sin(\alpha - x) = \sin x$, daher $\alpha - x = x$ oder $x = \frac{1}{2}\alpha$. Um nun zu erfahren, ob dieser Werth für x ein Maximum oder Minimum gebe, differenziire man auch (M). Weil (nach §. 138. (1)) allgemein $d. \sin x = dx. \cos x$ ist, so hat man $d.(-\sin x) = -dx. \cos x$, und

$$(N) \ldots d^2u = 2r. dx. dx [-\cos x - \cos(\alpha - x)], \text{ daher}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2r [-\cos x - \cos(\alpha - x)] = \varphi''(x),$$

oder $\varphi''(x) = \varphi''(\frac{1}{2}\alpha) = -2r. \cos\frac{1}{2}a - 2r. \cos\frac{1}{2}a = -4r. \cos\frac{1}{2}\alpha$, d. i. den Werth des zweiten Differenzialcoeffizienten mit —; folglich ist die Summe u der Sehnen AB, AD für den Werth von $x = \frac{1}{2}\alpha$ ein Maximum, und die Größe dieses Maximums ist $= 4r. \cos\alpha$. Der W. α muß also so als Peripheriewinkel angetragen werden, daß er von dem durch seinen Scheitel gezogenen Durchmesser halbirt wird.

Beispiel 2. Die kleinste Oberfläche u eines geraden, oben offnen Cylinders von gegebenem Inhalte $= a^3$ zu finden.

Bezeichnet man des Cylinders Höhe mit y und den Halbmesser seiner Grundfläche mit x; so ist der Inhalt $a^3 = y.x^2\pi$ und die Mantelfläche $= y.2x\pi$ (Geom. §. 177. Zus. 1. und §. 169. Zus. 3.). Aus jener ersten Gleichung ist $y = \frac{a^3}{x^2\pi}$, daher durch Substit. die Mantelfläche $= \frac{2a^3}{x}$, folglich, hiezu die Grundfläche $= x^2\pi$ genommen, die ganze Oberfläche des oben offnen Cylinders oder $u = \varphi(x) = \frac{2a^3}{x} + x^2\pi$, also

(P)... $du = d.\frac{2a^3+x^3\pi}{x} = \frac{3x^3.\pi dx-(2a^3+\pi x^3)dx}{x^2}$ (§§. 135. 136.),

oder $\frac{du}{dx} = \varphi'(x) = \frac{2x^3\pi-2a^3}{x^2} = 2\pi x - \frac{2a^3}{x^2}$.

Hierauf ist, für $\varphi'(x) = 0$, $\pi x = \frac{a^3}{x^2}$ und $x = \frac{a}{\sqrt[3]{\pi}}$, folglich

$y\left(=\frac{a^3}{\pi^2 x}\right) = \frac{a^3}{\pi}.\frac{\sqrt[3]{\pi^2}}{a^2} = \frac{a\pi^{\frac{2}{3}}}{\pi} = \frac{a}{\sqrt[3]{\pi}}$, d. i. y ebenfalls $= x$.

Um nun zu sehen, ob für diesen Werth von $x = \frac{a}{\sqrt[3]{\pi}}$, für welchen denn auch die Höhe y dieselbe Länge hat, die Oberfläche u des Cylinders wirklich ein Minimum sey, differenziire man P oder $2\pi x - \frac{2a^3}{x^2}$ oder $2\pi x - 2a^3 x^{-2}$. Man findet $\frac{d^2u}{dx^2} = \varphi''(x) = 2\pi + 4a^3x^{-3} = 2\pi + \frac{4a^3}{x^3}$; demnach durch Substitution des für x^3 oben gefundenen Werthes $\frac{a^3}{\pi}$ hat man den + Werth von $\varphi''(x) = 2\pi + 4a^3.\frac{\pi}{a^3} = 2\pi + 4\pi = +6\pi$; also die Oberfläche u unter der vorigen Voraussetzung ein Minimum.

Es hat daher ein cylindrisches Getreidmaß die kleinste Oberfläche, fordert sohin das wenigste Material, z. B. an Kupfer, wenn es, wie schon Kästner vorschlug, noch einmal so breit, als hoch gefertigt wird.

Ist der Cylinder oben nicht offen; so ist seine ganze Oberfläche $= 2.\pi x^2 + \frac{2a^3}{x}$, demnach (statt π oben nun 2π substituirt) ist $x = \frac{a}{\sqrt[3]{2\pi}}$, und $y = \frac{a^3}{x^2\pi}$ wird nun durch Substit. $= 2.\frac{a}{\sqrt[3]{2\pi}} = 2x$ gefunden.

Auch hievon kann man mit Kästner Gebrauch machen, wenn man für gemünztes Geld die kleinste Oberfläche bestimmen wollte, damit es sich so am wenigsten abreibe. Allein eine Münze von gleicher Höhe und Breite entspricht nicht der Bequemlichkeit.

Beispiel 3. Eine Größe a in zwei Theile so zu theilen, daß das Produkt der m^{ten} Potenz des einen Theiles in die n^{te} Potenz des andern Theiles ein Maximum oder größer sey, als alle ähnlichen Produkte, die man machen könnte.

Sey x der eine, daher a—x der andere und $x^m.(a-x)^n = u$ (als größtem Produkte). Nach §§. 154. 155. hat man

$$(Q)\ldots du = mx^{m-1}(a-x)^n.dx - nx^m(a-x)^{n-1}.dx,$$

$$\text{oder } \frac{du}{dx} = \frac{mx^{m-1}(a-x)^n}{(a-x)x} - \frac{nx^m(a-x)^{n-1}}{x(a-x)}$$

$$= \frac{mx^{m-1}.(a-x)^{n-1}}{x} - \frac{nx^{m-1}(a-x)^{n-1}}{a-x},$$

folglich wird für $\frac{du}{dx} = 0$ durch Reduktion

$$(am-mx)x^{m-1}.(a-x)^{n-1} - nx.x^{m-1}(a-x)^{n-1} = 0$$

$$\text{oder } (am-(m+n)x).x^{m-1}.(a-x)^{n-1} = 0.$$

Dividirt man nun auf beiden Seiten mit dem Produkte je zweier Faktoren, oder, was dasselbe ist, setzt man jeden der 3 Faktoren nach und nach $= 0$; so erhält man

1) aus $am-(m+n)x = 0$ den Werth $x = \frac{am}{m+n}$;

2) aus $x^{m-1} = 0$ den Werth $x = 0$, und

3) aus $(a-x)^{n-1} = 0$ den Werth $a-x = 0$, oder $x = a$.

Um zu untersuchen, ob u für den ersten Werth von $x = \frac{am}{m+n}$ ein Maximum oder Minimum sey, ist der Werth von $\frac{d^2u}{dx^2}$ oder $d.\frac{du}{dx} = d.[(am-(m+n)x).x^{m-1}.(a-x)^{n-1}$ zu bestimmen.

Das Differenzial des letzten Ausdruckes, dx der Kürze wegen weggelassen, ist

$$-(m+n).x^{m-1}.(a-x)^{n-1} + (m-1)(am-(m+n)x)x^{m-2}.$$

$$(a-x)^{n-1} - (n-1)(am-(m+n)x).x^{m-1}(a-x)^{n-2};$$

folglich, hierin $\frac{am}{m+n}$ statt x substituirt, wird

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{(m+n).a^{m-1}.m^{m-1}}{(m+n)^{m-1}} \cdot \frac{a^{n-1}.n^{n-1}}{(m+n)^{n-1}}$$

(indem die zwei andern Glieder wegen $am-(m+n)x = am-(m+n)\frac{am}{m+n} = 0$ verschwinden) $= -\frac{m^{m-1}.n^{n-1}.a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}}$.

Weil sohin der Werth des zweiten Differenzialcoefficienten mit — gefunden wird; so ist u für jenen ersten Werth von x allgemein ein Maximum.

Wenn daher $m = n = 1$ ist, so wird in diesem speziellen Falle das Produkt oder Rechteck u aus den 2 Theilen x und $a-x$ für $x = \frac{1}{2}a$ ein größtes $= \frac{1}{2}\left(a-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{4}a^2$, d. i. gleich dem Quadrate des halben Ganzen (vergl. allgem. Größenl. §. 83. Zus. 6.).*)

B.

Anwendung auf die höheren Gleichungen.

§. 175. Die differenziirte Gleichung bietet nicht selten hinsichtlich der aufzufindenden Wurzelgrenzen solche Merkmale dar, die in der vorgegebenen Gleichung mangeln. (Vergl. §. 61.).

Sey $x^6 + 111x^3 + 6x^2 + 1993x + 35878 = 0 = y$.

Werthe von x; — 2, — 1, 0, + 1, + 2

..... y; + 31044, + 5378, + 35878, + 37989, + 40792

Differ. erste . . . + 2737, + 2097, + 2111, + 2803

... zweite . . . . — 640, + 14, + 692

... dritte . . . . . + 654, + 678

... vierte . . . . . + 24 (Konstant = 4.3.2.1.).

Die Finaldifferenzen schließen jede + Wurzel aus. Allein die Initialdifferenzen offenbaren zwei — Wurzeln. Denn die

*) Viele Beispiele enthält die Schrift „Uebungsaufgaben zur Lehre vom Größten und Kleinsten, von Dr. Lehmus." (Berlin, 1823 bei Reimer).

zweite — Differenz (640) vermehrt, von 2737 abgezogen, diese erste Differenz, und eben diese, von 31044 abgezogen, vermindert dieses Resultat, führt daher bald dahin, ein Resultat y negativ zu machen. Allein die vierte Differenz muß über kurz oder lang die Zeichen aller andern ändern, und das Resultat y wieder + machen. Ueber — 2 hinaus müssen also 2 — Wurzeln liegen. Wirklich sind diese — 6,1095 und — 111,0813 sehr nahe. Die 2 andern Wurzeln liegen entweder zwischen denselben Grenzen, oder sind imaginär. Zum Behufe dieser Untersuchung dient die differenziirte Gleichung

$$4x^3 + 333x^2 + 12x + 1993 = \frac{dy}{dx} = 0 = y',$$

$$\text{oder } x^3 + \frac{333}{4}x^2 + 3x + \frac{1993}{4} = y' \ldots (\alpha);$$

diese Gleichung nochmals differenziirt, hat man

$$3x^2 + \frac{333}{2}x + 3 = y'', \text{ oder } (\beta) \ldots x^2 + \frac{111}{2}x + 1 = 0.$$

woraus $x = -\frac{111}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{12305}$, als die 2 übrigen Wurzeln gefunden werden, welche demnach außerhalb jener Grenzen liegen.

Man kann dasselbe Resultat allgemein auch so finden: Substituirt man in (β) statt x die Werthe — 6, — 7; so findet man $y'' = -296$ und $y'' = -338\frac{1}{4}$, welche zwei — Werthe anzeigen, daß eine gerade Anzahl Wurzeln, nicht aber 3 Wurzeln zwischen — 6 und — 7 liegen können. Setzt man eben so $x = -111$ und $= -112$; so findet man $y'' = +6161\frac{1}{4}$ und $y'' = +6329$; d. i. dasselbe Resultat, wie vorher. Hiedurch erkennt man denn, daß die 2 andern Wurzeln der vorgegebenen Gleichung imaginär seyen.

Zusatz. Wenn man indessen nicht die Grenzen selbst, sondern die Beschaffenheit der Wurzeln einer Gleichung zu kennen verlangt; so reicht schon eine einzige Differenziation hin. So erhielten wir vorhin durch diese die Gleichung (α). Man suche nun

für die Werthe von x;	— 2,	— 1,	0,	+ 1
die Resultate y;	$+817\frac{1}{4}$,	$+577\frac{3}{4}$,	$498\frac{1}{4}$,	$+585\frac{3}{4}$
und Differ. erste		$-239\frac{1}{4}$,	$-79\frac{1}{4}$,	$+87\frac{1}{4}$.

Die großen Werthe für y, nämlich $+577\frac{1}{2}$, $+499\frac{1}{2}$ und die so kleine Differenz $-79\frac{1}{4}$ zeigen deutlich, daß man zwischen diesen Werthen kein — Resultat y finden könne, folglich, da man doch zwischen -1 und 0 das Daseyn der Wurzeln aus der Abnahme und dann der Wiederzunahme der Werthe von y erkennt, zwei Wurzeln imaginär seyn müssen.

§. 176. Durch Differenziation der vorgegebenen Gleichung lassen sich die gleichen irrationalen Wurzeln entdecken.

Sey die (von Ruffini in seinem von der italien. Gesellsch. d. Wissensch. gekrönten Memoire behandelte) Gleichung:

$$(A)\ldots\ x^6 - 16x^5 + 85x^4 - 144x^3 - 57x^2 + 126x + 54 = 0.$$

Werthe von x;	-3,	-2,	-1,	0,	$+1$,	$+2$,	$+3$
" " von y;	$+14553$,	$+2662$,	$+117$,	$+54$,	$+49$,	-162,	-243
Differ. erste . . .	-11891,	-2545,	-36,	-5,	-211,	-8	
" " zweite	$+9346$,	$+2482$,	$+58$,	-206,	$+130$		
" " dritte	-6864,	-2424,	-264,	$+336$			
" " vierte	$+4440$,	$+2160$,	$+600$				
" " fünfte	-2280,	-1560					
" " sechste	$+720$ (konstant $=6$. 5. 4. 3. 2. 1.).						

Die Resultate $y = +49$, $= -162$ lassen eine ungerade Wurzelanzahl zwischen den Grenzen $+1$, $+2$ erkennen. Das Alterniren der Zeichen bei den Initialdifferenzen zeigt, daß über -3 hinaus keine Wurzel vorwärts zu suchen sey. Dagegen zeigen die Finaldifferenzen leicht, daß die Summe der $+$Differenzen die Summe der $-$Differenzen bald übersteigen werde. In der That hat man für $x = +4$ das Resultat $y = -98$ und für $x = +5$ ist $y = +9$; demnach muß abermals eine ungerade Wurzelzahl zwischen den Grenzen $+4$, $+5$ liegen. Weil nun für $x = +6$ das Resultat $y = +54$ nur sehr wenig sich von jenem $y = +9$ entfernt; so kann man vermuthen, daß zwischen diesen Grenzen $+5$, $+6$ eine gerade Wurzelanzahl zu finden sey.

Eben so zeigen die sehr gleichen Werthe von $y = +54$, $+49$, daß etwa zwischen den Grenzen $0, +1$ abermals eine solche Anzahl von Wurzeln zu treffen seyn möge. Setzt man daher zur Prüfung des Letztern $x = +0,5$; so findet man $y = +89,578125$. Weil sich sohin die Werthe von y zwischen den Werthen von -1 und $+0,5$ der Nulle nähern und dann von dieser sich wieder weiter entfernen; so wird eine gerade Wurzelzahl zwischen den Grenzen $-1, +0,5$ vorhanden seyn. Macht man in Beziehung auf jene erste Vermuthung $x = +5,5$; so findet man $y = +0,403125$, was denn auf gleiche Weise, wie vorhin, das Daseyn einer geraden Anzahl der Wurzeln unserer Gleichung zwischen den Grenzen $+5, +6$ kund gibt.

Es sind also die Grenzen: $-1, +0,5$; $+1$ und $+2$; $+4$ und $+5$; $+5$ und $+6$, zwischen welchen die 6 Wurzeln der gegebenen Gleichung zu suchen sind, schnell aufgefunden.

Um nun die 2 ersten Wurzeln zwischen den Grenzen -1, $+0,5$ zu suchen, setze man $x = -0,5$; man findet $y = +0,578\ldots$, d. i. einen der Nulle so nahen Werth, daß von ihr eine Wurzel der Gleichung nicht sehr entfernt liegen kann. Setzt man daher $x = -0,4$ und auch $x = -0,6$; so ergibt sich für den ersten Werth $y = +6,0399\ldots$ und für den zweiten $y = +1,2908\ldots$; da dieser Werth weit näher an 0, als der erstere liegt, so werden die gesuchten Wurzeln zwischen den Grenzen $-0,5$ und $-0,6$ liegen, und zwar wegen dieser sehr engen Grenzen gleich seyn.

Damit hierüber alle Ungewißheit verschwinde, differenziire man die vorgegebene Gleichung (A); man findet, indem man denn durch $2dx$ dividirt,

(B) ... $3x^5 - 40x^4 + 170x^3 - 216x^2 - 57x + 63 = 0$.

Wenn nun (A) und (B) einige Wurzeln gemein haben; so muß man eine finden entweder mit Hülfe des größten gemeinschaftlichen Divisors, oder, was bequemer ist, durch Elimination nach folgendem Verfahren:

Um vorerst x^6 verschwinden zu machen, multiplizire man (A) mit 3 und (B) mit x; so wird durch Subtraktion

(C) ... $-8x^5 + 85x^4 - 216x^3 - 154x^2 + 315x + 162 = 0$.

Um das Glied, worin x^5 vorkommt, wegzuschaffen, wird (B) mit 8 und (C) mit 3 multiplizirt; die Addition der neuen Gleichungen gibt

(D) ... $-65x^4+712x^3-2070x^2+489x+990=0.$

Man multiplizire (D) mit 8x und (C) mit 65; so hat man durch Subtraktion und Division durch 9

(E) ... $19x^4-280x^3+1258x^2-1595x-1170=0.$

(D) mit 19 und (E) mit 65 multipl., dann addirt und die Summe durch 8 dividirt, wird

(F) ... $-584x^3+5306x^2-10173x-7155=0.$

Diese (F) mit 19x und (E) mit 584 multiplizirt, und die Summe beider Produkte durch 5 dividirt, wird

(G) ... $-12545x^3+108277x^2-190125x-156656=0.$

Diese (G) mit 584, (F) mit 12545 multiplizirt, hat man durch Subtraktion beider Produkte von einander

(H) ... $-3317457x^2+16587285x+9952372=0.$

Hieraus ist

(K) ... $+x^2-5x-3=0.$

Dieses (K) wird nun ein Maß von (A) seyn; wirklich ist der Quotient

(L) ... $x^4-11x^3+35x^2-12x-18=0.$

Die Wurzeln von (K) sind $\frac{5+\sqrt{37}}{2}$ und $\frac{5-\sqrt{37}}{2}$. Wenn nun (A) gleiche Wurzeln hat, so muß eine Wurzel von (K) oder von (L) zweimal Wurzel von (A) seyn. Dividirt man daher (L) durch (K); so erhält man den genauen Quotienten

(M) ... $x^2-6x+6=0.$

Also ist (K) ein doppeltes Maß und die Gleichung (M) ein drittes Maß von (A). Nun sind die Wurzeln von (M) $3\pm\sqrt{3}$, folglich die sechs Wurzeln unserer Gleichung (A)

$$\frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}; \quad \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}; \quad 3 \pm \sqrt{3};$$

d. i. (A) hat zwei doppelte gleiche und irrationale Wurzeln.

§. 127. Die Wurzeln, deren Grenzen bekannt sind, zu finden.

Daß zu diesem Zwecke nebst der Differenziation der vorgegebenen Gleichung die doppelte Regel Falsi (allgem. Größenl. §. 125.) von vorzüglichem Gebrauche sey, wollen wir an der Gleichung (ψ) des §. 61. kurz nachweisen.

An dem cit. Orte wurde bemerkt, daß eine Wurzel zwischen den Grenzen $+1$, $+2$ liege. Um nun diese Wurzel zu finden, dividire man das dortige Resultat $y = -49$, welches dem Werthe von $x = +1$ entspricht, durch den Unterschied zwischen jenem Resultate und dem unmittelbar folgenden $+1$, nämlich durch 110, und nehme an, daß die Differenz zwischen diesem Quotienten $-\frac{49}{110}$ und jener kleineren Grenze $+1$, nämlich $1 - (-\frac{49}{110}) = 1 + \frac{49}{110} = 1,45$, die gesuchte Wurzel sey. Man substituire daher in der vorgegebenen Gleichung (ψ), deren letztes Glied -99 auf die andere Seite mit $+$ gebracht wird, statt x jenen Werth 1, 45; man erhält (z. B. mittelst der Logarithmen schnell)

$$(1,45)^6 - 9(1,45)^4 + 4(1,45)^3 + 66(1,45)^2 - 12(1,45) = 100,1847 = n'.$$

Allein dieser Werth n' stimmt nicht mit dem wahren Werthe $= 99 = n$. Man mache demnach $d.n' = n - n' = -1,1847$, und differenziire (ψ). Man findet:

$$(5x^4 - 36x^3 + 12x^2 + 132x - 12) \cdot dx = dn', \text{ und hieraus}$$

$$dx = \frac{dn'}{5x^4 - 36x^3 + \ldots} = \frac{-1,1847}{5(1,45)^4 - 36(1,45)^3 + \ldots} = -0,010127\ldots$$

Diese Correctionszahl zu 1,45 addirt, bekommt man die gesuchte, nun bis zur 6. Decimalstelle richtige, Wurzel $x = 1,439873$.

Um sich hievon zu überzeugen und zugleich die Wurzel noch näher (z. B. mit Hülfe größerer Logarithmentafeln) zu bestimmen,

ſtimmen, ſubſtituirt man den gefundenen Werth 1,459... ſtatt x in der vorgegebenen Gleichung, und zieht von dem ſo enthaltenen Werthe n'' den vorhin für d.n' gefundenen ab. Differenziirt man dann die mit dem Werthe von x = 1,1439... erhaltene Gleichung; ſo findet man die neue Correction dx = — 0,00000058. U. ſ. w.

Anmerkung. Cagnoli ſchreibt ſich die Erfindung dieſer leicht und ſchnell zum Ziele führenden Methode zu, und benützt dieſelbe auch zur Auflöſung trigonometriſcher und ſelbſt tranſcendenter Gleichungen. (Vgl. deſſen „Traité de Trigonom.").

C.

Anwendung auf die Curven.

a. Allgemeine Ausdrücke der Tangente, Normale,... und des Krümmungshalbmeſſers.

§. 178. Berührung der erſten, zweiten,... Ordnung.

Sey $\varphi(x, y) = 0$ die Gleichung einer Curve zwiſchen den Coordinaten x, y und beſtimmten Konſtanten; eben ſo $f(x', y') = 0$ die Gleichung zwiſchen x', y' und ſolcher Konſtanten, die erſt beſtimmt werden ſollen; ferner ſollen beide Coordinatenſyſteme dieſelben Axen und denſelben Anfangspunkt haben.

Schneiden ſich nun beide Curven; ſo gehören zu dem gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkte die Coordinaten $x = x'$ und $y = y'$. Dem in $x + k$ veränderten Werthe von x entſpricht nach Taylor's Lehrſatze in der erſten Curve die Ordinate

$$y + k \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \cdots$$

und in der zweiten Curve eben ſo die Ordinate

$$y' + k \cdot \frac{dy'}{dx'} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d^2y'}{dx'^2} + \cdots$$

Demnach hat man für den nächstfolgenden Punkt der Curven, für welchen der geänderte Werth $x+k$ Statt findet, den Unterschied beider Ordinaten (wegen $y=y'$)

$$k\left(\frac{dy'}{dx'}-\frac{dy}{dx}\right)+\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2y'}{dx'^2}-\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\ldots$$

Läßt man ferner für jenen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, für den $x=x'$ und $y=y'$ ist, überdieß die Bedingungsgleichung

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'}$$

gelten; so wird der Unterschied der nächstfolgenden Ordinaten beider Curven

$$\Delta=\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2y'}{dx'^2}-\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\frac{k^3}{2.3}\left(\frac{d^3y}{dx'^3}-\frac{d^3y}{dx^3}\right)+\ldots$$

Man nehme nun an, daß eine dritte Curve, deren Gleichung ist $\psi(x'',y'')=0$, durch den der ersten Curve gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt gehen solle, daß folglich, wie oben, wieder $x=x''$ und $y=y''$, demnach auch der Unterschied der nächsten Ordinaten der ersten und dritten Curve

$$D=k\left(\frac{dy''}{dx''}-\frac{dy}{dx}\right)+\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2y''}{dx''^2}-\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\ldots$$

sey; so erhellt, daß man die Größe k so klein wählen könne, daß diese Differenz D größer wird, als Δ, folglich jene Annahme, vermöge welcher die dritte Curve durch den den beiden ersten Curven gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt gehen soll, nur dann gültig sey, wenn wieder die Bedingungsgleichung

$$\frac{dy''}{dx''}=\frac{dy}{dx},\ \text{also auch}\ \frac{dy''}{dx''}=\frac{dy'}{dx'}$$

Statt hat. Man sagt daher, daß zwei Curven eine Berührung der ersten Ordnung, oder (was auf ähnliche Weise, wie vorhin dargethan, wird) der zweiten, ... Ordnung haben, wenn für sie die Bedingungsgleichung

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'},\ \text{oder}\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y'}{dx'^2},\ \ldots$$

Statt hat. Eine solche Bedingungsgleichung dient nämlich, eine der Konstanten in $\psi(x', y') = 0$ so zu bestimmen, daß die genannte Berührung der Curven Statt findet.

§. 179. **Aufgabe 1.** Sey die Gleichung einer Curve M zwischen ihren Coordinaten x, y gegeben; die Gleichung einer geraden Linie L zu finden, die mit M eine Berührung der ersten Ordnung hat.

Auflösung. Nach §. 88. ist die allgemeine Gleichung der geraden Linie (oder der Curve erster Ordnung)

$$y' = ax' + b \text{ und hieraus } \frac{dy'}{dx'} = a.$$

Weil L einen Punkt mit M gemein haben soll, für welchen $x' = x$ und $y' = y$ ist; so gilt auch

$$y = ax + b \text{ und hieraus } \frac{dy}{dx} = a = \frac{dx'}{dy} \text{ und } b = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Diese Werthe der Konstanten a, b in jener ersten Gleichung substituirt, hat man

$$(1) \ldots \quad y' - y = (x' - x)\frac{dy}{dx},$$

als gesuchte Gleichung der Tangente der gegebenen Curve M; x' und y' sind die veränderlichen Coordinaten. (Vgl. §. 92.)

Zusatz 1. Aus (1) ist (wie im §. 92. (7)) die Gleichung für die Normale

$$(2) \ldots \quad y' - y = -(x' - x)\frac{dy}{dx},$$

und in (1) $y' = 0$ gesetzt, wird

$$(3) \ldots \quad x' - x = \frac{ydx}{dy}$$

die Gleichung für die Subtangente (§. 92. (9)). In (2) eben so $y' = 0$ gesetzt, ist die Gleichung für die Subnormale (§. 92. (10))

$$(4) \ldots \quad x' - x = \frac{ydy}{dx}.$$

Daher denn auch (wie am Schlusse des §. 92.) die Normale durch

$(\alpha) \ldots\ y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, und die Tangente durch

$(\beta) \ldots\ y\sqrt{\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)}$ ausgedrückt wird.

Alle diese Ausdrücke sind nicht bloß hinsichtlich der Curven der zweiten Ordnung (wie oben), sondern allgemein gültig.

Beispiel 1. Die Gleichung $y^2 = 2px$ für die Parabel (§. 90. II.) differenziirt, hat man

$$ydy = pdx, \text{ daher } \frac{dx^2}{dy^2} = \frac{y^2}{p^2},$$

und durch Substitution dieses Werthes und des Werthes $2px$ statt y^2 im vorigen Ausdrucke (β) den Ausdruck der Tangente der Parabel (wie im §. 96. am Schlusse)

$$\sqrt{\left(2px + \frac{4p^2x^2}{p^2}\right)} = \sqrt{(2px + 4x^2)}.$$

2. Für die Ellipse gilt nach §. 90. (β) die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \text{ woraus } \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

und durch Substitution dieses Werthes in (1) die Gleichung der Tangente

$a^2yy' + b^2xx' = a^2y^2 + b^2x^2$ oder (durch Div. mit a^2b^2)

$$\frac{yy'}{b^2} + \frac{xx'}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

wie im §. 105. 1) gefunden wird.

Zusatz 2. Um die Lage der Tangenten zu bestimmen (methodus tangentium directa), bedient man sich der Methode, die Größe der Subtangente mittelst des vorigen allgemeinen Ausdruckes $\frac{ydx}{dy}$ (unter (5)) zu finden.

So ist z. B. die Subtangente PT für den Punkt M der Parabel (Fig. 34.) nach dem vorhin unter 1. Gesagten

$$= \frac{ydx}{dy} = \frac{y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x \text{ (wie oben im §. 96.).}$$

Wenn man also die Axe der Parabel um die doppelte Abscisse verlängert; so hat man den Punkt T, daher die Lage der Tangente MT für eben jenen Punkt M gefunden.

Eben so wird aus der Gleichung (§. 90. (β'')) für die Ellipse, nämlich aus

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}, \text{ oder } ay^2 = 2apx - px^2$$

der Werth für die Subtangente PT (Fig. 36.) durch

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{ay^2}{p(a-x)} = \frac{x(2a-x)}{a-x}$$

ausgedrückt. Allein dieser Ausdruck läßt nicht so fort die Lage der Tangente oder den Punkt T erkennen, weßwegen man zunächst nur

$$BT = PT - BP = \frac{x(2a-x)}{a-x} - x = \frac{ax}{a-x},$$

oder BT durch die Proportion $a-x : a = x : BT$ bestimmen, und diese Größe BT auf der verlängerten Axe auftragen darf, um auf diese Weise den Punkt T und somit auch die Lage der Tangente TM der Ellipse für den Punkt M zu bestimmen.

Da sich die Gleichung der Hyperbel von der für die Ellipse nur durch $+\frac{px^2}{a}$ unterscheidet; so findet man auch für einen Punkt M der Hyperbel die Lage der Tangente, indem man in den vorigen Ausdrücken nur $+$ statt $-$ setzt.

§. 180. Aufgabe 2. Es sey die Gleichung einer Curve M zwischen x und y gegeben; den Kreis zu finden, der mit M eine Berührung der zweiten Ordnung hat.

Auflösung. Wegen der bei'm Kreise Statt findenden Gleichheit der Halbaxen ($a = b = \rho$) geht die Gleichung der Ellipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ in } y'^2 + x'^2 = \rho^2$$

für den Kreis über, und verändert man den Anfangspunkt und die Lage der Coordinaten so, daß x' und y' die im §. 89. (5)

aufgestellten Werthe erhalten; so verwandelt sich jene Gleichung des Kreises in diese:

$$(x'-A)^2+(y'-B)^2=\rho^2,$$

worin A und B die den Coordinaten x', y' parallelen Coordinaten seines Mittelpunktes sind.

Weil nun der Kreis, für den diese Gleichung gilt, durch einen mit der Curve M gemeinschaftlichen Punkt gehen soll, für welchen $x=x'$ und $y=y'$ ist; so hat man auch

$$(1)\ldots\ (x-A)^2+(y-B)^2=\rho^2.$$

Weil ferner derselbe Kreis eine Berührung der zweiten Ordnung mit M haben soll; so erhält man vermöge §. 178., indem man (1) zweimal in Beziehung auf x und y differenzirt, die 2 Gleichungen

$$(2)\ldots\ (x-A)dx+(y-B)dy=0 \text{ und}$$
$$(3)\ldots\ dx^2+dy^2+(y-B)d^2y=0.$$

Aus (3) ist, $dx^2+dy^2=ds^2$ gesetzt,

$$(4)\ldots\ B-y=\frac{ds^2}{d^2y};\ \text{daher aus (2)}$$
$$(5)\ldots\ A-x=-\frac{dy.ds^2}{dx.d^2y}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (1) und Reduktion findet man

$$\rho^2=\frac{(dy^2+dx^2)ds^4}{d^4y.dx^2}=\frac{ds^6}{d^4y.dx^2}\ \text{oder}\ \rho=\frac{ds^3}{dx.d^2y}.$$

Der Kreis, dessen Halbmesser ρ den eben bezeichneten Werth hat, heißt Krümmungskreis (circulus osculator), wie ρ selbst Krümmungshalbmesser. Vgl. oben §. 129.

Zusatz 1. Für die Parabel z. B. ist $y^2=2px=ax$, wenn man den Parameter 2p kurz durch a ausdrückt. Demnach hat man

$$1)\ dy=\frac{\frac{1}{2}adx}{y}=\frac{1}{2}dx\sqrt{\frac{a}{x}};$$

$$2)\ d^2y=d(\tfrac{1}{2}dx.a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}})=-\tfrac{1}{4}dx^2\sqrt{\frac{a}{x^3}};$$

$$3)\ ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{\left(dx^2+\tfrac{1}{4}dx^2.\frac{a}{x}\right)}=dx\sqrt{\left(1+\frac{a}{4x}\right)}.$$

Diese Werthe in den letzten Gleichungen des vorigen Paragraphes substituirt, gibt die Entwickelung

$$A = 3x + \tfrac{1}{2}a;\quad B = -4x\sqrt{\frac{x}{a}} \text{ und } \rho = \frac{(a+4x)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{a}}.$$

(Vergl. §. 130.).

Legt man (nach §. 128. Anmerk. 1.) die allgemeine Gleichung der Linie der zweiten Ordnung zum Grunde, nämlich

$$y^2 = \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2} \text{ oder } y^2 = mx - nx^2,$$

indem man der Kürze wegen $\frac{2b^2}{a} = m$ und $\frac{b^2}{a^2} = n$ setzt; so findet man eben so

$$dy = \frac{(m-2nx)dx}{2y};\quad ds = \frac{dx}{dy}\sqrt{[(m-2nx)^2+4y^2]};$$

$$d^2y = -\frac{dx^2}{4y^3}[(m-2nx)^2+4ny^2];$$

also $\rho = \frac{1}{2m^2}[4(mx-nx^2)+(m-2nx)^2]^{\frac{3}{2}}$.

Aber nach §. 179. Zus. 1. (α) ist die Normale

$$N = y\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}} = y\sqrt{\frac{ds^2}{dx^2}} = \frac{yds}{dx};$$

folglich (durch Substit.)

$4N = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{[4(mx-nx^2)+(m-2nx)^2]}$, also auch

$$\rho = \frac{4N^3}{m^2} = \frac{a^2N}{b^4}.$$

Zusatz 2. Sucht man den Durchschnitt der Normale, deren Gleichung nach §. 179. Zus. 1. (1) zwischen den veränderlichen Coordinaten

$$y'-y = -(x'-x)\frac{dx}{dy}, \text{ oder } (y'-y)dy+(x'-x)dx = 0$$

ist, mit der nächstfolgenden Normale; so darf man nur diese Gleichung in Beziehung auf x und y differenziiren. Man findet

$(y'-y)d^2y - dy.dy - dx.dx = 0$, oder $(y'-y)d^2y - ds^2 = 0$.

Hieraus den für $y'-y$ entwickelten Werth $\frac{ds^2}{d^2y}$ in der vorigen Gleichung substituirt, hat man

$$x'-x = \frac{ds^2.dy}{dx.d^2y}.$$

Wenn man dieſe Werthe des Durchſchnittspunktes x', y' beider Normalen in dem Werthe von ρ^2 §. 180., oder, weil hier x und y die oben angeführte Bedeutung der Coordinaten A, B des Mittelpunktes haben, in der Gleichung

$$\rho^2 = (y'-y)^2 + (x'-x)^2$$

ſubſtituirt; ſo findet man wieder

$$\rho = \frac{ds^3}{dx.d^2y},$$

wie im §. 180.; woraus denn folgt, daß der Mittelpunkt des Krümmungskreiſes zugleich der Durchſchnittspunkt zweier nächſten Normalen der gegebenen Curve ſey.

Zuſatz 5. Beſtimmt man vorerſt mittelſt der zwiſchen x, y gegebenen Gleichung einer Curve die Werthe von dy, d^2y, und eliminirt dann x; ſo bekommt man für die Coordinaten A, B des Mittelpunktes von x unabhängige, folglich für jeden Punkt der Curve geltende Ausdrücke, oder man findet die Gleichung der Evolute, d. i. derjenigen Curve, in welcher alle Mittelpunkte der gegebenen Curve oder Evolvente liegen.

Beiſpiel. Für die Parabel iſt $y^2 = 2px$, daher vermöge des vorigen Zuſ. 1., weil $\frac{1}{2}a$ hier $= p$ oder $a = 2p$ iſt,

$$A = 3x + p \text{ und } B = -\frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2p}}.$$

Um x zu eliminiren, hat man aus der erſten Gleichung

$$x = \frac{A-p}{3}$$

und aus der zweiten Gleichung

$$-\frac{B\sqrt{2p}}{4} = x^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{A-p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(A-p)^{\frac{1}{2}}}{27},$$

$$\text{oder } \frac{B^2.p}{8} = \frac{(A-p)^3}{27}, \text{ daher } B^2 = \frac{8}{27p}(A-p)^3,$$

oder, bei Veränderung des Anfangspunktes der Abſciſſen und $A - p = A'$ geſetzt, die geſuchte Gleichung der Evolute

$$B^2 = \frac{8}{27p} \cdot A'^3.$$

Die Curve, für welche diese Gleichung gilt, ist die Neil'sche Parabel (§. 129.).

Wenn umgekehrt die Gleichung $B = \varphi(A)$ der Evolute gegeben ist, und aus den Gleichungen (4) und (5) des §. 180., nämlich

$$A = x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx^2+dy^2}{d^2y} \text{ und } B \text{ oder } \varphi(A) = y + \frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$$

die Größe B eliminirt wird; so hat man die für die Evolvente gesuchte Differenzialgleichung in x, y.

b. Rectifikation der Curven.

§. 181. Erklärung. Unter Rectifikation wird die Verwandlung einer Curve oder eines Bogens, als Theiles derselben, in eine gleiche oder eben so lange gerade Linie verstanden; die Verwandlung sey genau oder nur möglichst annähernd. Ein Beispiel bietet die uns schon bekannte Rectifikation der Kreislinie dar.

§. 182. Lehrsatz. Wenn s den zu rectifizirenden Bogen und x, y die zugehörigen Coordinaten bezeichnen; so ist allgemein

$$ds = \pm\sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

wo + gilt, wenn die Aenderungen des Bogens und der Abscisse oder Ordinate gleichnamig sind.

Beweis. In Fig. 52. sey AY der Ast einer Curve, an dessen hohlen Seite die Axe AX genommen ist. Ferner seyen für den Punkt M des Bogens $AM = s$ die rechtwinkeligen Coordinaten $PM = y$ und $AP = x$; die endliche Zunahme des Bogens s sey $MN = \triangle s$, demnach (indem man MD || AX zieht) $ND = \triangle y$ und $PQ = \triangle x$. Endlich sey für M die Tangente MT, und für den Bogen MN die Sehne NMS bis zur verlängerten Axe gezogen.

Stellt man sich für einen dem M unendlich nahen Punkt m die Ordinate pm || PM gezogen vor; so wird $mr = dy$ und $Mr = Pp = dx$, und wegen der ähnlichen Dreiecke MPT, Mmr ist

$PT : PM = dx : dy$, oder $PT^2 : PM^2 = dx^2 : dy^2$;

also auch $PT^2 + PM^2 : PM^2 = dx^2 + dy^2 : dy^2$,

oder $(\alpha) \ldots TM^2 : y^2 = dx^2 + dy^2 : dy^2$.

Eben so ist wegen der ähnlichen Dreiecke MPS, MND

$$PS : PM = \Delta x : \Delta y, \text{ und hieraus}$$

$(\beta) \ldots SM^2 : y^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 : \Delta y^2$ (wie vorhin).

Aus (α) folgt $TM = \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$ und

aus (β) folgt $SM = \frac{y\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}}{\Delta y}$.

Denkt man sich N unendlich nahe an M genommen, so daß N mit m und M, daher auch MS mit MT zusammenfällt; so hat man, da MN oder Δs in ds übergeht, und

$$\frac{\sqrt{(\Delta x+^2\Delta y^2)}}{\Delta y} = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}.$$

wird, das Differenzialverhältniß

$$\frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy} \text{ oder } ds = \pm\sqrt{(dx^2+dy^2)},$$

wofür man auch schreiben kann

$$ds = \pm dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}, \text{ oder } ds = \pm dy\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2}+1\right)},$$

welcher letztern Formel man sich bedient, wenn die Integration der erstern Schwierigkeiten darbietet, oder wenn sich die Gleichung der gegebenen Curve nicht auf die Form $y = f(x)$, wohl aber auf die Form $x = \varphi(y)$ bringen läßt.

Zusatz. Allein man kann auch für den Fall, wo die Coordinaten aus einem andern Punkte z. B. C einer der Lage nach gegebenen Linie AC gezogen werden, die Natur einer Curve durch eine Gleichung zwischen der veränderlichen $CM = v$ und dem von AC und CM gebildeten Winkel $ACM = \varphi$ bestimmen wollen. In diesem Falle hat man denn, wenn das Perpendikel $MP = z$ auf AC gefällt, und die Abscisse CP mit u

bezeichnet wird, wie vorhin, und zwar wegen der ungleichnamigen Aenderungen des Bogens AM und der Abscisse CP (die beim Wachsen des Bogens abnimmt)

$$dAM \text{ oder } ds = -\sqrt{(du^2+dz^2)}.$$

Im Dreiecke MPC ist

$$MP = MC.\sin MCA \text{ und } CP = MC.\cos MCA,$$

d. i. $z = v.\sin\varphi$ und $u = v.\cos\varphi$, daher

$$dz = dv.\sin\varphi + v.\cos\varphi.d\varphi, \text{ und eben so}$$

$$du = dv.\cos\varphi - v.\sin\varphi.d\varphi \text{ (§. 138. (1)(2)).}$$

Diese Werthe quadrirt und gehörig reducirt, hat man (wegen $\sin\varphi^2+\cos\varphi^2=1$)

$$ds = -\sqrt{(dv^2+v^2.d\varphi^2)} = -dv.\sqrt{\left(1+\frac{v^2.d\varphi^2}{dv^2}\right)}.$$

Anmerkung. Die Punkte M, N einander unendlich nahe gedacht, wird das Dreieck DMN das charakteristische oder Elementar-Dreieck genannt, weil jeder unendlich kleine Theil der Curve mit der Seite MN eines solchen Dreiecks, demnach die ganze Curve mit dem Perimeter des durch solche Dreiecke, als seine Elemente, erzeugten Unendlichecks betrachtet werden kann.

§. 183. Aufgabe 1. Einen parabolischen Bogen zu rectifiziren.

Auflösung. Die Gleichung $y^2=2px$ für die Parabel differenziirt, findet man

$$dy = \frac{pdx}{y} = \frac{pdx}{\sqrt{2px}}, \text{ oder } dy^2 = \frac{pdx^2}{2x}, \text{ daher}$$

$$ds = \sqrt{\left(dx^2+\frac{p.dx^2}{2x}\right)} = dx\sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)} + C.$$

Hievon ist nach §. 152. nr. 17. das Integral

$$s = \sqrt{(x^2+\tfrac{1}{2}px)} + \tfrac{1}{2}p.\lambda[x+\tfrac{1}{2}p+\sqrt{(x^2+\tfrac{1}{2}px)}] + C.$$

Rechnet man den parabolischen Bogen vom Scheitel an, wodurch für $x=0$ das ganze Integral verschwindet, oder

$$\tfrac{1}{2}p \cdot \lambda \tfrac{1}{2}p + C = 0$$

wird; so ist die Konstante $C = -\tfrac{1}{2}p \cdot \lambda \tfrac{1}{2}p$.

Zusatz. Auch kann der rectifizirte parabolische Bogen durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden. Wenn man nämlich in der Gleichung $y^2 = 2px$ der Kürze wegen wieder a statt 2p setzt; so findet man auf die vorige Weise, indem man jetzt zunächst den Werth für dx^2 sucht,

$$ds = \frac{dy}{a}(a^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Aber mittelst der Binomialformel ist

$$(a^2+4y^2)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{2y^2}{a} - \frac{2y^4}{a^3} + \frac{4y^6}{a^5} - \frac{10y^8}{a^7} + - \ldots$$

Jedes dieser Glieder mit $\frac{dy}{a}$ multiplizirt und dann integrirt, hat man

$$s = y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8} + - \ldots$$

§. 184. Aufgabe 2. Einen elliptischen Bogen $BM = s$ (Fig. 55.) zu rectifiziren.

Auflösung. Sey AMB der elliptische und AND der Kreisquadrant; CP die vom Mittelpunkte an genommene und gemeinschaftliche Abscisse $x (= NQ)$ und $PM = y$ die für den Punkt M zugehörige Ordinate.

Durch Differenziirung der Gleichung der Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ oder } a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$$

entwickelt man

$$dy = -\frac{b^2x \cdot dx}{a^2y} \text{ oder } dy^2 = \frac{b^2x^2}{a^4 - a^2x^2} \cdot dx^2, \text{ daher}$$

$$ds^2 = dx^2 + \frac{b^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2} = \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)} \cdot dx^2$$

$$= \frac{a^2dx^2}{a^2 - x^2} - \frac{(a^2 - b^2)dx^2}{a^2 - x^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}.$$

Setzt man $\frac{x}{a}$ oder $\frac{NQ}{CD}$, d. i. den Sinus des Kreisbogens DN für den Halbmesser a gleich z; so ist

$$\frac{x^2}{a^2} = z^2;\ x^2 = a^2z^2;\ x = az;\ dx = adx;\ dx^2 = a^2dz^2;$$

daher $ds^2 = \frac{a^2dz^2}{1-z^2} - \frac{(a^2-b^2)a^2dz^2}{a^2(1-z^2)} \cdot z^2,$

oder, $\frac{a^2-b^2}{a^2} = e^2$ gesetzt,

$$ds^2 = \frac{a^2-a^2e^2z^2}{1-z^2}.dz^2 \text{ oder } ds = adz\frac{\sqrt{(1-e^2z^2)}}{\sqrt{(1-z^2)}}.$$

Wenn man in der Entwickelung von $\sqrt{(1-e^2z^2)}$ die Binomial-Coefficienten mit A, B, C, ... bezeichnet; so hat man

$$\sqrt{(1-e^2z^2)} = 1 - Ae^2z^2 - Be^4z^4 - Ce^6z^6 - \ldots;$$

$$\text{also } ds = a\left(\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} - \frac{Ae^2z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)}} - \frac{Be^4z^4dz}{\sqrt{(1-z^2)}} - \ldots\right).$$

Weil nun jedes dieser Glieder nach den Formeln §. 159. (VI) Zus. 2. integrirbar, und die beizufügende Konstante = 0 ist, indem für x = 0 auch das Integral = 0 seyn soll; so gibt die Integration der vorigen Gleichung den rectifizirten elliptischen Bogen s.

Zusatz. Ist dieser Bogen s der elliptische Quadrant AMB selbst; so wird $\frac{x}{a}$ (= z), da hiedurch (wie vorhin erinnert wurde) überhaupt der Sinus eines Bogens, dessen Halbmesser AC (= CD = a) ist, bezeichnet wird, gleich dem Sin. tot. = 1. Weil nun der Bogen, dessen Sinus = 1 ist, = 90° oder, rectifizirt gedacht, = $\frac{1}{2}\pi$, d. i. weil arc. sin $\frac{z}{a} = \frac{1}{2}\pi$ ist; so hat man mittelst eben jener Integralformeln

$$AMB = a.\tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \tfrac{1}{2}Ae^2 - \frac{1.3}{2.4}Be^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}Ce^6 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}De^8 - \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}Ee^{10} - \ldots\right),$$

in welcher Formel man nur noch für A, B, C, ... die Zahlen

resp. $\frac{1}{2}$; $\frac{1.1}{2.4}$; $\frac{1.1.3}{2.4.6}$; $\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}$; ... substituiren darf.

§. 185. Aufgabe 5. Einen hyperbolischen Bogen s zu rectificiren.

Auflösung. Weil, die Abscisse wieder vom Mittelpunkte an gerechnet, die Gleichung der Hyperbel

$$a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2 \quad (\S.\ 90.\ II.\ 5))$$

sich von der für die Ellipse nur durch die entgegengesetzten Zeichen der beiden letzten Glieder unterscheidet; so darf man nur im Quadrate des Differenzials des elliptischen Bogens (§. 184.) die Zeichen ändern, um hinsichtlich der Hyperbel den Ausdruck

$$ds^2 = \frac{(a^2+b^2)x^2 - a^4}{a^2(x^2-a^2)} \cdot dx^2$$

zu haben. Hierin $\frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{1}{n^2}$ gesetzt, wird

$$ds^2 = \frac{x^2 - n^2a^2}{n^2(x^2-a^2)} \cdot dx^2, \text{ oder } ds = \frac{dx\sqrt{(x^2-n^2a^2)}}{n\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

Man hat wieder

$$\sqrt{(x^2-n^2a^2)} = x - A.\frac{n^2a^2}{x} - B.\frac{n^4a^4}{x^3} - C.\frac{n^6a^6}{x^5} - \ldots,$$

wo A, B, C, ... die Zahlwerthe wie im §. 184. haben. Jedes Glied dieser Reihe, mit $\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$ multiplizirt gedacht, erhält, als Differenzial, die Form

$$\frac{Mdx}{x^m\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

Hiemit die Formel nr. 59. im §. 159. verglichen, erhellt, daß, weil jetzt $b = 1$ und $+a = -a^2$ ist,

$$(Q) \ldots \int \frac{dx}{x^m\sqrt{(x^2-a^2)}} = +\frac{1}{(m-1)a^2} \cdot \frac{\sqrt{(x^2-a^2)}}{x^{m-1}} + \frac{m-1}{(m-1)a^2} \cdot \int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

ſey, und daß wegen des ungeraden m die Integration zuletzt auf das Integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}$ führe. Nun iſt

1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \sqrt{(x^2-a^2)}$, wie leicht erhellt;

2) $\int \frac{a^2dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}} = a \,.\, arc.\, sec \frac{x}{a}$ = (M) §. 158. nr. 52.);

3) $\int \frac{a^4dx}{x^3\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2u}{x^2} = \frac{1}{2}$(M), vermöge (Q) und 2), indem nun m = 3 und ſtatt $\sqrt{(x^2-a^2)}$ kurz u geſetzt iſt. Eben ſo iſt wieder für m = 5 vermöge (Q) und 3)

4) $\int \frac{a^6dx}{x^5\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^4}{x^4} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{a^2u}{x^2} + \frac{1.3}{2.4}$(M);

5) $\int \frac{a^8dx}{x^7\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^6u}{x^6} + \frac{1.5}{4.6} \cdot \frac{a^4u}{x^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{a^2u}{x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}$(M),

u. ſ. w.

Weil nun, vermöge der für $\sqrt{(x^2-a^2)}$ entwickelten Reihe,

$$ds = \frac{1}{n} \cdot \frac{xdx}{u} - Au \cdot \frac{a^2dx}{x.u} - \frac{Bn^4}{n} \cdot \frac{a^4dx}{x^3.u} - \frac{Cn^6}{n} \cdot \frac{a^6dx}{x^5.u} - \ldots$$

iſt; ſo findet man mittelſt der vorigen einzelnen Integrale den hyperboliſchen Bogen durch die unendliche Reihe ausgedrückt:

$$s = \frac{u}{n}\left[1 - \frac{1}{2}Bn^4 \cdot \frac{a^2}{x^2} - \frac{1}{4}Cn^6\left(\frac{a^4}{x^4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2}\right) - \frac{1}{6}Dn^8\left(\frac{a^6}{x^6} + \frac{5}{4} \cdot \frac{a^4}{x^4} \cdot \frac{5.3}{4.2} \cdot \frac{a^2}{x^2}\right) - \ldots\right]$$

$$- n\left[A + \frac{1}{2}Bn^2 + \frac{1.3}{2.4}Cn^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}Dn^6 + \right] \cdot (M).$$

Fängt der Bogen s im Scheitel der Hyperbel an, wo x = a iſt; ſo wird in (Q) das erſte Glied = 0, und auch der Winkel α zur Sekante $\frac{x}{a}$ oder zur Sekante = 1 iſt (nach §. 7. Zuſ. 3.) = 0, folglich auch die Konſtante = 0.

c. Quadratur.

§. 186. Erklärung. Quadratur (Tetragonismus, auch Complanatio im weitern Sinne) iſt die Verwandlung

einer ebenen krummlinigen Figur in eine gleiche geradlinige Figur überhaupt, ins Besondere in ein gleiches Quadrat.

§. 187. Lehrsatz. Wenn in Fig. 54. AP, PM rechtwinklige Coordinaten x, y für den Punkt M irgend einer Curve GK sind, und Z den Flächenraum BCMP zwischen CB, PM, einem Theile BP der Axe AX und einem Bogen CM der Curve bezeichnet; so ist allgemein

$$Z = \int . ydx + C.$$

Beweis. Wächst die Abscisse AP um den endlichen Theil PQ, und übertrifft daher die zu PQ oder $x + \Delta x$ gehörige Ordinate QN die Ordinate PM ($= y$) um den Theil $nN = \Delta y$, so daß $QN = Pm = y + \Delta y$ ist; so wächst auch die Fläche BCMP ($= Z$) um den endlichen Theil $PMNQ = PQnM + nMN = \Delta Z$.

Nun ist das Rechteck $PQnM = PM . PQ = y\Delta x$, und das Rechteck $mQ = Pm . PQ = (y + \Delta y)\Delta x$; folglich ist offenbar $\Delta Z > y\Delta x$, aber $\Delta Z < (y + dy) . \Delta x$, oder $\frac{\Delta Z}{\Delta x} > y$ und $\frac{\Delta Z}{\Delta x} < (y + \Delta y)$. Allein die Zunahme PQ kann so klein, oder der Punkt Q so nahe an P genommen werden, daß diese Punkte, daher auch N und M, oder die Grenzen y und $y + \Delta y$, zwischen welchen die Größe des Differenzquotienten $\frac{\Delta Z}{\Delta x}$ liegt, als zusammenfallend betrachtet werden können. In diesem Falle wird denn der Differenzialquotient $\frac{dZ}{dx} = y$, woraus $dZ = ydx$ und das Integral $Z = \int . ydx + C$ erhalten wird.

Zusatz 1. Für ungleichnamige Aenderungen von x und Z (wenn z. B. x zu-, Z aber abnimmt) gilt $dZ = -ydx$.

Zusatz 2. Für nicht senkrechte Coordinaten, die den Winkel α bilden, ist $Z = \int . ydx . \sin \alpha$, weil das dann schiefwinklige Parallelogramm PQnM durch $PQ . h$, die Höhe h aber durch $PM . \sin \alpha$ oder $y . \sin \alpha$ ausgedrückt wird.

Zusatz

Zusatz 3. Wie bei gegebener Curve der Flächenraum BMCP zwischen den Ordinaten BC, PM ein bestimmter ist, wenn man den Abscissen AB, AP bestimmte Werthe beilegt; eben so nennt man die durch $\int. ydx$ ausgedrückte Quadratur eine bestimmte, wenn die Werthe der Coordinaten x, y, bei welchen die Fläche anfängt und endet, bestimmt sind; sonst drückt $\int. ydx$ eine unbestimmte Quadratur aus.

§. 188. Aufgabe 1. Sey AY (Fig. 52.) der Ast einer Parabel, für welche $y^2 = px$ oder $y = \sqrt{px}$ (wo p den ganzen Parameter bezeichne) gilt; die parabolische Fläche zwischen $AP = x$, $PM = y$ und dem Bogen AM zu quadriren.

Auflösung. $APM = \int. ydx = \int. \sqrt{px}.dx = \int. p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}.dx$
$= \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{px} = \frac{2}{3} xy = \frac{2}{3} AP.Pm = \frac{2}{3} PR + C.$

Da hier die Abscissen vom Scheitel A der Parabel an gerechnet sind; so verschwindet für $x = 0$ sowohl die Ordinate y, als auch jenes Integral oder die Fläche APM; d. i. man hat $0 + C = 0$. Es hat aber die Konstante immer denselben Werth, folglich fällt sie auch für jeden andern Fall weg und APM ist $= \frac{2}{3} xy$.

Es verhält sich demnach das Rechteck PR $(= xy)$ unter den Coordinaten zu $APM = 1 : \frac{2}{3}$ oder $= 3 : 2$, und eben dieses parabolische Trilineum zu dem geradlinigen AMP $(= \frac{1}{2} xy)$, wie $\frac{2}{3} : \frac{1}{2}$ oder wie 4 : 3.

Zusatz 1. Um die parabolische Fläche PMNQ zu quadriren, setze man in der Entfernung $AP = a$ vom Scheitel den Anfangspunkt der Abscissen, demnach $PQ = x$ und $QN = y$. Unter dieser Voraussetzung ist $y^2 = (a + x)p$ oder $y = (ap + px)^{\frac{1}{2}}$. Der Kürze wegen $ap + px = u$ gesetzt, ist $dx = \frac{1}{p} du$, daher

$$Z = \int. ydx = \int. \frac{1}{p} u^{\frac{1}{2}}. du = \frac{2}{3p} u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3p} u\sqrt{u};$$

folglich durch Substitution

$$PMNQ = \frac{2}{3p} (ap + px)\sqrt{(ap + px)} = \frac{2}{3}(a + x)\sqrt{p(a + x)} + C.$$

Weil aber auch in dieſem Falle für $x = 0$ das Integral verſchwindet; ſo muß die Konſtante ſo genommen werden, daß

$$\tfrac{2}{3}(a+x)\sqrt{p(a+x)} + C = 0$$

ſey, wenn $x = 0$ geſetzt wird. Hiedurch erhält man

$$\tfrac{2}{3}a\sqrt{ap} + C = 0 \text{ oder } C = -\tfrac{2}{3}a\sqrt{ap},$$

alſo das vollſtändige Integral oder die Fläche

$$PMNQ = \tfrac{2}{3}(a+x)\sqrt{p(a+x)} - \tfrac{2}{3}a\sqrt{ap}.$$

In der That iſt dieſes eben ſo viel, als man hätte den paraboliſchen Raum AQN quadrirt und von demſelben die Fläche APM ($= \tfrac{2}{3}AP.PM = \tfrac{2}{3}a\sqrt{ap}$) abgezogen.

Zuſatz 2. Stellt AX irgend einen Durchmeſſer der Parabel, PM die halbe, der für den Punkt A gezogenen Tangente parallele, Sehne, d. i. die Ordinate $= y$ und $AP =$ die Abſciſſe $= x$ des Durchmeſſers vor; bezeichnet ferner α den von PM mit PA gebildeten Winkel; ſo iſt die Fläche $APM = \tfrac{2}{3}xy.\sin\alpha$ (§. 187. Zuſ. 2.).

Zuſatz 3. Wenn F der Brennpunkt der Parabel, $FM = r$ der Radius vector für den Punkt M und $\varphi = AFM$ iſt; ſo iſt die Fläche

$$AMF = APM - FMP = \tfrac{2}{3}xy - \tfrac{1}{2}FP.PM.$$

Aber $FP = AP - AF = x - \tfrac{1}{2}p$ (§. 99. Zuſ. 2.); alſo die Fläche

$$(1) \ldots AMF = \tfrac{2}{3}xy - \tfrac{1}{3}(x - \tfrac{1}{2}p)y.$$

Um eben dieſer Fläche Werth in r, p und φ auszudrücken, entwickelt man im Dreiecke MPF die Ordinate $PM = FM.\sin MFP$, d. i. $y = r.\sin\varphi$; eben ſo $FP = r.\cos MFP = -r.\cos\varphi$, daher $x = AP = AF + FP = \tfrac{1}{2}p - r.\cos\varphi$. Dieſe Werthe in (1) ſubſtituirt, erhält man durch gehörige Reduktion

$$(2) \ldots AMF = \tfrac{1}{3}(p - r.\cos\varphi)\,r.\sin\varphi.$$

Um endlich dieſen Werth bloß in p und φ zu bekommen, ſubſtituirt man ſtatt r deſſen Werth $\frac{\frac{1}{2}p}{\cos\frac{1}{2}\varphi^2}$ (§. 93.) oder $\frac{\frac{1}{2}p}{\cos\frac{1}{2}\varphi^2}$ (wo nun p = dem ganzen Parameter) $= \frac{p}{2(1+\cos\varphi)}$ (§. 22. nr. 151.). Man erhält dann ſtatt (2)

$$(5)\ldots AMF = \frac{1}{6}\left(p - \frac{p.\cos\varphi}{2(1+\cos\varphi)}\right)\frac{p.\sin\varphi}{2(1+\cos\varphi)}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{2p+p\cos\varphi}{2(1+\cos\varphi)}\right)\frac{p\sin\varphi}{2(1+\cos\varphi)} = \frac{1}{24}p^2.\frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi}.\frac{\sin\phi}{1+\cos\varphi}.$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdruckes dient:

$$\frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = 2 - \frac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = 2 - \tfrac{1}{2}(1 - \operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\varphi^2)\ (\S.22.\ nr.156.3))$$

$$= \tfrac{1}{2}(3 + \operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\varphi^2),\ \text{und}\ \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi\ (\text{ebend.}).$$

Also statt (3)

$$(4)\ldots AMF = \tfrac{1}{48}p^2\,(1 + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\varphi^2).\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$= \tfrac{1}{16}p^2\,(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^3).$$

Bilden demnach in zwei verschiedenen Parabeln die Radienvektoren FM gleiche Winkel φ mit den Axen; so verhalten sich jene Flächen AMF, wie die Quadrate der Radienvektoren, (welchen Satz der Astronom bei Bestimmung der paraboliſchen Bahn eines Kometen benützt).

§. 189. Aufgabe 2. Eine elliptische Fläche $Z = APME$ (Fig. 42.) zu quadriren.

Auflösung. Vermöge der Gleichung für die Ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$, wo $y = PM$ und $x = AP$, ist

$$APME = \int y\,dx = \frac{b}{a}\int dx\,\sqrt{(a^2-x^2)} =$$

$$\frac{b}{2a}\left[x\,\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2.\ \text{arc.}\ \sin\frac{x}{a}\right]\ (\S.148.\ nr.46.),$$

und zwar ohne Konstante, weil für $x = o$ auch dieser ganze Ausdruck $= 0$ wird.

Zusatz 1. Für $x = AB = a$ ist der elliptische Quadrant $AEB = \frac{1}{4}ab.\ \text{arc.}\ \sin 1 = \frac{1}{4}ab\pi$

also die ganze Ellipse $= ab\pi$.

Zusatz 2. In jenen Ausdrücken $a = ab$ gesetzt, erhellen die entsprechenden Quadraturen hinsichtlich des Kreises; dieser ist z. B., seinen Halbmesser $= a$ gesetzt, $= a^2\pi$, d. i. die Ellipse $(= ab\pi)$ ist so groß, als ein Kreis, dessen Halbmesser a die

mittlere ſtetige Proportionale zwiſchen den Halbaxen der Ellipſe iſt.

§. 190. Aufgabe 3. Eine hyperboliſche Fläche $Z = Bnp$ (Fig. 47.) zu quadriren.

Auflöſung. In der cit. Figur iſt $AB = a$, $AL = BE = b$, die vom Scheitel B an genommene Abſciſſe (für den Punkt n) $Bp = x$ und die zugehörige Ordinate $np = y$. Demnach iſt vermöge §. 90. 3) γ')

$$Bnp = \int y\,dx = \frac{b}{a}\int dx\,\sqrt{(2ax + x^2)}$$

$$= \frac{b}{2a}(a+x)\,\sqrt{(2ax+x^2)} - \tfrac{1}{2}ab\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$$

nach §. 159. nr. 58., folglich nach nr. 54. ebend.

$$Bnp = \frac{b}{2a}(a+x)\,\sqrt{(2ax+x^2)} - \tfrac{1}{2}ab\,\lambda\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{C}.$$

Dieſe Conſtante C muß ſo gewählt werden, daß für $x = 0$ die Fläche Z, und demnach nebſt dem erſten Gliede des vorigen Ausdruckes auch das zweite Glied verſchwinde; was geſchieht, wenn man $C = a$ ſetzt, indem dann aus dieſem letzten Gliede für $x = 0$ enthalten wird $\lambda\frac{a}{a} = \lambda 1 = 0$. Alſo iſt Z oder

$$Bnp = \frac{b}{2a}(a+x)\,\sqrt{(2ax+x^2)} - \tfrac{1}{2}ab\,\lambda\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{a},$$

oder, wenn man wieder y ſtatt $\frac{b}{a}\sqrt{(2ax+x^2)}$ ſetzt,

$$Bnp = \tfrac{1}{2}(a+x).y - \tfrac{1}{2}ab\,\lambda\frac{b(a+x)+ay}{ab}.$$

Zuſatz 1. Zieht man vom Dreiecke Anp den Raum Bnp ab; ſo bleibt zwiſchen AB, Bn und dem hyperboliſchen Bogen Bn der Sektor AnB übrig. Aber jenes Dreieck $Anp = \frac{1}{2}Bp.pn = \frac{1}{2}(a+x).y$; folglich iſt der hyperboliſche Sektor

$$AnB = \tfrac{1}{2}ab\,\lambda\frac{b(a+x)+ay}{ab}.$$

Weil ferner in der Gleichung $b^2(2ax+x^2) = a^2y^2$ für die Hyperbel der Faktor $2ax + x^2 = (a+x)^2 - a^2$, daher auch $b^2(a+x)^2 - a^2b^2 = a^2y^2$, oder

$b^2(a+x)^2-a^2y^2=a^2b^2$, d. i. $(b(a+x)+ay)(b(a+x)-ay)=a^2b^2$ ist, folglich in obigem Ausdrucke für AnB

$$\text{statt } \frac{b(a+x)+ay}{ab} \text{ auch } \frac{b^2(a+x)^2-a^2y^2}{ab(b(a+x)-ay)}$$

gesetzt werden kann; so hat man wegen $b^2(a+x)^2-a^2y^2=a^2b^2$ auch diesen Ausdruck für den Sektor, nämlich

$$AnB=\tfrac{1}{2}ab\lambda\frac{ab}{b(a+x)-ay}.$$

Zusatz 2. Weil für die gleichseitige Hyperbel $a=b$ ist, so ist für diese der Ausschnitt

$$AnB=\tfrac{1}{2}a^2\lambda\frac{a+x+y}{a}=\tfrac{1}{2}a^2\lambda\frac{a}{a+x-y} \text{ (wie im Zus. 1.)}$$
$$=\tfrac{1}{2}a^2\lambda\frac{u+y}{a}=\tfrac{1}{2}a^2\lambda\frac{a}{u-y},$$

indem nämlich die vom Mittelpunkte A an gerechnete Abscisse $Ap=a+x$ gleich u gesetzt wird.

Zusatz 3. Wenn mit der Asymptote Ar parallel BG und nv gezogen werden; so ist die asymptotische Fläche BGvn zwischen den Geraden BG, Gv, vn und dem hyperbolischen Bogen Bn gleich dem Sektor AnB.

Denn nach §. 126. Zus. 4. ist das Rechteck AG. BG unter den asymptotischen Coordinaten = dem Rechtecke Av. vn, oder es ist

$$AG : Av = vn : BG,$$

d. i. in den Dreiecken ABG, Anv sind die Seiten einander umgekehrt proportional; allein auch die Winkel bei G und v sind gleich, also auch jene Dreiecke selbst.*) Demnach ist auch

*) Man kann dieses leicht so einsehen: In Fig. 55. ist hinsichtlich der Drei. ABC, ADE der W. $r=s$; ferner sey $AB : AE = AD : AC$. Zieht man CE; so ist nach Geom. §. 110.

$$\triangle BCA : \triangle ECA = AB : AE; \text{ eben so}$$
$$\triangle DEA : \triangle ECA = AD : AC,$$

woraus, da die letzten Verhältnisse, also auch die ersten gleich sind, die Gleichheit der genannten Dreiecke folgt.

BnvA — ABG (d. i. das Quadrilineum BnvG) = BnvA — Anv (d. i. dem Sektor AnB, der mit BnvG und BnvA den hyperbolischen Bogen Bn gemein hat).

Dieses vorausgesetzt, kann man jenes Quadrilineum BGvn in den asymptotischen Coordinaten Av = t, vn = v, den halben conjugirten Axen a, b und der Excentricität e ($=\sqrt{(a^2+b^2)}$ nach §. 113. II.) ausdrücken.

Nämlich in den ähnlichen Drei. BEG, nsv ist

$$BG : BE = nv : ns;$$

aber $BG = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$ (§. 126. Zus. 4.) $= \frac{1}{2}e$: BE = b, folglich ist $ns = \frac{2bv}{e}$.

Eben so ist $AB : BE = Ap : ps$, d. i. $ps = \frac{b(a+x)}{a}$, daher

$$ns = \frac{b(a+x)}{a} - y = \frac{b(a+x)-ay}{a} = \frac{2bv}{e},$$

$$\text{oder } \frac{b(a+x)-ay}{ab} = \frac{2v}{e};$$

d. i. $BGvn = AnB = \frac{1}{2}ab\lambda\frac{ab}{b(a+x)-ay}$ (Zus. 1.) $= \frac{1}{2}ab\lambda\frac{e}{2v}$.

Weil ferner (nach §. 126. Zus. 4.) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ oder $\frac{1}{2}e^2 = t.v$, d. i. $e^2 = 2t.2v$, daher $\frac{e}{2v} = 2t$ ist; so hat man auch für jenes Quadrilineum den Ausdruck

$$BGvn = \frac{1}{2}ab.\lambda\frac{2t}{e}.$$

Zusatz 4. Stellt man sich die Abscissen t, t', t'', ... von AG an, deren zugehörige Ordinate BG ist, in geometrischer Progression fortschreitend vor; so werden die entsprechenden asymptotischen Flächen f, f', f'', ... (wie BGvn) in einer arithmetischen Progression fortgehen.

Seyen nämlich t, t' irgend zwei unmittelbar aufeinander folgende Abscissen, und f, f' die entsprechenden Flächen, daher

$$f = \frac{1}{2}ab.\lambda\frac{2t}{e} \text{ und } f' = \frac{1}{2}ab\lambda\frac{2t'}{e};$$

so ist ihr Unterschied

$$d = \tfrac{1}{2} ab \left(\lambda \frac{2t'}{e} - \lambda \frac{2t}{e} \right) = \tfrac{1}{2} ab \lambda \frac{t'}{t}.$$

Wenn daher jedes Verhältniß $t : t'$ oder $t' : t''$ Konstant ist; so ist auch jeder $\lambda \frac{t'}{t}$, $\lambda \frac{t''}{t'}$ konstant, demnach sind die Unterschiede $d, d', d'', \ldots$ jener Flächen $f, f', f'', \ldots$ einander gleich; d. i. diese asymptotischen Flächen bilden eine arithmetische Progression, während die zugehörigen Abscissen $t, t', t'', \ldots$ in einer geometrischen Progression fortgehen.

Es sind also jene Flächen die natürlichen Logarithmen dieser asymptotischen Abscissen der Hyperbel (allgem. Größenl. §. 156.); wodurch sich denn die Benennung „hyperbolischer Logarithmus" statt „natürlicher Logar." erklärt.

d. Kubatur.

§. 191. Erklärungen. 1. Kubatur in engem Sinne ist die Verwandlung eines Körpers in einen gleichen Würfel; in weiterem Sinne aber die Vergleichung des Inhaltes eines Körpers mit dem eines andern, z. B. einer Kugel, eines Cylinders, ... von bestimmter Größe.

Auf dieselbe Weise, wie man sich z. B. die Kugel durch Umdrehung eines (generirenden) Halbkreises um den fixen Durchmesser, als Axe, entstanden vorstellt (Geom. §. 175.), kann man sich mehrere runde Körper um eine fixe Gerade entsprungen denken (solides de revolution). Dieser Körper sind wesentlich drei Arten:

a) der kegelförmige Körper oder das Konoid (Conoides) in wiefern die auf die Axe senkrechten Ordinaten der Curve, die von der Axe geschnitten wird, beständig zunehmen: das paraboliſche und hyperboliſche Konoid (auch Paraboloid und Hyperboloid von Andern genannt).

b. Der cylinder- oder walzenförmige Körper (Cylindroides) in wiefern zwar die Ordinaten der Curve beständig zu- oder abnehmen, die Curve selbst aber die Axe nir-

gends schneidet, wie wenn sich z. B. die Hyperbel um die conjugirte oder zugeordnete Axe dreht.

c. Der kugelartige Körper (Sphäroides) in wiefern die Curve eine in sich zurückekehrende ist. Allgemeiner ist das Sphäroid (auch Ellipsoid oder Elliptoid) der von einer solchen Oberfläche begrenzte Körper, deren Durchschnitt mit jeder Ebene, die durch eine von drei aufeinander senkrechten Axen (Coordinatenaxen) gelegt wird, eine Ellipse ist.

§. 192. Lehrsatz. Der Inhalt W eines dieser runden Körper wird allgemein ausgedrückt durch

$$W = \pi . \int y^2 dx + C.$$

Beweis. Es entstehe durch eine volle Umdrehung der Curve AM (Fig. 52.) um die in ihrer Ebene liegende Axe AX irgend ein runder Körper, dessen Inhalt W aus der Gleichung der Curve zwischen ihren Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ zu bestimmen ist.

Nimmt man die Abscisse $AQ = x + \triangle x$ und die entsprechende Ordinate $QN = y + \triangle y$; so ist der Inhalt des durch Umdrehung der Curve Amn entstandenen Körpers $= W + \triangle W$; der von PM während der Umdrehung der Curve beschriebene Kreis $= y^2\pi$ und der von QN beschriebene $= (y + \triangle y)^2\pi$, zwischen welchen Kreisen denn das durch $\triangle W$ ausgedrückte Segment des entstandenen Körpers enthalten ist. Dieser Abschnitt nun ist $> \pi y^2 . \triangle x$, aber $< \pi (y + \triangle y)^2 . \triangle x$, wenn $NQ > MP$ ist; d. i. $\frac{\triangle W}{\triangle x} > y^2\pi$, aber $\frac{\triangle W}{\triangle x} < (y + \triangle y)^2\pi$. Demnach wird, QN unendlich nahe an PM gezogen gedacht, $\frac{dW}{dx} = y^2\pi$, woraus man hat

$$dW = y^2\pi . dx \text{ und } W = \pi . \int y^2 . dx + C.$$

Zusatz 1. Es erhellt leicht, daß, gleichwie im vorigen Beweise $\frac{dW}{dx}$ gleich ist der Kreisfläche $y^2 . \pi$ (als der Grundfläche jenes Segmentes), derselbe Differenzialquotient im All-

gemeinen nur eben diese Grundfläche = B dieser runden Körper ausdrücke, folglich die Differenzialgleichung allgemein sey

$$dW = B.dx.$$

Zusatz 2. Stellt AX einen Kugeldurchmesser, AM einen Bogen des generirenden Halbkreises und MP ein Perpendikel auf die Axe vor; so wird das bei der Umdrehung des Halbkreises erzeugte, dem Bogen AM entsprechende Kugelsegment sogleich gefunden, wenn man in obiger Differenzialgleichung statt y^2 den Werth $2rx - x^2$ (vermöge der bekannten Gleichung des Kreises) substituirt und dann integrirt; man erhält nämlich

$$W = \pi(rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3) = \pi x^2(r - \tfrac{1}{3}x),$$

und zwar ohne Konstante, wie immer, wenn in allen Theilen des Integrals sich die Abscisse x findet.

Ist der Bogen AM der Quadrant des erzeugenden Halbkreises, daher AP oder x nun = AC = r; so ist der Inhalt der halben Kugel $= \pi r^2(r - \tfrac{1}{3}r) = \tfrac{2}{3}r^3\pi$; also der Inhalt der ganzen Kugel $S = \tfrac{4}{3}r^3\pi$. Nun ist der um die Kugel geschriebene Cylinder $Z = 2r^3\pi$, und der dritte Theil desselben gleich einem Kegel $K = \tfrac{2}{3}r^3\pi$, folglich ist auch die Kugel $\tfrac{2}{3}Z = 2K$, und es verhalten sich diese drei, unter denselben Bestimmungen gedachte, Körper, nämlich

$$K : S : Z = \tfrac{2}{3} : \tfrac{4}{3} : 2, \text{ d. i. } = 1 : 2 : 3.$$

(Vergl. Geom. §. 176. Zus. 2. und 3.)

§. 195. Aufgabe 1. Wenn AM (Fig. 52.) der Ast einer Parabel, für welche $y^2 = 2px$ gilt, daher der durch die Umdrehung dieses Astes um die Axe AX entsprungene Körper ein paraboliſches Konoid ist (§. 191); den Inhalt dieses Konoids zu finden.

Auflösung. Weil hier $dW = y^2\pi.dx$ (§. 192.) $= 2\pi px.dx$ wird; so hat man durch Integration

$$W = \pi px^2 = \tfrac{1}{2}\pi x.y^2,$$

indem man nämlich statt x den Werth $y^2 : 2p$ setzt. Auch hier ist aus dem im vorigen Zus. 2. angeführten Grunde die Konstante = 0.

Zuſatz 1. Da $\pi y^2 x$ den Inhalt des Cylinders ausdrückt, deſſen Grundfläche der Kreis mit dem Halbmeſſer $PM = y = r$ und deſſen Höhe $= AP = x$ iſt; ſo verhält ſich jenes Konoid zu dieſem Cylinder $= 1 : 2$, und zu dem Kegel mit denſelben Beſtimmungen $= 3 : 2$.

Zuſatz 2. Dreht ſich aber derſelbe paraboliſche Aſt AM um das im Scheitel A errichtete Perpendikel AR; ſo entſteht ein Konoid mit konkaver Oberfläche, welches zur Grundfläche B den, von der mit AP $(= x)$ parallelen und gleichen Ordinate MR beſchriebenen, Kreis hat. Auch iſt der Kegel mit derſelben Grundfläche B $(= x^2\pi)$ und derſelben Höhe AR $(= PM = y)$ gleich $\frac{1}{3} x^2 \pi . y$. Ferner iſt nun die Differenzialgleichung für jenes Konoid

$$dW = \pi x^2 . dy,$$

weil in dieſem Falle das Perpendikel AR $(= y)$ die Abſciſſe x iſt, oder dy an die Stelle von dx in unſerer allgemeinen Formel $dW = Bdx$ (§. 192. Zuſ. 1.) tritt.

In jener Gleichung den für x^2 aus $y^2 = 2px$ entwickelten Werth $y^4 : 4p^2$ ſubſtituirt, findet man

$$dW = \frac{1}{4p^2} y^4 . dy . \pi, \text{ und } W = \frac{1}{5.4p^2} \pi y^5 = \frac{1}{5} \pi x^2 y,$$

indem man nämlich ſtatt y^4 den Werth $4p^2x^2$ ſubſtituirt.

Dieſes Konoid verhält ſich alſo zu jenem Kegel $= \frac{1}{5} : \frac{1}{3}$ oder $= 3 : 5$.

§. 194. Aufgabe 2. Den Inhalt des Konoids zu finden, welches durch die Umdrehung des Aſtes Bn (Fig. 47.) einer Hyperbel, für welche die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2)$$

gilt, um Bp entſteht.

Auflöſung. Obige allgemeine Differenzialgleichung (§. 192.) geht nun in dieſe über:

$$dW = \frac{\pi b^2}{a^2} (2ax + x^2) dx;$$

woraus durch Integr. entwickelt wird

$$W = \frac{\pi b^2}{a^2} (ax^2 + \frac{1}{3} x^3) = \frac{\pi b^2}{3a^2} (3ax^2 + x^3) = \frac{3\pi b^2 x^2}{3a} + \frac{\pi b^2 x . x^2}{3a^2}.$$

Subſtituirt man in dem letzten Gliede ſtatt x^2 den aus der vorſtehenden Gleichung der Hyperbel entwickelten Werth $\frac{a^2}{b^2}y^2-2ax$; ſo erhält man mittelſt Reduktion $\frac{\pi xy^2}{3}-\frac{2\pi b^2x^2}{3a}$, demnach den Inhalt des hyperboliſchen Konoids

$$W=\frac{\pi xy^2}{3}+\frac{\pi b^2x^2}{3a};$$

d. i. dieſes Konoid iſt gleich dem vom generirenden Dreiecke Bnp beſchriebenen geraden Kegel + dem vom Abſchnitte BnB beſchriebenen Körper (Geom. §. 170.).

Zuſatz. Um den Inhalt des bei der Umdrehung der Hyperbel um die kleine Axe AL von der Figur ApnL beſchriebenen Cylindroids zu finden, hat man, die Ordinate nL = Ap mit u und die Abſciſſe AL = pn mit y bezeichnend,

$$dW=pu^2.dy.$$

Ferner geht obige Gleichung der Hyperbel in dieſem Falle, wo $u=a+x$ oder $x=u-a$ iſt, durch Subſtitution in dieſe über:

$$b^2u^2=a^2(y^2+b^2), \text{ woraus } u^2=\frac{a^2}{b^2}(y^2+b^2).$$

Man erhält folglich

$$dW=\frac{\pi a^2}{b^2}(y^2+b^2)\,dy \text{ und } W=\frac{\pi ay}{3b^2}(y^2+3b^2),$$

oder, in der letzten Gleichung ſtatt y^2 den Werth $\frac{b^2u^2}{a^2}-b^2$ ſubſtituirt, $W=\frac{1}{3}\pi u^2y+\frac{2}{3}\pi a^2y$,

d. i. das Cylindroid gleich dem vom Dreiecke AnL beſchriebenen Kegel + $\frac{2}{3}$ des Cylinders, welchen das Rechteck AE um AL beſchreibt (Geom. §. 168.).

§. 195. Lehrſatz 2. Die Gleichung für die Oberfläche des Sphäroids zwiſchen drei zu demſelben Punkte der Oberfläche gehörigen Coordinaten iſt

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \text{ oder } b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2.$$

Beweis. In Fig. 56. ſey A der Mittelpunkt der Coordinatenaxen AX, AY, AZ (§. 191. c.) eines Sphäroids, das

in unserer Figur mit zwei halben, aufeinander senkrechten elliptischen Durchschnitten BCE und BDE und einen elliptischen Quadranten CAD, durch je zwei jener Axen, gezeichnet ist. A ist zugleich der Mittelpunkt dieser Ellipsen, deren Halbaxen seyen AB = a, AC = b, AD = c.

Durch die Axe BE und einem Punkte f des elliptischen Quadranten sey die halbe Ellipse BFE gezogen, deren Ebene mit der Ellipse BCE den Winkel FAC = φ (Geom. §. 156. Zus. 1.) bilde. Fällt man nun von irgend einem Punkte F der Ellipse BFE auf die Axe AY oder AC das Loth FG, und nimmt die zu dieser Ordinate gehörige Abscisse AG (=u) vom Mittelpunkte an; so hat man für die durch AC, AD gelegte Ellipse nach §. 90. II.) die Gleichung

$$b^2y^2 = c^2(b^2-u^2) \text{ oder } b^2c^2 = b^2y^2 + c^2u^2, \text{ d. i.}$$
$$AC^2 . AD^2 = AC^2 . FG^2 + AD^2 . AG^2.$$

Aber im rechtwinkligen Dreiecke FAG ist

$$FG = AF . \sin\varphi \text{ und } AG = AF . \cos\varphi, \text{ daher}$$
$$(1) \ldots b^2c^2 = (b^2 . \sin\varphi^2 + c^2 . \cos\varphi^2) AF^2.$$

Fällt man ferner von einem andern beliebigen Punkte R der Ellipse BFE auf die Ebene BCE das Loth RQ, von Q das Loth QP auf AP, und zieht RP; so ist die Dreiecksebene RPQ, in welcher jene zwei Perpendikel liegen, selbst auf die Ebene BCE senkrecht, also auch AP auf PR, wie EA auf AF im elliptischen Quadranten CFD; daher sind AF und PR parallel und der Winkel FAC = RPQ = φ (Geom. §. 132.).

Nimmt man endlich die der Ordinate RP (= v) entsprechende Abscisse AP (= x) vom Mittelpunkte A an und als Axen AB (= a) und AF; so hat man, wie vorhin,

$$AB^2 . AF^2 = AB^2 . PR^2 + AF^2 . AP^2, \text{ oder}$$
$$(2) \ldots a^2 . AF^2 = a^2 . v^2 + AF^2 . x^2, \text{ woraus}$$
$$AF^2 = \frac{a^2v^2}{a^2-x^2} = \frac{b^2c^2}{b^2 . \sin\varphi^2 + c^2 . \cos\varphi^2} \text{ (aus (1)); also}$$
$$(3) \ a^2v^2(b^2 . \sin\varphi^2 + c^2 . \cos\varphi^2) = b^2c^2(a^2-x^2).$$

Weil aber RPQ = φ, daher RQ = RP · sin φ und PQ = RP · cos φ, oder, RQ = z und PQ = y gesetzt, $z^2 = v^2 \cdot \sin\varphi^2$ und $y^2 = v^2 \cdot \cos\varphi^2$; so geht die vorige Gleichung (5) in diese über:

$$(\alpha)\quad b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

welche denn die im Lehrsatze aufgestellte Gleichung der Oberfläche des Sphäroids zwischen den drei zum Punkte R gehörigen Coordinaten ist.

Zusatz 1. Derselbe Punkt der Oberfläche des Sphäroids gehört drei Ellipsen zu, die durch die drei Axen dieses Körpers gelegt sind. Denn wird die Ellipse durch AY oder AC = b (statt, wie vorhin, durch AX) gelegt; so findet man dieselbe Gleichung, indem man nur in (α) a und b, x und y vertauscht, nämlich:

$$(\beta)\ldots\quad a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 + b^2a^2z^2 = b^2a^2c^2.$$

Eben so ist für die durch die Axe AZ oder AD = c gelegte Ellipse, wenn a und c, x und z vertauscht werden, nun die Gleichung

$$(\gamma)\ldots\quad b^2a^2z^2 + c^2a^2y^2 + c^2b^2x^2 = c^2b^2a^2.$$

Zusatz 2. In (α) x = AP als konstant angenommen, ist (α) die Gleichung für den Schnitt durch MP, PN, welcher parallel mit dem Schnitte durch AC, AB in dem Abstande = AP geführt ist.

Ferner drückt (α) in der Form (wie oben in (5))

$$a^2c^2y^2 + a^2c^2z^2 = b^2c^2(a^2 - x^2)$$

die Gleichung für eine Ellipse aus, in welcher das Quadrat der halben Axe in der Richtung der y, d. i. y^2 oder $PM^2 = \frac{b^2c^2(a^2-x^2)}{a^2c^2}$, oder die halbe Axe

$$PM = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)} = b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)},$$

und eben so die halbe Axe in der Richtung der z, d. i.

$$PN = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2-x^2)} = c\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

ist. Man kann Dasselbe auch so ausdrücken:

Jeder auf die Axe der x ſenkrechte Schnitt eines Sphäroids, für welches die in unſerem Lehrſatze aufgeſtellte Gleichung gilt, gibt eine Ellipſe, deren halbe, den Axen der y und z parallele, Hauptaxen ſind

$$b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} \text{ und } c\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)},$$

und deren Fläche demnach vermöge §. 189. Zuſ. 1. iſt

$$bc\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \text{ oder } \frac{bc\pi}{a^2}(a^2-x^2).$$

§. 196. **Aufgabe 5. Den Inhalt eines Sphäroids zu finden.**

Auflöſung. Die Differenzialgleichung für den Inhalt W des zwiſchen der ganzen Ellipſe, deren Quadrant NPM, und der ganzen Ellipſe, deren Quadrant CAD iſt, enthaltenen Sphäroidabſchnittes iſt nach §. 192. Zuſ. 1.

$$dW = 4NPM \cdot dx,$$

daher vermöge §. 195. Zuſ. 2. auch

$$dW = bc\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{bc\pi}{a^2}(a^2-x^2)dx;$$

folglich durch Integrirung

$$W = bc\pi\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right) = \frac{bc\pi}{a^2}(a^2x-\tfrac{1}{3}x^3)+C,$$

wo die Konſtante $C = 0$ iſt, weil W und x zugleich verſchwinden.

Für $x = AB = a$ iſt $W = \frac{2}{3}abc\pi$, folglich

das ganze Sphäroid $= \frac{4}{3}abc\pi$.

Zuſatz. Wenn eine Ellipſe, deren große Halbaxe $= a$ ſich um die kleine Axe $= 2b$ umherbewegt; ſo iſt der Inhalt des entſtehenden **gedruckten** oder **abgeplatteten** Sphäroids $= \frac{4}{3}a^2b\pi$, und der Inhalt des durch Umdrehung der Ellipſe um 2a entſtandenen **länglichen** oder **oblongen** Sphäroids $= \frac{4}{3}ab^2\pi$. Jenes verhält ſich folglich zu dieſem, wie a : b.

e. Complanation.

§. 197. Erklärung. Complanation (Ebnung) drückt überhaupt das Verfahren aus, die Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ebene um eine fixe Gerade oder Axe erzeugten Körpers auf eine ebene Fläche zurückzubringen. So wird z. B. die Mantelfläche des geraden oder senkrechten Cylinders und Kegels, jene auf ein ihr gleiches Rechteck, und diese auf ein ihr gleiches Dreieck; eben so die Kugeloberfläche auf eine vier größten Kreisen derselben gleiche Ebene zurückgeführt (Geom. §§. 169. 171. 176. mit den Zus.).

§. 198. Lehrsatz. Die Differenzialgleichung der Oberfläche S eines solchen Körpers (§. 197.) zwischen den rechtwinkligen Coordinaten ist

$$dS = 2\pi y \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Beweis. In Fig. 52., wo $AP = x$; $AQ = x + \Delta x$; $PM = y$; $QN = y + \Delta y$ ist, sey die vom Bogen AM der Curve AY beschriebene Oberfläche $= S$ und die vom Bogen MN beschriebene Fläche $= \Delta S$.

Bei Umdrehung des Astes AY um die Axe AX beschreibt die Sehne MN die Seitenfläche F eines abgekürzten geraden Kegels, welcher zwischen den von MP und NQ, als Halbmessern, beschriebenen Kreisen enthalten ist. Nach Geom. §. 174. ist

$$F = (MP + NQ) \cdot MN \cdot \pi$$
$$= (2y + \Delta y) \cdot MN \cdot \pi = 2\pi (y + \tfrac{1}{2}\Delta y) MN.$$

Aber $MN^2 = MD^2 + DN^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, folglich

$$F = 2\pi (y + \tfrac{1}{2}\Delta y) \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}.$$

Stellt man sich nun den Punkt N unendlich nahe an M genommen vor, so daß NQ mit MP, d. i. $y + dy$ mit y, und die Sehne MN mit ihrem Bogen zusammenfällt; so drückt F das Element dS der vom Bogen AM beschriebenen Oberfläche S aus, oder man hat

$$dS = 2\pi y \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Zusatz. Ist der Bogen AM = s, folglich vermöge §. 182. $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; so hat man auch

$$dS = 2\pi y \,.\, ds, \text{ also } S = 2\pi \int y ds.$$

Man kann ferner unsere Formel auch so stellen:

$$dS = 2\pi y \,.\, dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} \text{ oder } dS = 2\pi y \,.\, dy \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)},$$

je nachdem man y durch x, oder x durch y ausdrücken will.

Beispiel. Ist AM ein Kreisbogen für den Halbmesser = r; so hat man durch Differenziirung der für den Kreis gültigen Gleichung ($y^2 = 2rx - x^2$)

$$ydy = rdx - xdx, \text{ und hieraus } \frac{dy}{dx} = \frac{r-x}{y}$$

$$\text{und } 1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y^2 + r^2 - 2rx + x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2},$$

indem man nämlich $-y^2$ statt $-2rx + x^2$ substituirt. Demnach ist hier

$$dS = 2\pi r \,.\, dx \text{ und } S = 2\pi rx = \pi \,.\, AM^2,$$

weil nach Geom. §. 124. Zus. 2. die Sehne AM die mittlere stetige Proportionale zwischen dem Durchmesser 2r und dem Segmente AP = x ist.

Diese Formel $S = \pi \,.\, AM^2$ drückt aus, daß der hinsichtlich des Bogens AM zugleich mit x anfangende Abschnitt der Kugeloberfläche gleich sey einem Kreise, dessen Halbmesser die Sehne AM jenes Bogens ist.

Wenn daher der Bogen AM der die halbe Kugeloberfläche generirende Quadrant, folglich das Quadrat seiner Sehne oder $AM^2 = r^2 + r^2$ oder $= 2r \,.\, r = 2r^2$ ist; so wird die halbe Kugeloberfläche durch $2r^2\pi$ und die ganze durch $4r^2\pi$ ausgedrückt.

§. 199. Aufgabe 1. Die Oberfläche eines Sphäroids zu finden.

Auflösung. Die Gleichung für die Ellipse

$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2 \quad (\text{§. 90. 2})$$

differenzirt, entwickelt man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} \text{ und } 1+\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}$$

$$= \frac{a^4\left(b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}\right)+b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2}{a^4y^2}.a^4-(a^2-b^2)x^2;$$

also $dS = \frac{2\pi b}{a^2}dx\sqrt{(a^4-(a^2-b^2)x^2)} = \frac{2\pi b}{a}dx\sqrt{(a^2\mp e^2x^2)}$,

indem man nämlich $ae = \sqrt{(a^2-b^2)}$, d. i. = der Excentricität der Ellipse (§. 101.) setzt. In dieser Formel gilt das obere Zeichen — für $a>b$; d. i. für den Fall, wenn die Axe der Umdrehung, durch welche das längliche Sphäroid (§. 196. Zus.) entsteht, zugleich die große Halbaxe a der Ellipse ist. Im entgegengesetzten Falle, wo $a<b$ ist, gilt das untere Zeichen +. Das Integral ist also in dem ersten Falle

$$S = \frac{2\pi b}{a}\int dx.\sqrt{(a^2-e^2x^2)}, \text{ oder}$$

$$S = \frac{\pi bx}{a}\sqrt{(a^2-e^2x^2)}+\frac{ab\pi}{e}.\text{arc.sin}\frac{ex}{a}$$

vermöge §. 139. Anmerk. Da für $x=0$ beide Glieder dieses Integrals verschwinden; so ist die Konstante $= 0$.

Nimmt man die Abscisse x gleich der halben Axe a und das Integral doppelt; so hat man wegen $a^2e^2 = a^2-b^2$ für die ganze Oberfläche des länglichen Sphäroids

$$S = 2\pi b^2+\frac{2ab\pi}{e}.\text{arc.sin e}.$$

Im zweiten Falle, wo

$$S = \frac{2\pi b}{a}\int dx\sqrt{(a^2+e^2x^2)}$$

gilt, ist nach §. 152. nr. 17'. das Integral

$$S = \frac{2\pi b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{(a^2+e^2x^2)}+\frac{a^2}{2e}\lambda(ex+\sqrt{(a^2+e^2x^2)})\right].$$

Für $x=0$ ist dieses Integral

$$S = \frac{a\pi b}{e}\lambda a, \text{ oder die Konstante } C = -\frac{a\pi b}{e}\lambda a,$$

und für $x=a$ wird

$$S = a\pi b\sqrt{(1+e^2)}+\frac{a\pi b}{e}\lambda(ae+a\sqrt{(1+e^2)}).$$

Hierin kann man auch in unserem Falle, wo $a < b$, folglich $a^2 + a^2e^2 = b^2$ ist, statt des ersten Gliedes setzen πb^2, indem $a\sqrt{(1+e^2)} = \sqrt{(a^2+a^2e^2)} = \sqrt{b^2} = b$ ist.

Weil ferner $ae + a\sqrt{(1+e^2)} = (e+\sqrt{(1+e^2)})\,a$, daher der Logarithmus dieser Größe $= \lambda(e+\sqrt{(1+e^2)}) + \lambda a$, folglich das letzte Glied unseres Integrals durch Hinzufügung der gefundnen Konstante $= \frac{a\pi b}{e}\lambda(e+\sqrt{(1+e^2)})$ ist; so wird, das zuletzt angeführte Integral doppelt genommen, die ganze Oberfläche des abgeplatteten Sphäroids

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2a\pi b}{e}\lambda(e+\sqrt{(1+e^2)})$$

gefunden.

Zusatz. Für $a = b$ gibt der Endausdruck von S sowohl in unserem ersten, als im zweiten Falle sogleich den Ausdruck $4a^2\pi$ der ganzen Kugeloberfläche, indem die Excentricität nun unendlich klein, daher $\sin = e$ und $\lambda(e+\sqrt{(1+e^2)}) = \lambda(1+e) = e$ gesetzt werden kann.*)

§. 200. Aufgabe 2. Die Oberfläche eines paraboliſchen Konoids zu finden, das durch Umdrehung des paraboliſchen Astes AY um die Axe AX (Fig. 52.) entſtanden iſt.

Auflöſung. Die Gleichung der Parabel ($y^2 = 2px$) differenziirt, wird

$ydy = pdx$; also $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$ und $1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y^2+p^2}{y^2} = \frac{2px+p^2}{y^2}$;

daher $dS = 2\pi . dx\sqrt{(2px+p^2)}$, und

$$S = \frac{2\pi(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}2p} = \frac{2}{3p}\pi(2px+p^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Da für $x = 0$ auch S verſchwindet, oder $\frac{2}{3p}\pi(2px+p^2)^{\frac{3}{2}} + C = 0$ wird; ſo entwickelt man für $x = 0$

*) Vergl. „Theorie der Differenzialrechnung und ihrer Anwendung zur Auflöſung der Probleme der Rectification, Complanation und Cubirung, unabhängig von der Betrachtung der unendlich kleinen Größen ꝛc.“ vom Prof. Moth. (Prag 1827, b. Kronb. u. Weber).

$$C = -\frac{2}{3p}\pi \cdot p^5 = -\frac{2}{5}\pi \cdot p^2;$$

folglich iſt die geſuchte Oberfläche

$$S = \frac{2}{3p}\pi (2px + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\pi \cdot p^2$$
$$= \frac{2}{3}\pi\left[\frac{(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p} - p^2\right].$$

§. 201. Aufgabe 3. Die Oberfläche eines hyperboliſchen Konoids zu finden, das durch die Umdrehung des hyperboliſchen Aſtes AY um die Axe AX entſtanden iſt.

Auflöſung. Die Abſciſſe x vom Mittelpunkte an gerechnet, gilt nach §. 90. 3) die Gleichung der Hyperbel:

$$a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2,$$

welche differenziirt gibt

$$a^2ydy = b^2xdx.$$

Hieraus iſt

$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$ und $1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}$ = (durch Subſtit. und Red.) $\frac{(a^2+b^2)b^2x^2-a^4b^2}{a^4y^2} = \frac{b^2(c^2x^2-a^4)}{a^4y^2}$, indem man nämlich $a^2+b^2 = c^2$ ſetzt. Daher denn

$$(\triangle)\ldots dS = \frac{2\pi b}{a^2}dx\sqrt{(c^2x^2-a^4)}.$$

Das Integral von $dx\sqrt{(c^2.x^2-a^4)}$ iſt nach §. 152. nr. 17'., weil jetzt das dortige $1 = -a^4$ und $x^2 = c^2x^2$ iſt,

$$\frac{x}{2}\sqrt{(c^2x^2-a^4)} - \frac{a^4}{2c}\lambda\frac{cx+\sqrt{(c^2x^2-a^4)}}{c.C}.$$

Da nun bei der Hyperbel, wenn die Abſciſſe $x = a$ geſetzt wird, das Integral verſchwindet, d. i. der erſte Theil des vorigen Integrals, nämlich $\frac{x}{2}\sqrt{(c^2x^2-a^4)} + C = 0$ wird; ſo findet man hieraus für $x = a$ die Konſtante

$$C = -\frac{a}{2}(c^2a^2-a^4) = -\frac{a}{2}\sqrt{[(a^2+b^2)a^2-a^4]}$$
$$= -\frac{a}{2}\sqrt{a^2b^2} = -\frac{1}{2}a^2b.$$

Der andere Theil jenes Integrals muß für $x = a$ ebenfalls $= 0$, daher, weil $\lambda 1 = 0$ ist,

$$\frac{cx + \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}{c \cdot C} = 1, \text{ oder für } x = a$$

$$\frac{ca + \sqrt{(c^2a^2 - a^4)}}{c} = C, \text{ d. i. } C = \frac{ca + ab}{c} = \frac{a(b+c)}{c}$$

seyn.

Fügt man nun jedem Integraltheile die gehörige Konstante und den Faktor $\frac{2\pi b}{a^2}$ bei und reduzirt; so erhält man die der Gleichung ($\triangle$) entsprechende Integralgleichung, oder die gesuchte Oberfläche des hyperbolischen Konoids

$$S = \frac{\pi b}{a^2}\left[x\sqrt{(c^2x^2 - a^4)} - \frac{1}{2}a^2b\right] - \frac{\pi a^2 b}{c}\lambda\frac{cx + \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}{a(b+c)}.$$

Verbesserungen.

Seite 93. Zeile 9. lies cos b statt cos b' — S. 133. Z. 3. l. wird die st. sind — S. 134. Z. 15. am Ende l. hat st. habe — S. 147. Z. 7. u. l. $(x-6)(x-3)(x+2) = 0$ — S. 200. Z. 4. nach Ex^4 l. + st. x — S. 276. Z. 2. l. Ellipse st. Parabel — S. 287. unter 4. Z. 1. l. in st. in — S. 308. Z. 12. v. u. l. oder st. der.

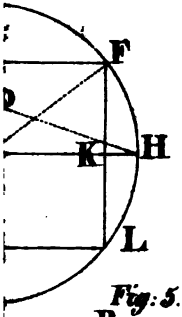


Fig. 3.

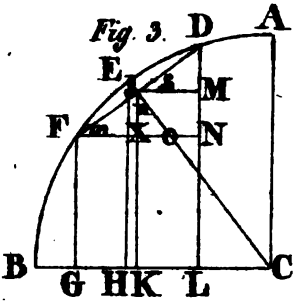


Fig: 5.

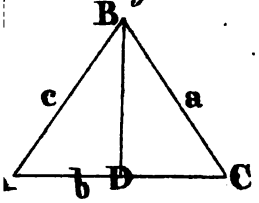


Fig: 6

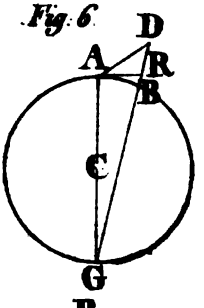


Fig: 9.

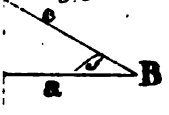


Fig: 8.

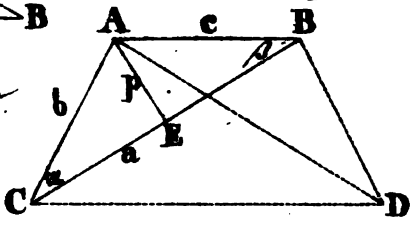


Fig: 11.

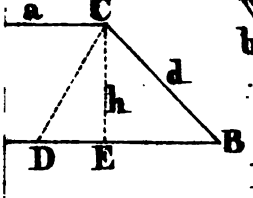
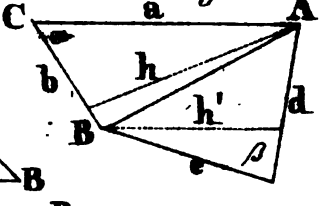


Fig: 12.



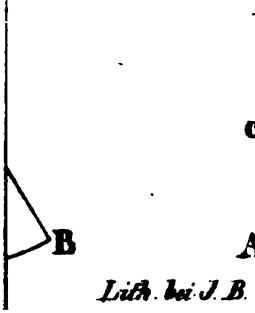
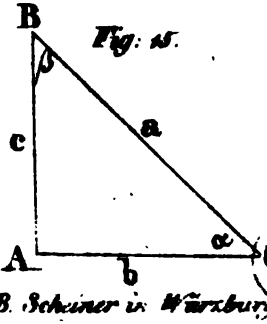


Fig: 15.



Lith. bei J. B. Schreiner in Würzburg

Fig. 17.

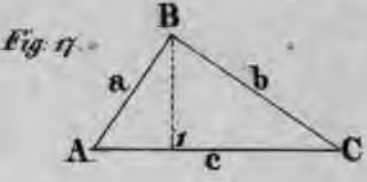
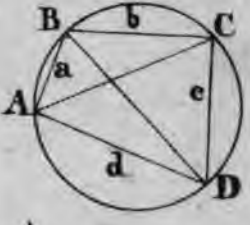


Fig. 18



F
G

I

Fig. 20.

Fig. 23.

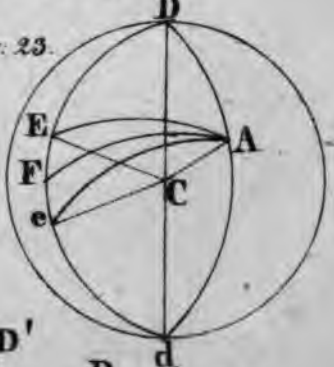
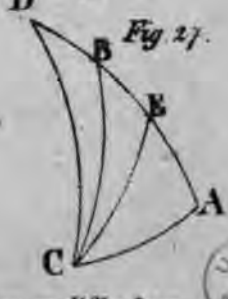


Fig. 26.

Fig. 27.



Lith. und B. Schenner in Würzburg

em.

Tab. III.

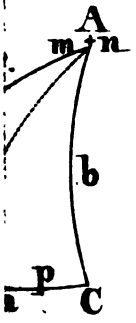
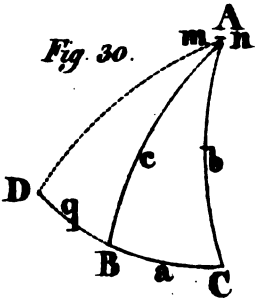


Fig. 30.



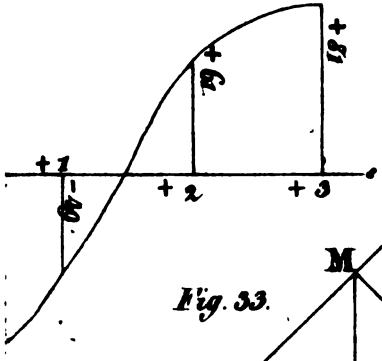


Fig. 33.

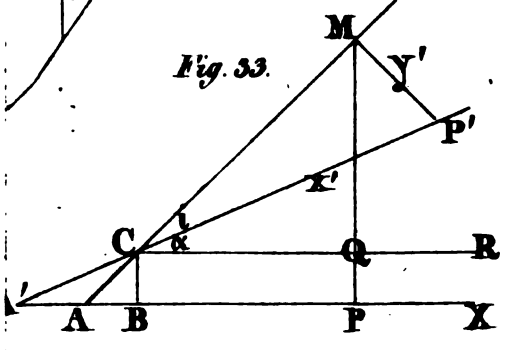
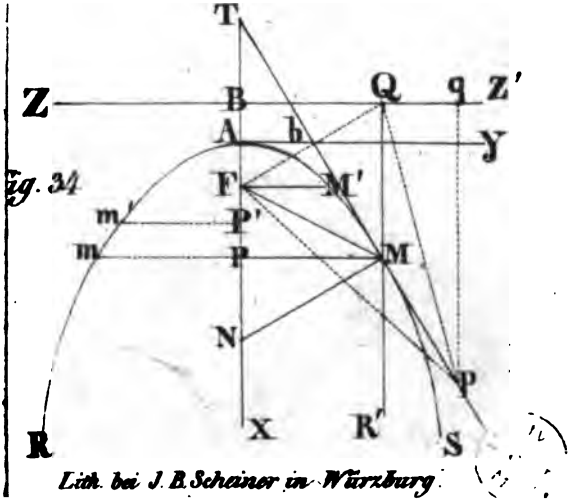


Fig. 34



Lith. bei J. B. Schainer in Würzburg.

Fig: 38.

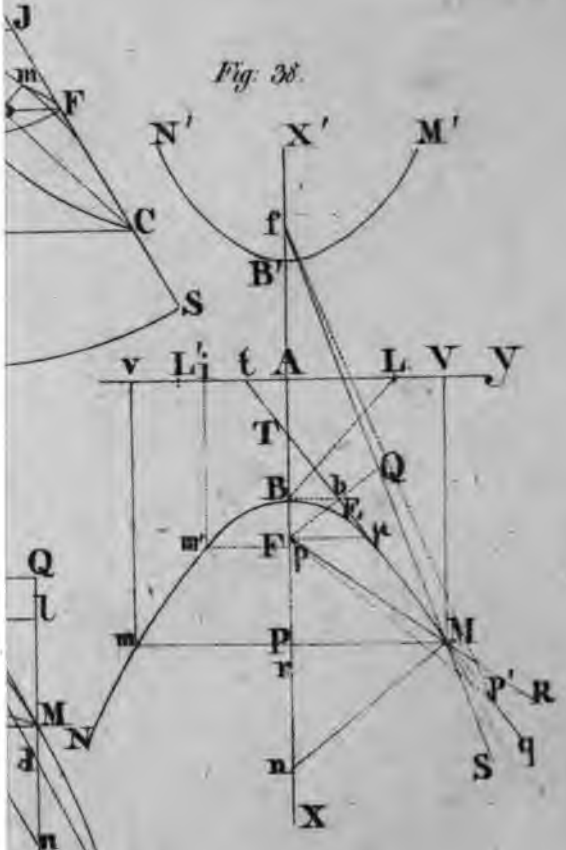
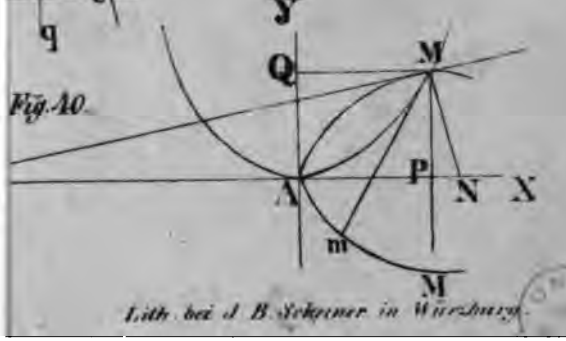


Fig. 40.



Lith. bei d. B. Sekpiner in Würzburg.

Fig 44.

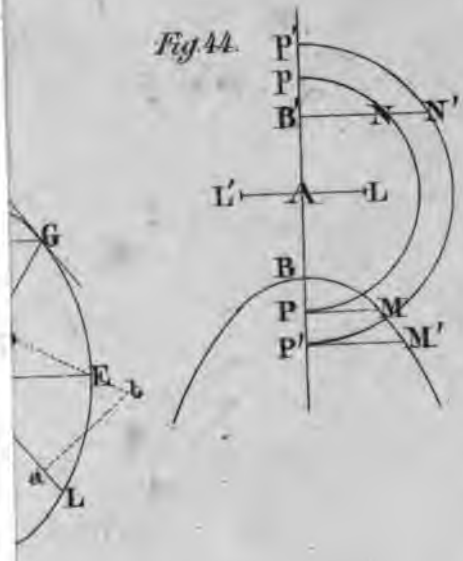
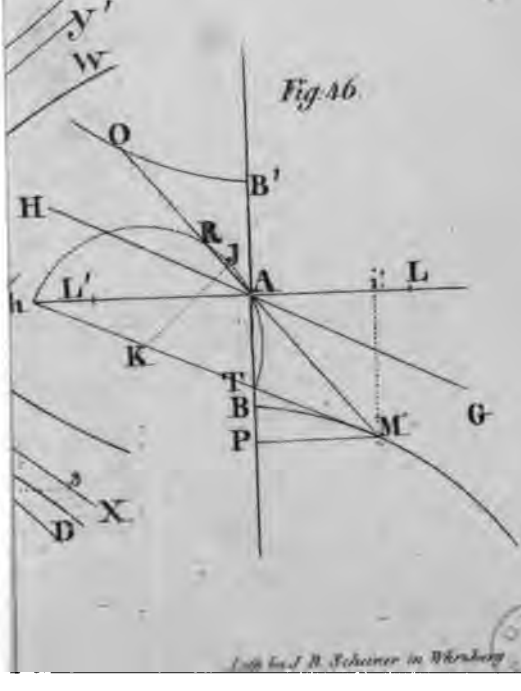


Fig 46.



Lith. Inst. J. B. Schairer in Würzburg